[3] D i t c h b a u r n R.W. Light 1952. London. Blackie And Sov.
[4] K r u p p H. // Adv. Colloid Interface. Sci. 1967. V. 1. P. 111.
[5] L e u n g P.C., A n d e r m a n G., S p i t z e r W.G., M e a d C.A. // J. Phys. Chem. Sol. 1966. V. 27. P. 849.
[6] K u h n A., C h e v y A., C h e v a l i e r R. // Phys. Stat. Sol. 1975. A-31. P. 469.

Институт физики
АН АзССР, Баку

Поступило в Редакцию
9 октября 1990 г.

Письма в ЖТФ, том 17 ,вып. 2 26 января 1991 г.

01; 06.3; 07

БИФУРКАЦИИ ВЕТВЛЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩИХ

В.М. Е л е о н с к и й, В.Г. К о р о л е в,
Н.Е. К у л а г и н, Л.П. Ш и л ь н и к о в

В предыдущей работе (2) рассматривались ветвления сложных векторных солитонов в нелинейном двулучепреломляющем волокне в случае равных фазовых скоростей волн двух поляризаций. Рассмотрим основные результаты для общего случая различных фазовых скоростей.

Система нелинейных уравнений Шредингера

$$\begin{aligned} &i\varphi_{1,\tau} + \varphi_{1,\xi\xi} + 2(a|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)\varphi_1 = 0, \\ &i\varphi_{2,\tau} + i\delta\varphi_{2,\xi} + \varphi_{2,\xi\xi} + 2(c|\varphi_2|^2 + |\varphi_1|^2)\varphi_1 = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

определяет динамику волн огибающих с поляризациями φ_1, φ_2 и фазовыми скоростями V_1, V_2 ($\delta \sim V_2 - V_1$) в нелинейной среде с параметрами нелинейности a, c [1]. Уравнения (1) допускают выделение стационарных решений вида

$$\varphi_1(\xi,\tau) = e^{i\lambda_1\tau}X_1(\xi); \quad \varphi_2(\xi,\tau) = e^{i\lambda_2\tau + i\delta\xi/2}X_2(\xi). \qquad (2)$$

Функции X_1, X_2 удовлетворяют системе уравнений:

$$X_{1,\xi\xi} - \lambda_1 X_1 + 2(\alpha X_1^2 + X_2^2) X_1 = 0,$$
$$X_{2,\xi\xi} - \nu\lambda_1 X_2 + 2(c X_2^2 + X_1^2) X_2 = 0, \qquad (3)$$
где $\nu = (\lambda_2 - \delta^2/4)/\lambda_1$. В фазовом пространстве $\Gamma(P_1 = X_{1,\xi}, X_1, P_2 = X_{2,\xi}, X_2)$ системе (3) соответствует система канонических уравнений с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}P_1^2 + \frac{1}{2}P_2^2 - \frac{1}{2}\lambda_1 X_1^2 - \frac{1}{2}\nu\lambda_1 X_2^2 + \frac{1}{2}\alpha X_1^4 + X_1^2 X_2^2 + \frac{1}{2}c X_2^4. \qquad (4)$$

Стационарным солитонам огибающих отвечают решения системы уравнений (3), удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} X_1 = 0; \quad \lim_{\xi \to \pm\infty} X_2 = 0. \qquad (5)$$

При $\alpha > 0$, $c > 0$, $\nu > 0$, $\lambda_1 > 0$ задача (3), (5) допускает существование солитонов с одной поляризацией типа $(X_1, 0)$ и $(0, X_2)$, где

$$X_1 = \pm(\lambda_1/a)^{1/2} ch(\lambda_1^{1/2}\xi); \quad X_2 = \pm(\nu\lambda_1/c)^{1/2}/ch([\nu\lambda_1]^{1/2}\xi). \qquad (6)$$

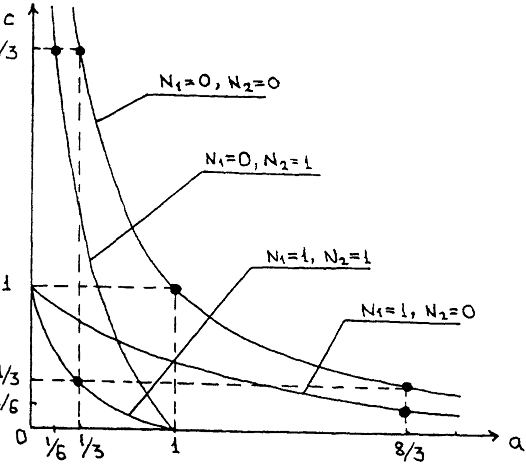
В фазовом пространстве Г образами этих состояний являются гомоклинические петли седловой особой точки $O(X_1 = P_1 = X_2 = P_2 = 0)$, расположенные соответственно в инвариантных плоскостях (P_1, X_1) и (P_2, X_2) в уровне гамильтониана H = 0.

В [2] для случая $\nu = 1$ показано, что $\alpha = 1$ и $c = 1$ являются бифуркационными значениями, определяющими рождение или уничтожение простейших векторных солитонов. Более того, было определено счетное множество бифуркационных значений параметров α или c, прохождение которых приводит к рождению счетного множества сложных векторных солитонов, ветвящихся от пары солитонов с заданной поляризацией $(X_1, 0)$ или $(0, X_1)$. Качественный анализ, подтвержденный численными расчетами, приводит к утверждению: бифуркационные значения параметров α и c отвечают касанию устойчивого и неустойчивого многообразий седла 0 по простым гомоклиническим петлям, расположенным в инвариантных плоскостях (P_1, X_1) и (P_2, X_2).

В случае $\nu \neq 1$, полагая в (3) $\lambda_1 = 1$, $X_1 = 1/\alpha^{1/2} ch\xi + u_1$, $X_2 = 0 + u_2$, находим, что в линейном по функциям u_1 и u_2 приближении возможность ветвления векторных солитонов от пары с заданной поляризацией $(\pm 1/\alpha^{1/2} ch\xi, 0)$ определяется условиями разрешимости следующей задачи:

$$u_{1,\xi\xi} - u_1 + \frac{6u_1}{ch^2\xi} = 0, \qquad (7)$$

$$u_{2,\xi\xi} - \nu u_2 + \frac{2u_2}{a ch^2\xi} = 0. \qquad (8)$$



Проекции бифуркационных кривых (11) на плоскость параметров a и c и точки полной интегрируемости гамильтоновой системы (4).

Уравнение (7) допускает единственное решение $sh\,\xi/ch^2\xi$, удовлетворяющее требуемым условиям. Однако уравнение (8) разрешимо лишь для значений a, c, удовлетворяющих бифуркационным соотношениям

$$\nu^{1/2} = N_1(a) - N_1\,; \quad N_1 = 0.1, \ldots, [N_1(a)], \tag{9}$$

в которых $N_1(a) = \{-1 + [1 + 8/a]^{1/2}\}/2$ и $[N_1(a)]$ – целая часть $N_1(a)$. Аналогично условие ветвления векторных солитонов от пары солитонов с иной поляризацией $(0, \pm(\nu/c)^{1/2}/ch\,\xi)$ приводит к бифуркационным соотношениям

$$\nu^{-1/2} = N_2(c) - N_2\,; \quad N_2 = 0, 1, \ldots, [N_2(c)]. \tag{10}$$

Разрешая (9), (10) относительно a, c, приходим к выводу, что ветвления векторных солитонов от двух пар солитонов заданной поляризации $(X_1, 0)$ и $(0, X_2)$ происходят на счетном множестве кривых, возникающих при пересечении в пространстве параметров (a, c, ν) бифуркационных поверхностей

$$\begin{aligned} a &= 2/[(\nu^{1/2} + N_1)(\nu^{1/2} + N_1 + 1)], \quad N_1 = 0, 1, \ldots \\ c &= 2/[(\nu^{-1/2} + N_2)(\nu^{-1/2} + N_2 + 1)]; \quad N_2 = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

На этих бифуркационных кривых устойчивое и неустойчивое многообразия седла О касаются по простым гомоклиническим петлям, расположенным в инвариантных плоскостях (P_1, X_1), (P_2, X_2). При $N_1 = N_2 = 0$ на дифуркационной кривой происходит слияние этих многообразий (такое влияние является одним из необходимых признаков полной интегрируемости гамильтоновой динамической системы, т.е. интегрируемости в произвольном уровне гамильтониана H); на ней расположены три точки полной интегрируемости [3]: $\alpha = c = \nu = 1$; $\alpha = 8/3$, $c = 1/3$, $\nu = 1/4$; $\alpha = 1/3$, $c = 8/3$, $\nu = 4$. При $N_1 = 1$, $N_2 = 0$ и $N_1 = 0$, $N_2 = 1$ на бифуркационных кривых (11) находятся точки полной интегрируемости $\alpha = 8/3$, $c = 1/6$, $\nu = 1/4$ и $\alpha = 1/6$, $c = 8/3$, $\nu = 4$ соответственно. Наконец, при $N_1 = N_2 = 1$ на соответствующей бифуркационной кривой (11) расположена точка полной интегрируемости $\alpha = c = 1/3$, $\nu = 1$ (см. рисунок).

Таким образом, в известных случаях полной интегрируемости динамической системы с гамильтонианом (4), удовлетворяющим условиям $\alpha > 0$, $c > 0$, $\sigma > 0$, $\lambda_1 > 0$, значения параметров принадлежат бифуркационным кривым (11) ветвлений векторных солитонов от двух пар солитонов с заданной поляризацией.

Авторы выражают благодарность Н.Н. Ахмедиеву за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Афанасьев В.В., Дианов Е.М., Прохоров А.М., Серкин В.Н. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 48. В. 11. С. 588–592.
[2] Ахмедиев Н.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Шильников Л.П. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 15. С. 19–23.
[3] Lakashmanan M., Sahadevan R. // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. N 2. P. 861–876.

Научно-исследовательский институт физических проблем им. Ф.В. Лукина, Москва

Поступило в Редакцию 18 октября 1990 г.

Письма в ЖТФ, том 17, вып. 2 26 января 1991 г.

04; 10

НОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А.Т. Скворцов

Как известно, задача об определении равновесной конфигурации идеально проводящей жидкости в осесимметричном случае сводится к решению уравнения Грэда–Шафранова [1]:

$$\tilde{\Delta}\Psi = r^2 P' - f f', \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{1}$$