этих многообразий (такое влияние является одним из необходимых признаков полной интегрируемости гамильтоновой динамической системы, т.е. интегрируемости в произвольном уровне гамильтониана H); на ней расположены три точки полной интегрируемости [3]: $\alpha = c = \nu = 1$; $\alpha = 8/3$, $c = 1/3$, $\nu = 1/4$; $\alpha = 1/3$, $c = 8/3$, $\nu = 4$. При $N_1 = 1$, $N_2 = 0$ и $N_1 = 0$, $N_2 = 1$ на бифуркационных кривых (11) находятся точки полной интегрируемости $\alpha = 8/3$, $c = 1/6$, $\nu = 1/4$ и $\alpha = 1/6$, $c = 8/3$, $\nu = 4$ соответственно. Наконец, при $N_1 = N_2 = 1$ на соответствующей бифуркационной кривой (11) расположена точка полной интегрируемости $\alpha = c = 1/3$, $\nu = 1$ (см. рисунок).

Таким образом, в известных случаях полной интегрируемости динамической системы с гамильтонианом (4), удовлетворяющим условиям $\alpha > 0$, $c > 0$, $\sigma > 0$, $\lambda_1 > 0$, значения параметров принадлежат бифуркационным кривым (11) ветвлений векторных солитонов от двух пар солитонов с заданной поляризацией.

Авторы выражают благодарность Н.Н. Ахмедиеву за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Афанасьев В.В., Дианов Е.М., Прохоров А.М., Серкин В.Н. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 48. В. 11. С. 588–592.
[2] Ахмедиев Н.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Шильников Л.П. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 15. С. 19–23.
[3] Lakashmanan M., Sahadevan R. // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. N 2. P. 861–876.

Научно-исследовательский институт физических проблем им. Ф.В. Лукина, Москва

Поступило в Редакцию 18 октября 1990 г.

Письма в ЖТФ, том 17, вып. 2 26 января 1991 г.

04; 10

НОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А.Т. Скворцов

Как известно, задача об определении равновесной конфигурации идеально проводящей жидкости в осесимметричном случае сводится к решению уравнения Грэда–Шафранова [1]:

$$\tilde{\Delta}\Psi = r^2 P' - ff', \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \qquad (1)$$

Здесь r , z – оси цилиндрической системы координат, Ψ – потенциал Стокса, который связан с компонентами магнитного поля следующими соотношениями:

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad B_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad B_\varphi = \frac{f}{r}, \tag{2}$$

где P , f – произвольные функции Ψ . К уравнению (1) сводится также задача о „параллельных" магнитогидродинамических течениях, для которых $B = \alpha v$ ($\alpha = const$, v – поле скорости) [2], и (при замене B на v в (2)) задача о вихревых осесимметричных течениях в обычной гидродинамике [3]. Поэтому полученные ниже результаты могут в неизменном виде применяться и в этих случаях.

Следуя [4], положим $f = k\Psi$, $P = m^2\Psi^2/2 + d$,
где k , m , d – постоянные. Тогда из уравнения (1) имеем

$$\tilde{\Delta}\Psi = (m^2r^2 - k^2)\Psi. \tag{3}$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\Psi = Z(z)R(r). \tag{4}$$

Подстановка (4) в (3) дает

$$-\frac{Z''}{Z} = \frac{R'' - R'/r}{R} + k - m^2r^2. \tag{5}$$

Для любых z и r это равенство может выполняться только в случае, когда сравниваемые величины равны постоянной (из условия конечности решения при $|z| \to \infty$ вытекает, что она должна быть положительной, см. уравнение (6)). Обозначая эту постоянную через q^2 , приходим на основании (5) к системе двух уравнений:

$$z'' + q^2 Z = 0, \tag{6}$$

$$R'' - R'/r + (k^2 - q^2 - m^2r^2)R = 0. \tag{7}$$

Решение уравнения (6) тривиально:

$$Z = A\cos qz + B\sin z, \qquad A, B = const. \tag{8}$$

Для решения уравнения (7) делаем вначале замену переменной $\xi = mr^2$ с последующей подстановкой

$$R = \xi \exp(-\xi/2)\, \omega(\xi). \tag{9}$$

В результате уравнение (7) приводится к гипергеометрическому виду

$$\xi w'' + (2-\xi) w' + (\varkappa - 1) w = 0, \qquad \varkappa = (k^2 - q^2)/4m.$$

Решение этого уравнения, конечное в нуле и растущее при $\xi \to \infty$ не быстрее конечной степени ξ , есть вырожденная гипергеометрическая функция [5]:

$$w = F(1-\varkappa,\ 2,\ \xi) \tag{10}$$

при $\varkappa - 1 = n$, n = 0, 1, 2 ... (в этом случае F сводится к полному [5]). Учитывая далее (9) и воспользовавшись в (10) стандартными представлениями для вырожденной гипергеометрической функции [5], получаем окончательно

$$R = \frac{-\xi}{2\cdot 3\ldots(n+1)}\, e^{\xi/2} \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} \left(e^{-\xi} \xi^{n}\right), \quad \xi = mr^2. \tag{11}$$

Формулы (4), (8), (11) описывают точное решение уравнения (1). Видно, что распределение магнитного поля, отвечающее этому решению, экспоненциально локализовано по r и периодически изменяется вдоль z.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

[2] Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989. 200 с.

[3] Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

[4] Скворцов А.Т. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 17 С. 1609-1612.

[5] Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. 286 с.

Акустический институт
им. А.Н. Андреева АН СССР,
Москва

Поступило в Редакцию
6 августа 1990 г.