При этом интеграл (3) вычисляется элементарно и в результате получаем $U=k_0^2 th^2(\pi y/Z_0)$, $h=B(\omega) th^2(\pi y/Z_0)$, где

$$B(\omega)=\frac{g^2 k_0 L}{(1+g^2)[Lk(1+g^2)+1]}\,\frac{\omega_M \omega_{H0}}{\omega^2+\omega^2} H_0.$$

Таким образом, в данном неоднородном поле все пучки МСВ, выходящие из одного источника под разными углами, фокусируются в одной точке.

Ввиду $h \ll H_0$, данное рассмотрение будет справедливо, в частности, вблизи минимума „рва" $|y/Z_0| \ll 1$, откуда получаем $h \approx B(\omega)(\pi y/Z)$ Заметим, что в оптике аналогичная среда – „рыбий глаз" – с показателем преломления $n=n_0\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{-1}$ давно используется как безаберационный прибор [5].

В заключение отметим, что подобным же образом может быть исследован и общий случай двумерной неоднородности, что позволяет определять вид необходимого неоднородного поля по заданным характеристикам МСВ. Это может открыть новые возможности при создании фильтров, направленных ответвителей и других устройств магнитоэлектроники.

Список литературы

[1] Tsuzumi M. a.e. // Appl. Phys. Lett. 1979. V. 35. P. 204-206.
[2] Вашковский А.В., Зубков В.И., Локк Э.Г. и др. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. С. 1-4.
[3] Бурлак Г.Н. // Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12. С. 1476-1480.
[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, М.: Наука, 1973. 207 с.
[5] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 547 с.

Киевский государственный университет им. Т.Г. Шевченко

Поступило в Редакцию 4 января 1991 г.

Письма в ЖТФ, том 17, вып. 6 26 марта 1991 г.

01; 05

ФРАКТАЛЬНАЯ ДИНАМИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

А.С. Баланкин

Кардинальный пересмотр основ механики деформируемых сред с позиций термодинамики и статистической физики сильно неравновесных процессов [1-4] привел к становлению новой научной дисциплины – синергетики деформируемых сред [5], предметом которой является изучение процессов самоорганизации диссипативных структур (ДС), инициируемых механическим воздействием, и их влияния на реологическое поведение среды. Единство законов, управляющих динамикой нелинейных диссипативных систем, открывает широкие возможности обобщений [4–7]. Это позволяет с единых позиций рассматривать динамику, кинетику и механику деформации, разрушения и течения различных сред (жидких, твердых, сыпучих).

1. В основе линейной теории упругости лежат два закона – закон Гука, постулирующий прямую пропорциональность между деформациями и напряжениями, и закон Пуассона, постулирующий эффект поперечных деформаций при отсутствии поперечных напряжений [8]. В то же время, благодаря тонкой структуре, растяжение (сжатие) фрактальных структур (например, фигур Коха [9]) будет сопровождаться поперечными деформациями, вызываемыми соответствующими напряжениями. Это подтверждается численными экспериментами по определению упругих свойств перколяционных кластеров, имеющих фрактальную структуру [9, 10].

Используя свойства самоподобия фракталов [9, 11], получаем соотношения, связывающие модули Юнга (E), сдвига (G), объемной упругости (B), коэффициент Пуассона (ν) и размерности фрактальной структуры (d_f) и объемлющего пространства (d):

$$B=\frac{E}{d(d-d_f)},\quad G=\frac{(d-1)E}{2d_f},\qquad \nu=-1+\frac{d_f}{(d-1)}\leq\frac{1}{d-1}. \tag{1}$$

Легко видеть, что при d = 2 и 3 выражения (1) тождественны соотношениям линейной теории упругости двух и терхмерных тел. Заметим, что эффект поперечных деформаций отражает структурную устойчивость фрактала и является проявлением принципа Ле Шателье-Брауна для случая упругих деформаций. Стремление фрактала компенсировать изменение объема (δV), сопровождающее деформацию (ε_i) под действием напряжения (σ_i), реализуется при выполнении условий

$$0<(d-d_f)=\left(\frac{\partial\delta V}{\partial\varepsilon_i}\right)_{\sigma_j=0}=(d-d_f)\left(\frac{\partial\delta V}{\partial\varepsilon_i}\right)_{\varepsilon_j=0}<\left(\frac{\partial\delta V}{\partial\varepsilon_i}\right)_{\varepsilon_j=0}, \tag{2}$$

где $d-d_f\equiv 1-(d-1)\nu$. При $\nu<0$ $\nu\geqslant(d-1)^{-1}$ структура теряет устойчивость, поэтому чем больше d, тем меньше предельное значение ν_m. Соотношения Коши [8] для рагулярных фракталов сводятся к равенству

$$\nu^{(d)}=\frac{2}{d^2-1}=\frac{2\nu_m}{d+1}, \tag{3}$$

получаемому из (1) в рамках теории среднего поля, где $d_f = \frac{d^2+1}{d+1}$ [9]. Как и следовало ожидать, при $d = 2$ и 3 получаем известные результаты: $\nu_m = 1$, $\nu^{(2)} = 2/3$, и $\nu_m = 1/2$, $\nu^{(3)} = 1/4$. Соотношения Коши, очевидно, должны выполняться для виттен-сэндоровских фракталов, что подтверждается данными, приведенными в таблице. Расчеты по (1) согласуются и с результатами численного определения упругих свойств фракталов [9, 10].

Вследствие сдвиговой жесткости твердых тел, неоднородные флуктуации плотности (как спонтанные - квантовые и тепловые, так и индуцированные внешним воздействием [12]) сопровождаются появлением сдвиговых напряжений [12, 13]. Отсюда, учитывая (1), (2), следует, что в твердых телах неоднородные флуктуации плотности и сдвига имеют фрактальную структуру, размерность которой равна[1]

$$d_f = (d-1)(1+\nu) \leq d, \tag{4}$$

что, в частности, проявляется в фрактальности поверхностей разрушения и фрактальной структуре ансамблей дефектов, самоорганизующихся при больших пластических деформациях тела [11, 14]. При $d = 3$ из (4) следует соотношение $d_f = 2(1+\nu)$, полученное ранее [3, 15] другим способом. Очевидно, что в анизотропных телах, например кристаллах, распределение неоднородных флуктуаций имеет более сложную, мультифрактальную структуру. Для жидкостей в пределе нулевой вязкости $\nu = 0.5$ и распределение неоднородных флуктуаций в пространстве $d = 3$ однородно.

2. Характерный масштаб L_m, ограничивающий область фрактальности неоднородных флуктуаций снизу, определяется установлен-

---

[1] Учитывая, что за степенную зависимость корреляционной функции атомов ответственны дальнодействующие межатомные силы [16], обеспечивающие сдвиговую устойчивость тела [17], возможно и обратное (4) утверждение - эффект поперечных деформаций является следствием фрактальности неоднородности флуктуаций плотности и сдвига, обусловленной дальнодействием. Тогда, постулируя только пропорциональность $\varepsilon \sim \sigma$, получаем, что внутренние поперечные напряжения, инициируемые изменением спектра неоднородных флуктуаций в деформируемом теле, вызывают поперечную деформацию тела в пространстве $d \geqslant d_f$. При $\varepsilon \ll 1$ результат такого подхода тождественен классической линейной теории упругости. Новые нетривиальные результаты получаются в области нелинейной упругости и при рассмотрении пластических деформаций и разрушения. Текучесть жидкостей при таком подходе можно рассматривать как проявление масштабной инвариантности при $d_f = d$. Кроме того, из предлагаемого рассмотрения следует, что вблизи гладкой поверхности локальное значение ν должно стремиться к нулю. Это подтверждается экспериментами [18].

Фрактальная размерность виттен-сэндеровской модели как функция размерности пространства [26] и результаты расчетов по (1), (3)

d	2	3	4	5
ν_m (1)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Численные расчеты [26] d_f	1.70	2.50	3.33	4.20
ν (1)	0.70	0.25	0.11	0.05
$\nu^{(d)}$(3)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	0.13	$\frac{1}{12}$

ным в [19] минимальным масштабом флуктуаций плотности в твердом теле. Так как для большинства тел L_m много больше постоянной элементарной ячейки a, флуктуационный вклад в теплоемкость $C_V^{(\Phi)} \sim T^{d_s}$ (d_s – спектральная размерность [9]) обычно мал. Однако в ряде случаев $L_m \sim a$, и флуктуационный вклад может преобладать. Например, для $MgSiO_3$ $C_V \sim T^{2,218}$ [20], что согласуется с рассчитанным по (1) значением $d_f = 2.23$.

3. Учитывая связь d_f с критическими индексами [9], видим, что отличие последних от значений, полученных в теории среднего поля [21], для критических явлений в твердых телах может быть связано с нарушением условий Коши. Кроме того, развиваемый здесь подход позволяет учитывать влияние дальнодействующих корреляций на пороге протекания и критические индексы перколяции, так как ν определяется соотношением коротко- и дальнодействующих сил.

4. При σ, превышающих критическое значение $\sigma_{кр}$, энергия, получаемая деформируемой средой, накапливается в локализованных сильно неравновесных областях [3], распределение которых в объеме среды, согласно п. 1, имеет фрактальный характер, что обеспечивает эффективную перекачку энергии. Этим и объясняется установленный экспериментально [1] турбулентный характер больших пластических деформаций. Здесь имеется полная аналогия с течением жидкостей и сыпучих сред, в которых, благодаря вязкости (трению), эффективное значение $\nu_{эфф} < 0.5$ [3]. Формируемые при пластической деформации и течении ДС имеют мультифрактальную структуру, обеспечивающую эффективную регуляцию производства и оттока энтропии путем изменения размерностей областей локализации избыточной энергии D_f и поверхностей диссипации d_f.

5. Система основных уравнений теории упругости, записанная в лагранжевой системе координат [8], теряет эллиптичность в точке бифуркации, определяющей предельное значение упругой дефор-

мации $\varepsilon_{кр} = \frac{(d-1)}{2d_f}$. При напряжениях $\sigma > \sigma(\varepsilon_{кр})$ система уравнений становится гиперболической. Используя связь фрактальной размерности с показателями устойчивости Ляпунова [22], получаем выражение для определения размерности областей локализации избыточной энергии в пластически деформируемой среде

$$D_f = 1 + \frac{1}{d - d_f} = \frac{2(1-\nu_э)}{1-(d-1)\nu_э}, \qquad (5)$$

где $\nu_э$ – эффективное значение коэффициента поперечных деформаций, зависимость которого от величины пластической деформации, приводящей к уменьшению $|\delta V|$ и росту $\nu_э(\delta)$, и от степени поврежденности, накопление которой приводит к уменьшению $\nu_э(\delta)$ при растяжении ($\delta < 0$) и росту $\nu_э$ при сжатии ($\delta > 0$), получена ранее [15].

6. Характер (реализуемого при заданных условиях нагружения) разрушения определяется величиной $D_f(\delta^*)$. Так, хрупкое разрушение реализуется, если избыточная энергия концентрируется вблизи формируемой поверхности разрушения, т.е. $D_f(\delta^*) - d_f(\delta^*) \ll 1$. Фрактальная кинетика хрупкого разрушения рассмотрена в [15]. В случае $3 \leqslant D_f(\delta^*) \leqslant 4$ разрушение будет квазихрупким или квазивязким. Вязкое разрушение возможно при условии $4 < D_f(\delta_B^*) < 40$, причем, т.к. $\delta_B^* = (d-1)\nu$, где ν – коэффициент Пуассона в упругой области деформаций, при $d = 3$ имеем

$$D_f(\delta_B^*) = \frac{d-1}{d-d_f}, \quad 2.7 \leqslant d_f(\delta_B^*) = \frac{2(1+4\nu)}{1+2\nu} < 3. \qquad (6)$$

При $D_f > 40$ материал переходит в сверхпластичное состояние, рассмотренное в [23].

7. Как следует из определений площади поверхности S_f и объема V_f D_f-мерного шара радиусом L_f^i [9], D_f совпадает с коэффициентом автомодельности, определяющим иерархию пространственных масштабов структурных уровней деформации и разрушения:

$$D_f = \frac{L_f^{i+1}}{L_f^i} = \frac{S_f^i L_f^i}{V_f^i}. \qquad (7)$$

Расчеты по (5), (7) согласуются с эмпирическими [24] и экспериментальными [1, 14] данными.

8. Как следует из проведенного рассмотрения, все открытые системы со временем должны приобретать иерархическую мультифрактальную структуру, обеспечивающую оптимальные условия обмена энергией, веществом и энтропией с окружающей средой. Это подтверждается многочисленными астро- и геофизическими исследованиями [11, 24–26].

Автор выражает глубокую благодарность В.С. Ивановой, А.Я. Сагомоняну и Е.И. Шемякину за плодотворное обсуждение результатов.

Список литературы

[1] Лихачев В.А., Панин В.Е., Засимчук Е.Э. и др. Кооперативные деформационные процессы и локализация деформации. Киев: Наукова думка, 1989. 320 с.
[2] Баланкин А.С. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. № 22. С. 15-20.
[3] Баланкин А.С. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. № 7. С. 14-20.
[4] Баланкин А.С., Любомудров А.А., Севрюков И.Т. // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 12. С. 102-105.
[5] Баланкин А.С. Синергетика деформируемого тела. Основы кинетической теории динамической прочности. М.: МО СССР, 1991. 357 с.
[6] Скорняков Г.В. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. № 22. С. 12-14.
[7] Скворцов Г.Е. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. № 17. С. 15-17.
[8] Ильюшин А.А. // Механика сплошной среды. М.: МГУ, 1990. 310 с.
[9] Соколов И.М. // УФН. 1986. Т. 150. № 2. С. 221-255.
[10] Duering E., Bergman D.J. // Phys. Rev. V. B 37. N 16. P. 9460-9476.
[11] Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. 670 с.
[12] Баланкин А.С. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. № 13. С. 1231-1234.
[13] Леванюк А.П. // ЖЭТФ. 1974. Т. 66. № 6. С. 2255-2261.
[14] Иванова В.С., Шанявский А.А. Количественная фрактография. М.: Металлургия, 1988. 400 с.
[15] Баланкин А.С., Иванова В.С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17.
[16] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 448 с.
[17] Alexander S. // J. Phys. 1984. V. 45. N 12. P. 1939-1945.
[18] Судьенков Ю.В. // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. № 23. С. 1418-1422.
[19] Кондратьев В.В. // ФММ. 1977. Т. 44. № 3. С. 468-479.
[20] Якубов Т.С. // ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 1. С. 145-149.
[21] Ма Ш. Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980.-Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.
[22] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.

[23] Рыбин В.В., Перевезенцев В.Н. // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. № 19. С. 1203–1205.
[24] Садовский М.А., Болхвитинов Л.Г., Писаренко В.Ф. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. М.: Наука, 1987. 101 с.
[25] Гейликман М.Б., Голубева Т.В., Писаренко В.Ф. // ДАН СССР. Т. 308. № 5. С. 1335–1338.
[26] Жульен Р. // УФН. 1989. Т. 157. № 2. С. 339–357.

Поступило в Редакцию
1 февраля 1991 г.

Письма в ЖТФ, том 17, вып. 6 26 марта 1991 г.

00 00

БИСТАБИЛЬНОСТЬ И РЕЖИМ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В РЕЗОНАТОРЕ С ВНЕШНЕЙ НАКАЧКОЙ

А.В. Гайнер, Н.П. Коноплева,
Г.И. Сурдутович

Известно, что в системах генерации второй гармоники (ГВГ) с резонаторами для основной и генерируемой частот возникают бистабильность [1] и режим самопульсаций [2]. При рассмотрении внутрирезонаторной ГВГ в этих работах использовалась точечная модель нелинейной среды. Мы покажем, что в случае резонатора даже только для второй гармоники (ВГ) учет взаимодействия волны накачки и ВГ при распространении приводит к качественно новому режиму периодически повторяющихся прямоугольных импульсов и „бистабильности режимов", т.е. сосуществованию стационарного и периодического решений.

Пусть нелинейная среда длиной l помещена в кольцевой резонатор с накачкой когерентным излучением на частоте ω. Если зеркала резонатора прозрачны для волны накачки, то граничные условия для амплитуды a_2 и фазы φ_2 ВГ имеют вид:

$$a_2(0,t)=\alpha a_2(l,t-\Delta t),\ \varphi_2(0,t)=\varphi_2(l,t-\Delta t)+\delta, \qquad (1)$$

где $\Delta t=(l_R-l)/c$, l_R – полная длина резонатора, α – коэффициент ослабления за один обход, δ –расстройка резонатора. Когда отстройка от точного фазового синхронизма $\Delta k=2k_1-k_2=0$ (k_1, k_2 – волновые числа), то фазовые скорости волн в среде согласованы ($v_1 = v_2 = v$). В этом случае амплитуды и фазы