Список литературы

[1] Адамсон А. Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979. 568 с.
[2] Трусов Л.И., Хомянский В.А. Островковые металлические пленки. М.: Металлургия, 1973. 321 с.
[3] Кагановский Ю.С. и др. // Вопросы атомной науки и техники. 1990. Т. 4. № 12. С. 37–39.
[4] Любов. Диффузионные процессы в неоднородном твердом теле. М.: Наука, 1981. 255 с.
[5] Kao Et al. // J. Vac. Sci. Technol. 1989. A 7. N 5. P. 2966–2974.
[6] Weismantel Chr. et. al. // Neue Hütte. 1984. P. 178–183.

Поступило в Редакцию
31 января 1991 г.

Письма в ЖТФ, том 17, вып. 7 12 апреля 1991 г.

01

© 1991

МОЖЕТ ЛИ СЛУЧАЙНАЯ СИЛА ОКАЗЫВАТЬ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ?

В.М. Логинов

Хорошо известно (см., например, [1]), что действие случайных сил на динамическую систему, эволюция которой начинается от некоторого начального состояния, часто проявляется в том, что при выполнении порового условия на интенсивность флуктуационного поля в системе развивается стохастическая неустойчивость. В противоположность этому, неоднородная высокочастотная монохроматическая или квазимонохроматическая сила, наоборот, оказывает стабилизирующее действие и приводит к появлению эффективного притягивающего потенциала [2]. Поскольку процессы в реальной физической системе всегда протекают на фоне действия сил, природа которых, вообще говоря, определяется случайными факторами, то большой практический интнрес представляет вопрос о том, может ли случайная сила оказывать стабилизирующее действие или же она всегда генерирует стохастическую неустойчивость?

В работе на примере осциллятора с флуктуирующей частотой указан вид флуктуационного поля, действие которого повышает устойчивость осциллятора в среднеквадратичном. Динамика квадратичных характеристик $x^2(t)$, $v^2(t)$ и $x(t)v(t)$ описывается уравнением

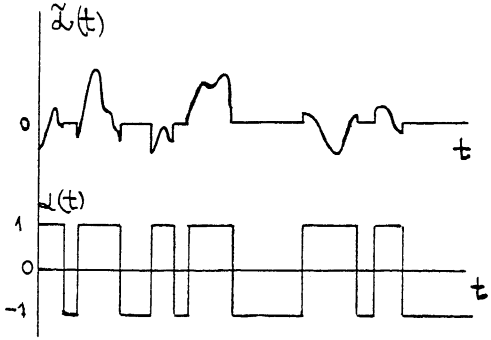

Рис. 1. Пример реализации случайных процессов: $\alpha(t)$ – марковский дихотомический процесс, $\tilde{\alpha}(t)$ – процесс с включениями.

$$\dot{u} = Au + \tilde{\alpha}(t)BU + F, \qquad (1)$$

где $u^T(t) = \left(x^2(t),\ x(t)v(t),\ v^2(t)\right)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\mathcal{E} & 1 \\ 0 & -2\omega_0^2 & -2\mathcal{E} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x\gamma(t) \\ 2v\gamma(t) \end{pmatrix},$$

x, v – соответственно координата и скорость осциллятора, $\mathcal{E}$ – частота релаксации, ω_0 – собственная частота осциллятора, $\gamma(t)$ характеризует действие внешней случайной силы и представляет собой гауссовский белый шум интенсивности D. Функция $\tilde{\alpha}(t)$ является случайной и задает закон изменения частоты осциллятора со временем. Считается, что процессы $\tilde{\alpha}(t)$ и $\gamma(t)$ статистически не связаны между собой. Рассмотрим случай, когда $\tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{2}(1+\alpha(t))f(t)$, где $f(t)$ – гауссовский белый шум интенсивности D, а $\alpha(t)$ – марковский дихотомический процесс (иногда его называют телеграфным процессом). Это означает, что функция $\alpha(t)$ с одинаковой вероятностью принимает в случайные моменты времени только два значения ± 1, число скачков на интервале dt равно $2\nu dt$ и подчиняется статистике Пуассона. Корреляционная функция процесса $\alpha(t)$ обладает экспоненциальным спадом с декрементом 2ν. Считаем процессы $\alpha(t)$ и $f(t)$ также статистически несвязанными. Из определения функции следует, что сомножитель $\frac{1}{2}(1 + \alpha(t))$ в случайные моменты времени „включает" флуктуации гауссовского белого шума $f(t)$ так, что $\tilde{\alpha}(t)$ представляет собой последовательность прямоугольных импульсов единичной высоты, промодулированных белым гауссовским шумом. Реализацию такого процесса иллюстрирует рис. 1.

Определим среднеквадратичные характеристики: $\langle x^2(t)\rangle$, $\langle v^2(t)\rangle$ и $\langle x(t)v(t)\rangle$. В результате после усреднения по ансамблям реализаций процессов $\gamma(t)$ и $f(t)$ получим (символ среднего для простоты записи опускается)

$$\dot{U}=AU+\frac{D}{2}\left(1+\alpha(t)\right)B^2U+\tilde{F}, \tag{2}$$

где $\tilde{F}^T=(0,\ 0,\ 2D\ )$. Усредним теперь стохастическое уравнение (2) по ансамблю реализаций дихотомического процесса $\alpha(t)$. Для этого используем метод формул дифференцирования статистических средних [3] (стр. 35, формула (3.9)). В результате система (2) редуцируется к замкнутой системе двух матричных уравнений:

$$\begin{aligned}\langle\dot{U}\rangle&=\left(A+\frac{D}{2}B^2\right)\langle U\rangle+\frac{D}{2}B^2U_1+\tilde{F},\\ \dot{U}_1&=\left(A-2\nu+\frac{D}{2}B^2\right)U_1+\frac{D}{2}B^2\langle U\rangle,\end{aligned} \tag{3}$$

где обозначено $U_1=\langle\alpha(t)U\rangle$, символ $\langle\ldots\rangle$ означает среднее по статистике $\alpha(t)$. Система уравнений (3) является точной. Она описывает динамику среднеквадратичных характеристик осциллятора, обусловленную действием на него стохастических полей $\gamma(t)$ и $\tilde{\alpha}(t)$ Полагая в (3) $\langle\dot{U}\rangle$ =0 и $\dot{U}_1$=0 и разрешая систему относительно переменной $\langle U\rangle$, получим

$$\begin{aligned}&\langle x^2\rangle_{ст}=\frac{D}{\Delta},\quad \langle v^2\rangle_{ст}=\frac{D\omega_0^2}{\Delta},\quad \langle xv\rangle_{ст}=0,\\ &\Delta=\mathcal{E}\omega_0^2-D\frac{D-g}{D-2g},\quad g=(\mathcal{E}+2\nu)\left[\omega_0^2+\nu(\mathcal{E}+\nu)\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Видно, что в установившемся режиме корреляция между скоростью и координатой отсутствует. Этот же результат имеет место и в отсутствие включений поля $f(t)$. Очевидно, что для существования стационарных значений среднеквадратичных флуктуаций скорости и координаты необходимо потребовать $\Delta>0$. При $\frac{1}{2}(1+\alpha(t))\equiv1$, когда стохастическое поле $f(t)$ действует непрерывно, имеем $\langle x^2\rangle_{ст}=\dfrac{D}{\mathcal{E}\omega_0^2-D}$, $\langle v^2\rangle_{ст}=\dfrac{D\omega_0^2}{\mathcal{E}\omega_0^2-D}$ и $\langle xv\rangle_{ст}$=0 – известный результат, из которого следует, что среднеквадратичная устойчивость осциллятора имеет место при $D<\mathcal{E}\omega_0^2$. Импульсные включения поля f существенно перестраивают динамику системы. Происходит перестройка и фазового пространства переменных (D, $\mathcal{E}$, ω_0). Появляется дополнительная размерность, связанная с частотой ν включений поля f Обсудим структуру фазового пространства при фиксированных значениях $\mathcal{E}$

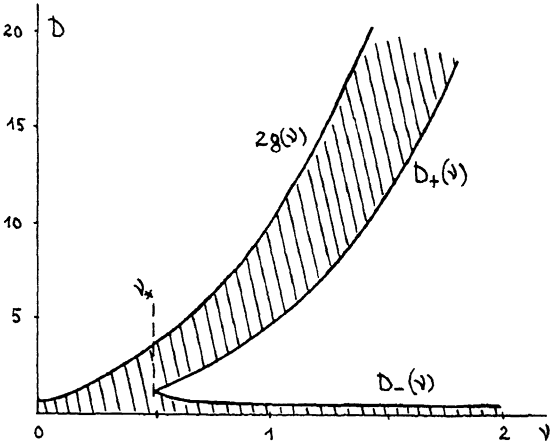

Рис. 2. Фазовая диаграмма устойчивости осциллятора в среднеквадратичном. Область устойчивости заштрихована, ν_* =0.48.

и ω_0. Из условия $\langle x^2\rangle_{ст}>0$ и $\langle v^2\rangle_{ст}>0$ имеем $0\le D<D_-$ и $D_+<D<2g$, если $\varphi(\nu)\equiv g^2-6\varepsilon\omega_0^2 g+\varepsilon^2\omega_0^4>0$ и $D<2g$, если $\varphi(\nu)<0$, где $D_\pm=D_\pm(\nu)$ корни уравнения $D^2-(g+\varepsilon\omega_0^2)D+2g\varepsilon\omega_0^2=0$. Второе условие можно выполнить только для значений ν из интервала $0\le\nu<\nu$, где $\varphi(\nu_*)=0$. В этой области допустимые значения D лежат ниже кубической параболы $2g(\nu)$, причем начинается эта парабола из точки $2\varepsilon\omega_0^2$, которая лежит выше значения $\varepsilon\omega_0^2$, отвечающего порогу неустойчивости осциллятора при отсутствии переключений. Существенно, что при $\nu>\nu_*$ на фазовой плоскости появляется две области разрешенных значений D. Функция $D_-(\nu)$ монотонно спадает с ростом ν и выходит на асимптоту $2\varepsilon\omega_0^2$. Вторая область заключена между двумя кубическими параболами $D_+(\nu)$ и $2g(\nu)$. На рис. 2 представлена фазовая диаграмма при ε=0.3, ω_0 =1.

Физически появление двух областей D связано с тем, что дихотомические включения параметрической гауссовской случайной силы сообщают осциллятору черты двухуровневой системы. Предельные параметры и свойства „уровней" можно установить, положив в (2) α =+1, α =−1 и вычислить стационарные значения $\langle x^2\rangle_{ст}$, $\langle v^2\rangle_{ст}$, $\langle xv\rangle_{ст}$. При этом получим, что состояние осциллятора, отвечающее значению α =−1 неустойчиво, а для α =+1 устойчивость имеет место при выполнении определенных условий. Динамика случайных перескоков из состояния с α =−1 в состояние с α =+1 и обратно и возникающая за счет этого диффузия приводит к тому, что из неустойчивого состояния у осциллятора появляется возможность „перескочить" в состояние более устойчивое так, что стационарный режим устанавливается благодаря „игре" перескоков с уровня на уровень. В результате этих процессов осциллятор и становится эффективно двухуровневой системой. Уровень $0 \leqslant D < D_-$ характеризует низкочастотные формы движений осциллятора. Например, в пределе очень быстрых включений $\nu \gg \omega_0, \varepsilon$ для D имеем $0 \leqslant D < 2\varepsilon\omega_0^2$. Уровень $D_+ < D < 2g$ соответствует высокочастотным формам движений. При $\nu \gg \omega_0$, ε имеем $2\nu^3 < D < 4\nu^3$.

Таким образом, проведенное рассмотрение показывает, что случайные включения случайной силы приводят к повышению среднеквадратичной устойчивости параметрического осциллятора. Другой точно решаемый пример – $\dot{x} = -ax + \dot{\alpha}(t)x$, $a > 0$ показывает, что устойчивость повышается не только по второму моменту, но и моментам более высокого порядка. Отметим также, что в реальных физических системах подобный характер действия случайных сил скорее правило, чем исключение.

Список литературы

[1] Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.

[3] Шапиро В.Е., Логинов В.М. Динамические системы при случайных воздействиях. Новосибирск: Наука, 1983. 160 с.

Тувинский комплексный
отдел СО АН СССР,
Кызыл

Поступило в Редакцию
14 февраля 1991 г.

Письма в ЖТФ, том 17, вып. 7 12 апреля 1991 г.

09

© 1991

О КОЛЕБАНИЯХ π-ВИДА В ЩЕЛЕВЫХ РЕЗОНАТОРАХ

В.П. Шестопалов, В.В. Щербак

На основе строгой математической модели определена эффективность возбуждения щелевых резонаторов дифракционной решетки в зависимости от глубины и ширины щели. Обнаружено аномальное поведение антирезонансных минимумов возбуждения для π-вида колебаний вплоть до пересечения их с резонансными максимумами и их подавлением.