

01

© 1991

МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ
СЛАБОНЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Д.М. В а в р и в, В.Б. Р я б о в

В работах [1, 2] предсказано явление существенного снижения порога возникновения хаоса по параметру нелинейности при квазипериодическом воздействии на осциллятор по сравнению со случаем его гармонического возбуждения (см., например, [3]). Эксперименты [4, 5] подтвердили возможность возникновения хаотических колебаний (СК) в квазилинейном режиме возбуждения одноимодовых систем и указали на необходимость учета этого явления при анализе динамики осцилляторов различной природы. В данном сообщении показано, что возникновение СК в квазилинейном осцилляторе сопровождается появлением новых стационарных состояний. Для определения условий их возникновения предлагается эффективная аналитическая методика.

Динамика квазилинейного осциллятора с бигармоническим внешним воздействием на частотах ω_1 и ω_2 ($\omega_1 \approx \omega_2$) описывается следующей системой укороченных уравнений [1, 2]:

$$\frac{du}{dt} = -\alpha_0 u - [\Delta + \beta(u^2 + v^2)]v + P_2 \sin \Omega t, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha_0 v + [\Delta + \beta(u^2 + v^2)]u - P_1 - P_2 \cos \Omega t,$$

где P_1 и P_2 - амплитуды внешнего воздействия; α_0 - параметр диссипации; β - параметр неизохронности; $\Omega = \omega_2 - \omega_1$; $\Delta = \omega_0 - \omega_1$; ω_0 - собственная частота осциллятора. Переменные $u(t)$, $v(t)$ связаны с амплитудой $a(t)$ и фазой $\varphi(t)$ колебаний формулами перехода от декартовой к полярной системе координат.

Как известно [3], в системе (1) в случае одночастотного воздействия ($P_2 = 0$, в дальнейшем ее будем называть невозмущенной системой) при $P_1 > P_{пор} \equiv \frac{2\alpha_0}{3} \left[\frac{2\alpha_0 \sqrt{3}}{\beta} \right]^{1/2}$ в определенном диапазоне изменения параметра Δ существуют три стационарных состояния с координатами $(u, v) = (u_S, v_S)$, $S = 1, 2, 3$: два устойчивых фокуса ($S = 1, 3$) и одно неустойчивое (седловое, $S = 2$).

При добавлении второй спектральной составляющей малой интенсивности P_2 во внешнее воздействие в окрестности стационарных

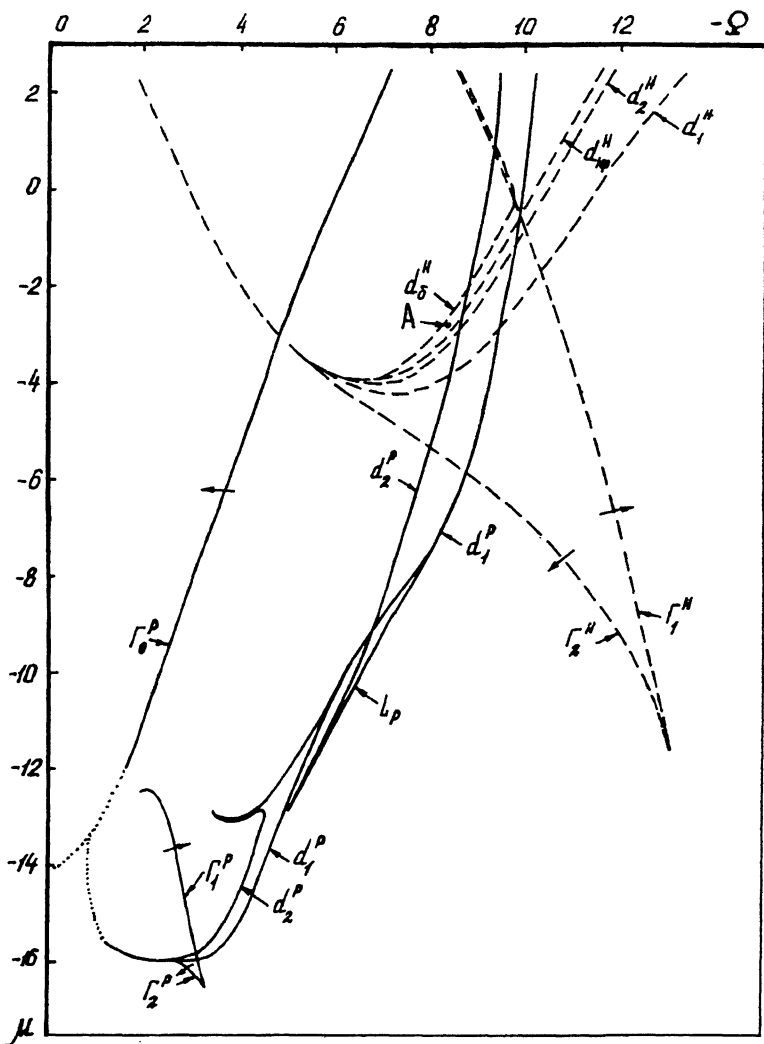


Рис. 1. $P_1 = 3.75$, $\Delta = -15.05$, $\alpha_0 = -1$.

состояний возникают периодические орбиты. Каждое из устойчивых периодических движений (аттракторов) имеет собственный бассейн притяжения, а устойчивые многообразия седловой орбиты являются сепаратрисными поверхностями. Эти аттракторы в определенном диапазоне изменения параметров P_2 и ω_2 эволюционируют независимым образом. Для полного понимания динамики системы необходимо рассматривать двулистные бифуркационные диаграммы, каждый лист которых отвечает одному из устойчивых стационарных состояний при гармоническом возбуждении осциллятора.

На рис. 1 приведена бифуркационная диаграмма режимов¹ на плоскости параметров нормированная амплитуда $\mu = 20 \operatorname{Zg}(\rho_2/\rho_1)$ - разностная частота Ω . Остальные параметры выбирались, исходя из условия существования трех стационарных состояний в невозмущенной системе. Линия Γ_0^P определяет границу существования листа, соответствующего стационарному состоянию невозмущенной системы с максимальной амплитудой. Этот лист, расположенный справа от линии Γ_0^P , будем называть резонансным. Происходящие на нем бифуркации обозначены сплошными линиями. Второй, нерезонансный лист существует во всей приведенной области параметров, а бифуркации на нем обозначаются штриховыми линиями.

При увеличении ρ_2 первый бифуркационный эффект связан с возникновением новых стационарных состояний на каждом из листьев. В результате на них образуются складки, проекции которых на рис. 1 обозначены линиями $\Gamma_{1,2}^H$ и $\Gamma_{1,2}^P$. При вариации параметров аттракторы, соответствующие различным поверхностям складок, эволюционируют независимо друг от друга. Рассмотрим, например, движение на нерезонансном листе между линиями Γ_1^H , Γ_2^H . Оказалось, что на одной из поверхностей аттрактор всегда регулярный и не претерпевает бифуркаций. На второй поверхности на линиях d_1^H , d_2^H происходят бифуркации удвоения периода биений $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ с дальнейшим образованием странного аттрактора на линии d_{xp}^H .

Таким образом, в области параметров между линиями Γ_0^P , Γ_1^H , Γ_2^H в фазовом пространстве одновременно сосуществуют три аттрактора: два, связанные с нерезонансным листом, и один - с резонансным. На рис. 2 приведены три аттрактора для параметров, соответствующих точке А на рис. 1. Здесь сосуществуют два странных и один регулярный аттрактор. Видно, что возможны и другие комбинации сосуществующих аттракторов.

Необходимо отметить, что внутри области хаоса движение на странном аттракторе становится чрезвычайно чувствительным к флуктуациям параметров. Это выражается в срыве хаотических колебаний и притяжении траектории к регулярному аттрактору нерезонансной ветви даже при малой скорости изменения управляющих параметров. Для нерезонансного листа линия, начиная с которой наблюдается указанное явление, обозначена d_8^H . Можно предположить, что в окрестности этой линии происходит резкое уменьшение бассейнов притяжения странных аттракторов.

Качественно аналогичные явления имеют место и при движении на резонансном листе, где также существует складка, проекция

¹ Бифуркационные кривые найдены численно путем анализа мультипликаторов периодического движения (см., например, [5]). При малых $|\Omega|$ расчеты связаны с чрезвычайно большими затратами машинного времени и здесь ход кривых отмечен качественно (точки на рис. 1).

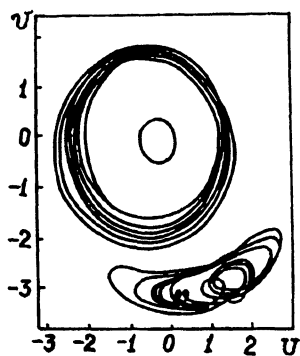


Рис. 2.

которой на плоскость μ , Ω обозначена на $\Gamma_{1,2}^{\rho}$. Отметим, что наряду с указанной складкой здесь существуют более сложные складки типа „ласточкин хвост“ (см., например, [6]), на поверхностях которых располагаются аттракторы различной тактности по отношению к T . Границы этой складки обозначены линиями L_p .

Для определения аналитических условий возникновения мультистабильных состояний запишем систему уравнений (1) относительно отклонений от стационарных состояний невозмущенной системы $x_s = u - u_s$, $y_s = v - v_s$:

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y - \beta v_s(x^2 + 3y^2) - 2\beta u_s xy - \beta y(x^2 + y^2) - \rho_2 \sin \Omega t, \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + \beta u_s(3x^2 + y^2) + 2\beta v_s xy + \beta x(x^2 + y^2) + \rho_2 \cos \Omega t,$$

где $a_{11} = -\alpha_0 - 2\beta u_s v_s$; $a_{12} = -\Delta - \beta(u_s^2 + 3v_s^2)$; $s = 1, 3$; $a_{21} = \Delta + \beta(3u_s^2 + v_s^2)$; $a_{22} = -\alpha_0 + 2\beta u_s v_s$. В (2) и далее индексы при x_s и y_s опускаются. Для анализа системы (2) воспользуемся методом гармонического баланса для колебаний на частоте Ω . Представляем x и y в виде

$$x = u_1 \cos \Omega t + u_2 \sin \Omega t; \quad y = v_1 \cos \Omega t + v_2 \sin \Omega t, \quad (3)$$

что соответствует параметрическому заданию эллипса – орбиты в фазовом пространстве. Подставляя (3) в (2) и приравнивая коэффициенты при $\sin \Omega t$ и $\cos \Omega t$, получаем систему связанных нелинейных уравнений. Для ее решения совершим преобразование поворота системы координат x, y на произвольный угол α

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Выбирая угол так, чтобы главные оси эллипса совпадали с осями координат x', y' , приходим к следующей системе уравнений относительно $\bar{x} = A_{1,2}$ и α , где $A_{1,2}$ – длины главных полуосей эллипса (3):

$$\left\{ \left[(c_{12} + c_{21})\rho + (\rho^2 - 1)\left(\Omega + \frac{\beta}{2}\rho\bar{x}\right) \right]^2 + \rho^2(c_{11} - c_{22})^2 \right\} \bar{x} - \rho_2^2(\rho - 1)^2 = 0, \quad (4)$$

$$\bar{x} = \frac{4[c_{12} + \rho c_{21} + \Omega(\rho - 1)]}{\beta(1 - \rho)[3(\rho^2 - 1) + 2\rho]},$$

где

$$c_{11} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} + (a_{11} - a_{22}) \cos 2\alpha + (a_{12} + a_{21}) \sin 2\alpha],$$

$$c_{12} = \frac{1}{2} [a_{12} - a_{21} - (a_{11} - a_{22}) \sin 2\alpha + (a_{12} + a_{21}) \cos 2\alpha],$$

$$c_{21} = \frac{1}{2} [a_{21} - a_{12} - (a_{11} - a_{22}) \sin 2\alpha + (a_{12} + a_{21}) \cos 2\alpha],$$

$$c_{22} = \frac{1}{2} [a_{11} + a_{22} - (a_{11} - a_{22}) \cos 2\alpha - (a_{12} + a_{21}) \sin 2\alpha],$$

$$\rho = c_{22}/c_{11}; \quad A_1 = \rho A_2.$$

Границы существования новых стационарных состояний определяются из условия наличия более чем одного корня по α , соответствующего устойчивой орбите. Результаты расчетов для нерезонансного листа совпадают с графической точностью с результатами численных расчетов линий $\Gamma_{1,2}^H$. Столь хорошее совпадение обусловлено тем, что колебания на нерезонансном листе слабо нелинейны, поэтому высшие гармоники по Ω , которые не учитываются в (3), не оказывают заметного влияния. Однако это не выполняется для резонансной ветви, что не позволяет получить для нее аналогичное количественное совпадение.

Авторы признательны А.Б. Белогорцеву за расчет бифуркационной диаграммы.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Miles J. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA: Phys. Sci. 1984. V. 81. N 12. P. 3919-3923.
- [2] Белогорцев А.Б., Ваврив Д.М., Третьяков О.А. // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. В. 4. С. 1316-1321.
- [3] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. (Springer, New York, N.Y., 1986).
- [4] Ваврив Д.М., Третьяков О.А., Чернышов И.Ю. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 8. С. 1698-1706.
- [5] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [6] Као У.Н., Ханг J.C., Гоу Y.S. // Phys. Lett. A. 1988. V. 131. N 2. P. 91-97.

Поступило в Редакцию
4 апреля 1991 г.