Письма в ЖТФ, том 17, вып. 12 26 июня 1991 г.

01; 04

© 1991

ОДНОМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПЛАЗМЫ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

М.Б. Гавриков, Л.С. Соловьев

Проблемы равновесия и устойчивости плазмы обычно исследуются в рамках одножидкостной МГД [1], а динамика плазменных конфигураций с различными температурами электронного и ионного газов – в рамках кинетического подхода [2]. Результаты, получаемые обоими методами, в области своей применимости, как правило, следуют из двухжидкостной релятивистской электромагнитной газодинамики РЭМГД [3–5]. Использование самосогласованной системы уравнений РЭМГД представляется наиболее адекватным для широкого круга задач динамики плазмы и позволяет получать новые результаты также и в нерелятивистском приближении [6].

В настоящей работе математический аппарат двухжидкостной ЭМГД применяется для исследования одномерной динамики нерелятивистской бездиссипативной плазмы в плоской и цилиндрической геометрии. При этом существуют решения, в которых постоянно отношение температур $T_+ / T_- = const$, поперечные скорости совпадают $v_+ = v_-$, а продольные связаны соотношением $m_+ V_+ + m_- V_- = 0$, так что сохраняется положение центра масс. Такие решения удовлетворяют квазиодножидкостной системе уравнений. Для симметричных движений слоя и цилиндра с продольным током получены точные автомодельные решения динамических задач, описывающие коллапс слоя и нелинейные радиальные колебания цилиндра. При коллапсе слоя происходит ускорение ионов и электронов в противоположных направлениях и растет полный ток, а при колебаниях цилиндра продольные скорости и полный ток остаются постоянными. Тип решения определяется показателм адиабаты γ, согласно [5], заключенным в пределах $1 \leqslant \gamma \leqslant 2$.

1. Основные уравнения ЭМГД. Полную систему уравнений нерелятивистской бездиссипативной двухжидкостной электромагнитной газодинамики для квазинейтральной плазмы, как это следует из [3–6], можно представить в виде

$$\operatorname{div} E = 4\pi e(n_+ - n_-), \quad \operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} B = \frac{4\pi e}{c} n u, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot} E, \tag{1}$$

$$m_\pm \frac{dv_\pm}{dt} = -\frac{\nabla P_\pm}{n} \pm e\left(E + \frac{1}{c}[v_\pm B]\right), \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n_\pm v_\pm = 0 \quad \frac{d}{dt} P_\pm n^{-\gamma} = 0. \tag{2}$$

Здесь $e_\pm = \pm e$, $u = v_+ - v_-$ – токовая скорость, (1) – уравнения Максвелла в пренебрежении током смещения, газодинамические уравнения (2) составляют двойной набор уравнений для ионного и электронного газов. Разность концентраций $\delta n = n_+ - n_-$ имеет релятивистский порядок малости и определяется из первого уравнения (1).

2. Одномерные движения. В случае одномерной задачи, когда в криволинейных координатах x^i, $dl^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ $d/dx^2 = d/dx^3 = 0$, в системе центра масс продольного движения $m_+V_+ + m_-V_- = 0$ существуют решения системы (1)-(2), в которых совпадают поперечные скорости $v_+^1 = v_-^1$ и остается постоянным отношение давлений $p_+/p_- = const$. Соответствующие одномерные движения плазмы описываются системой семи квазиодножидкостных уравнений

$$\Delta A = -\frac{4\pi e}{c} nu, \quad m_\Sigma \frac{dv}{dt} = -\frac{\nabla p_\Sigma}{dt} + \frac{e}{c}[uB] + \frac{\bar{m}u_2^2}{2g^2}\nabla g,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{m}u + \frac{e}{c}A\right)_{2,3} = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n v = 0, \quad \frac{d}{dt} p_\Sigma n^{-\gamma} = 0, \tag{3}$$

где $B = \operatorname{rot} A$, $\bar{m} = m_+ m_- / m_\Sigma$, $m_\Sigma = m_+ + m_-$, $p_\Sigma = p_+ + p_-$, $g = |g_{ik}|$. Электрическое поле E выражается через магнитное поле B , градиенты давлений $p_\pm$ и векторный потенциал A формулой

$$E = \frac{m_+ - m_-}{m_\Sigma c}[uB] - \frac{1}{enm_\Sigma}\nabla\left(m_+p_- - m_-p_+\right) + \frac{m_+ - m_-}{2em_\Sigma g^2}\bar{m}u_2^2\nabla g - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}. \tag{4}$$

На свободной границе плазмы с вакуумом $x^1 = a$ должно выполняться граничное условие $p_\Sigma(a) = 0$. Продольное электрическое поле определяется векторным потенциалом $E_\parallel = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ и, соответственно, $\operatorname{div} E_\parallel = 0$. В общем случае $u^1 = B^1 = A_\perp = 0$, так что u , B и A имеют по две продольные компоненты. Условием автономности ограниченной плазменной конфигурации является сохранение полного тока.

3. Симметричные движения токового слоя. Пусть ток течет вдоль оси y , а магнитное поле направлено по оси z , тогда $u = u_z$, $B = B_y$, $A = A_z$, $v = v_x$ и система (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{4\pi e}{c} nu, \quad m_\Sigma \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{n}\nabla p_\Sigma + \frac{e}{c} u \frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{m}u + \frac{e}{c}A\right) = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} nv = 0, \quad \frac{d}{dt} p_\Sigma n^{-\gamma} = 0. \tag{3a}$$

Эта система содержит пять уравнений и имеет точное нелинейное решение, описывающее симметричные гомогенные движения однородного токового слоя $-a \le x \le a$, в котором

$$v=\frac{\dot a}{a}x,\ u=u_0\frac{a_0}{a},\ n=n_0\frac{a_0}{a},\ p_\Sigma=p_\Sigma^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^\gamma\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\ B=\frac{4\pi e}{c}nux,$$
$$E_z=-\frac{\bar m u\dot a}{ea}\left(1+\varkappa_\Sigma^2x^2\right),\ E_x=\frac{2x}{em_\Sigma na^2}\left\{\left(m_+p_-^0-m_-p_+^0\right)\left(\frac{a_0}{a}\right)^\gamma-\left(m_+-m_-\right)p_\Sigma^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right\},\tag{5}$$

где $\varkappa_\Sigma^2=4\pi e^2n/\bar m c^2$, $p_\Sigma^0=B_0^2(a_0)/8\pi$, а движение границы $x=a(t)$ определяется уравнением

$$\ddot a=\frac{B_0^2(a_0)}{4\pi m_\Sigma n_0a_0}\left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^\gamma-\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right].\tag{6}$$

В процессе сжатия слоя происходит однородное продольное ускорение электронов и ионов под действием постоянной составляющей силы Лоренца $m_\pm\dot V_z^\pm=\pm e(E_z+v_xB_y/c)=\mp mua/a$. При этом сохраняется положение центра масс $x=0$, $z=z_0$ и растет полный ток $J=J_0a_0/a$. Инкремент развития неустойчивости определяется альфвеновской скоростью $\delta=\sqrt{2-\gamma}\,B_0/\sqrt{4\pi m_\Sigma n_0}\,a_0$.

Интеграл уравнения (6) представляет потенциальное движение границ слоя $x=\pm a(t)$:

$$\frac{\dot a^2}{2}+U(a)=\frac{\dot a_0^2}{2},\quad U(a)=\frac{1}{2}a_0^2u_0^2\varkappa_0^2\left\{\frac{1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\gamma-1}-1\right]-\frac{a_0}{a}+1\right\},\tag{7}$$

где $\varkappa_0^2=8\pi e^2n_0/m_\Sigma c^2$.

Потенциал $U(a)$ приведен на рис. 1, из которого видно, что при $a\to0$, $\dot a\to-\infty$. Невозможность превышения скорости света в релятивистской постановке задачи ограничивает коллапс величиной $a/a_0\sim v_0/c$.

Плотность заряда, определяющаяся уравнением $4\pi\rho_e=\partial E_x/\partial x$, однородна и зависит от времени. Соответственно, в процессе коллапса растет внутренний заряд, и, как это следует из закона сохранения полного заряда, увеличивается поверхностный заряд противоположного знака.

4. Радиальные пульсации плазменного цилиндра. В случае плазменного цилиндра с продольным током $v=v_r$, $u=u_z$, $B=B_\varphi$, $A=A_z$, система (3) сводится к системе пяти квазиодножидкостных уравнений

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial A}{\partial r}=-\frac{4\pi e}{c}nu,\quad m_\Sigma\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{n}\nabla p_\Sigma+\frac{e}{c}\frac{\partial A}{\partial r},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar mu+\frac{e}{c}A\right)=0,\quad \frac{\partial n}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rnv=0,\ \frac{d}{dt}p_\Sigma n^{-\gamma}=0.\tag{3б}$$

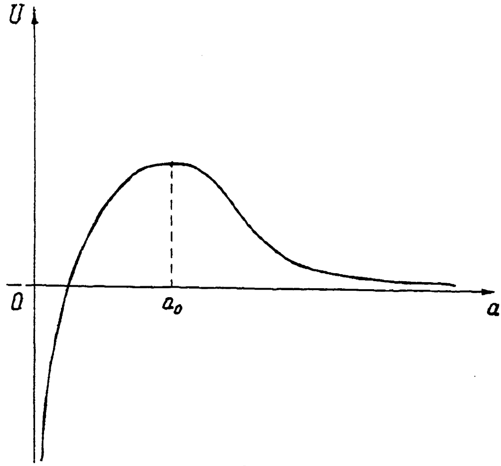

Рис. 1.

Если в равновесном состоянии выполняется условие $p'_\Sigma(r)/rn(r) = const$, эта система имеет точное решение, описывающее гомогенные пульсации цилиндра

$$v = \dot{a}\xi, \ u = u_0(\xi), \ A = A_0(\xi), \ n = \frac{a_0^2}{a^2} n_0(\xi), \ p_\Sigma = \left(\frac{a_0}{a}\right) p_\Sigma^0(\xi), \ B = B_0(\xi)\frac{a_0}{a},$$

$$E_z = -\frac{1}{c} v B, \quad E_r = \frac{1}{e m_\Sigma n_0 a}\left\{(m_+ - m_-)p'_{0\Sigma}(\xi) - \left(\frac{a_0}{a}\right)^{2\gamma-2}\left[m_+ p'_{0-}(\xi) - m_- p'_{0+}(\xi)\right]\right\}, \tag{8}$$

где $\xi = r/a$, а движение границы $r = a(t)$ определяется уравнением

$$\ddot{a} = -\frac{p'_{0\Sigma}(\xi)}{m_\Sigma n_0(\xi) a_0 \xi}\left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^{2\gamma-1} - \frac{a_0}{a}\right], \quad p'_{0\Sigma}(\xi) = -\frac{B_0(\xi)}{4\pi\xi}\frac{d}{d\xi}\xi B_0(\xi). \tag{9}$$

При этом продольное электрическое поле выражается той же формулой $E_z = -v_r B_\varphi / c$, что и в классической МГД, полный ток не изменяется $dJ/dt = 0$ и отсутствует продольное ускорение заряженных частиц $dV_t/dt = 0$. Решение (8)–(9) отличается от решения рассматриваемой задачи в рамках МГД [7, 8] только новым выражением для радиального электрического поля. Квадрат частоты малых колебаний, согласно (9), равен $\omega^2 = (\gamma - 1)(rB)'B/2\pi m_\Sigma n r^2 = const$.

В частном случае однородного тока $u = u_0$, $n = n_0 a_0^2/a^2$ имеем

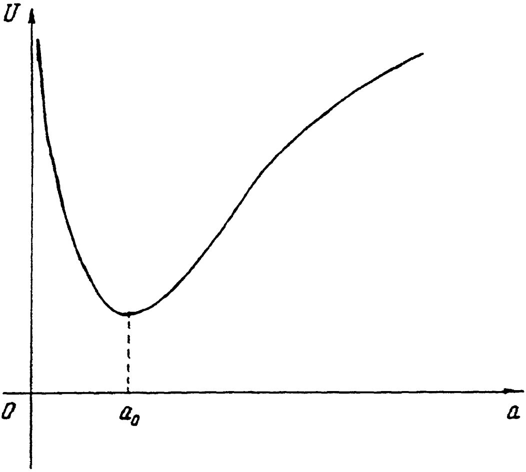

Рис. 2.

$$B=\frac{2\pi e}{c}nur, \quad p=p_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{2\gamma}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right), \quad \ddot{a}=\frac{1}{4}\varkappa_0^2u_0^2a_0\left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^{2\gamma-1}-\frac{a_0}{a}\right],$$

$$E_r=-\frac{2r}{em_\Sigma n_0a_0^2}\left[\left(m_+-m_-\right)p_\Sigma^0\frac{a_0}{a}-\left(m_+p_0^- -m_-p_0^+\right)\left(\frac{a_0}{a}\right)^{2\gamma-1}\right]. \tag{10}$$

Интегрирование уравнения для $a(t)$, дает выражение для потенциала, описывающего нелинейные колебания границы цилиндра $r = a(t)$,

$$\frac{\dot{a}^2}{2}+U(a)=0, \quad U(a)=-\frac{1}{4}\varkappa_0^2u^2a_0^2\left\{\ln\frac{a_{1,2}}{a}-\frac{1}{2\gamma-2}\left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^{2\gamma-2}-\left(\frac{a_0}{a_{1,2}}\right)^{2\gamma-2}\right]\right\}, \tag{11}$$

где a_1 и a_2 – максимальный и минимальный радиусы границы $a(t)$, связанные соотношением $(a_0/a_1)^{2\gamma-2}-(a_0/a_2)^{2\gamma-2}=\ln(a_2/a_1)^{2\gamma-2}$. Потенциальная яма $U(a)$ изображена на рис. 2.

Аналогично слою, при сохранении полного заряда, в процессе колебаний цилиндра изменяется как внутренний, так и поверхностный заряд.

В заключение отметим, что, в случае равных масс $m_+=m_-$ и одинаковых температур $T_+=T_-$, релятивистские уравнения двухжидкостной РЭМГД для одномерных движений также сводятся к системе квазиоднажидкостных уравнений.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[2] Девидсон Р. Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978.
[3] Соловьев Л.С., Гурович В.Ц. // Физика плазмы. 1986. Т. 12. С. 845.
[4] Гурович В.Ц., Соловьев Л.С. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1144.
[5] Гавриков М.Б., Соловьев Л.С. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 106.
[6] Морозов А.И., Соловьев Л.С. В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 8. Под ред. М.А. Леонтовича. Атомиздат, 1974. С. 3.
[7] Куликовский А.Г. // ДАН СССР. 1957. № 114. С. 984.
[8] Соловьев Л.С. // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 1045.

Поступило в Редакцию
13 апреля 1991 г.