Письма в ЖТФ, том 17, вып. 13 12 июля 1991 г.

04

ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА МЕЛКОМАСШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ПОТОКАХ ПЛАЗМЫ С ЭФФЕКТОМ ХОЛЛА

Л.М. Алексеева

При наличии эффекта Холла потоки плазмы в экспериментальных установках часто оказываются нестабильными. Численное моделирование с учетом эффекта Холла потоков, направленных поперек магнитного поля, обнаруживает внезапно и быстро развивающиеся мелкомасштабные неоднородности [1]. Это ставит вопрос о влиянии эффекта Холла на устойчивость плазменных течений.

Известно, что в отсутствии диссипации система магнитогидродинамических уравнений с учетом эффекта Холла, вообще говоря, неэволюционна [2, 1]: малым по величине изменениям начальных данных при $t=0$ могут соответствовать немалые изменения решений системы при $t>0$ (в ограниченной области изменения t) [3]. Очевидно, неэволюционность уравнений – факт более сильный, чем обычная неустойчивость, для которой (в линейном приближении) достаточно существования какого-либо возмущения с амплитудой, неограниченно возрастающей при $t \to \infty$; неэволюционность же требует наличия сколь угодно большого инкремента собственной моды. Согласно интерпретации, данной в [1], неэволюционность системы уравнений при $\nu=0$ и отвечает за неустойчивость, проявляющуюся в расчетах тем сильнее, чем меньше магнитная вязкость ν и больше параметр обмена ξ, непосредственно характеризующий величину Холл-эффекта.

Если и в самом деле быстрый рост мелкомасштабных неоднородностей, обнаруженный в численных экспериментах, обусловлен неэволюционностью используемых уравнений, то он не является физическим процессом, и его присутствие отражает лишь несовершенство уравнений (грубость предположений, сделанных при выводе и пр.).

Результаты работ [4–6] указывают обратное. В этих работах при $\nu \sim \xi$ изучались приэлектродные возмущения изомагнитного потока, который, как известно [2, 1], не имеет „неэволюционных" (со сколь угодно большим инкрементом) возмущений в случае $\nu=0$. Тем не менее выявленные там возмущения потока оказались очень близки по своим свойствам к быстрорастущим мелкомасштабным неоднородностям, характерным для численных решений (в частности, они проявляют себя тем сильнее, чем меньше ν и больше ξ). Это дает возможность говорить об их физичности. Одновременно отсюда следует также, что результаты, полученные для простого течения, которым является изомагнитный поток, могут представлять свойства течений более широкого класса, изучаемых путем численного моделирования.

С учетом сказанного, здесь путем отыскания собственных мод задачи о возмущениях изомагнитного потока будет исследована совокупность мелкомасштабных неоднородностей, характерных для плазмы с эффектом Холла, рассмотрены их специфические черты и обсуждена устойчивость ее течений в линейном приближении.

Пусть плазма плотности ρ течет в узком канале с плавно меняющимся сечением $s(x)$, характерное значение которого $\delta \ll 1$; ось x декартовой системы координат (x, y, z) направлена вдоль канала, все величины не зависят от z, магнитное поле $\vec{H}$ имеет только z-составляющую, скорость $\vec{v}$, электрическое поле и, соответственно, ток $\vec{j}$ перпендикулярны $\vec{H}$ (будем пользоваться нормировкой величин, использованной в [1]; длина канала принята за единицу). Рассмотрим поток вида

$$w = w_0(x,y) + \tilde{w}(x,y,t).$$

Здесь w – любая компонента вектора $\vec{V} = (\rho, v_x, v_y, H)$; индекс 0 относится к изначально заданному распределению величин, которое соответствует стационарному изомагнитному $(H_0/\rho_0 \equiv 1)$ изобернуллиевому потоку [7], тильдой отмечено возмущение; предполагается, что $|\tilde{V}| \ll |\vec{V}_0|$.

Рассмотрим изотермическую разреженную $(D \equiv \beta/2 \ll 1$, где β – отношение газового давления к магнитному) плазму. Пусть параметры задачи связаны с малым параметром D соотношениями порядков

$$\nu \sim \xi \sim D^{\alpha}, \qquad \delta \sim D^{\lambda}, \tag{1}$$

где числа α и λ удовлетворяют условиям

$$1 - \lambda < \alpha < 1/2 < \lambda \leq 1. \tag{2}$$

При этом система магнитогидродинамических уравнений с учетом эффекта Холла [1] может быть сведена к краевой задаче для возмущения $\tilde{\rho}$ плотности ρ [4–6] [1]:

$$\tilde{\rho}''_{\tau\tau} = \tilde{\rho}''_{qq} + \tilde{\rho}'_q; \quad \left[\tilde{\rho}'_q + \tilde{\rho}\right]_{q_i} = 0, \qquad (i = 1,2) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\tilde{\rho}\big|_{\tau=0} = N(x,q); \qquad \tilde{\rho}'_{\tau}\big|_{\tau=0} = M(x,q). \tag{4}$$

Здесь $\tau = \gamma(x)\sqrt{D}\,t$, где $\gamma(x) = -\xi\rho_0'(\nu D)^{-1}$ (известно, что в узких каналах с плавным профилем ρ_0 есть функция одной перемен-

---

[1] Отметим (см. [4, 6]), что при принятых условиях (1), (2) $\tilde{j}_x = -(\nu\rho_0)^{-1}\xi\rho_0'\tilde{\rho}$.

ной x), $q = \gamma(y-R_1(x))$, причем $y = R_1(x)$ определяет профиль анода (ему соответствует $q = q_1 = 0$; катоду $q = q_2 = \gamma S = S(x)$; функции N и M предполагаются не слишком быстро изменяющимися по переменным x и y: для них $\partial/\partial x \sim D^{\lambda-1}$, $\partial/\partial y \sim D^{-1}$.

Отыскивая элементарные решения задачи (3) в виде $\Phi(\tau)U(q)$, приходим к задаче Штурма – Лиувилля на собственные значения Λ для $\Psi(q) = U(q)\cdot E$, где $E \equiv exp(q/2)$:

$$\Psi'' + (\Lambda - 1/4)\Psi = 0, \quad [\Psi' + \Psi/2]_{q_i} = 0. \tag{5}$$

Ортонормированная система ее собственных функций

$$\Psi_0(q) = a_0 E^{-1}, \quad a_0 = [1 - exp(-S)]^{-1/2}; \quad \Lambda_0 = 0,$$
$$\Psi_m(q) = (2/S)^{1/2} cos(L_m q - Q_m); \quad \Lambda_m = L_m^2 + 1/4; \quad m \geq 1; \tag{6}$$

(здесь $L_m = \pi m / S$, а Q_m – величина, определяемая соотношениями $sin\, Q_m = (2\sqrt{\Lambda_m})^{-1}$, $cos\, Q_m = -L_m / \sqrt{\Lambda_m}$) позволяет записать решение задачи (3), (4) в виде

$$\tilde{\rho} = E^{-1}\Big\{(M_0\tau + N_0)\Psi_0(q) + \sum_{m=1}^{\infty}(M_m sin\, \omega_m\tau +$$
$$+ N_m cos\, \omega_m\tau)\, \Psi_m(q);$$
$$M_0 = a_0\int_0^S M dq; \quad N_0 = a_0\int_0^S N dq; \quad \omega_m = \sqrt{\Lambda_m}; \tag{7}$$

$$M_m = \omega_m^{-1}\int_0^S (ME)\Psi_m dq; \quad N_m = \int_0^S (NE)\Psi_m dq. \tag{8}$$

Пространственное распределение нулевой моды возмущения $\tilde{\rho}$ имеет вид прианодного скачка (ПАС) $P(q) = exp(-q)$. Если в начальный момент интеграл от $\partial\tilde{\rho}/\partial\tau$ по какому-либо сечению канала отличен от нуля, то указанная мода усиливается со временем. В остальных случаях начальные возмущения M и N могут создать лишь суперпозицию стационарного ПАС и набора гармонических колебаний, т.е. течение оказывается устойчивым.

Если величина ПАС определяется только интегралами от M и N по сечению, то амплитуда колебаний может очень сильно зависеть от распределения M и N в этом сечении. Действительно, при достаточно больших S (случай, который мы и будем рассматривать) если возмущение затрагивает катодную часть канала (где велик весовой множитель E), M_m и N_m окажутся большими. При этом, как видно из структуры выражения (7), особенно сильным возмущение будет в анодной части канала.

Если же начальные возмущения сосредоточены у анода, то амплитуды M_m и N_m будут невелики и значительных колебаний не будет. Таким образом, анодная и катодная части канала при большом S демонстрируют качественно разную реакцию на начальные возмущения.

Положим для простоты все $M_m=0$ и допустим, что среди $|N_m|$ есть $|N_m|> max\ (|N|\ ,\ |N_0|\ )$. Рассмотрим подробнее эволюцию возмущения от $t=0$ вплоть до времени, когда произойдет значительное рассогласование фаз низших, наиболее сильных гармоник. Отбросим высшие несущественные члены ряда (7). Тогда

$$\tilde{\rho} \approx E^{-1}\left\{N_0 \Psi_0 + \sum_{m=1}^{m_*} N_m \Psi_m \cos\omega_m \tau\right\}.$$

Соответственно, при $\tau=0$

$$N \approx N_0 P(q) + E^{-1}\sum_{m=1}^{m_*} N_m \Psi_m. \tag{9}$$

Время τ_{*k} достижения определенной фиксированной разности фаз (например, πk, где $k>0$ – произвольное число) между гармониками $m=1$ и $m=m_*$ тем больше, чем больше S. Когда S велико, τ_{*k} может заметно превосходить (4π)–период колебания низших гармоник. Поэтому

$$\tilde{\rho}\Big|_{\tau\ll\tau_{*k}} \approx E^{-1}\left\{N_0\Psi_0 + \cos(\tau/2)\sum_{m=1}^{m_*} N_m\Psi_m\right\},$$

или, с учетом (9)

$$\tilde{\rho}\Big|_{\tau\ll\tau_{*k}} \approx N_0 P(q)\left[1-\cos(\tau/2)\right] + N(q)\cos(\tau/2). \tag{10}$$

Формула (10) дает обобщение режима пульсирующего ПАС, выявленнго в [4]. При $\tau \geq \tau_{*k}$ этот режим гармонических колебаний с умеренной $(\sim max(|N|,\ |N_0|\ )$ амплитудой начинает „забиваться" беспорядочно флюктуациями со все возрастающей амплитудой, поскольку в процесс рассогласования фаз включаются гармоники со все меньшим m и, соответственно, бо́льшей амплитудой N_m

Таким образом, появление быстро растущих мелкомасштабных неоднородностей происходит в режиме работы канала, когда S (отношение толщины канала $s(x)$ к толщине $\gamma^{-1}(x)$ прианодного скачка) велико. „Взрыв флюктуаций" связан с рассогласованием фаз отдельных гармоник начального возмущения, затрагивающего катодную часть канала.

Список литературы

[1] Брушлинский К.В., Морозов А.И. // Вопросы теории плазмы. В. 8. М.: Атомиздат, 1974. С. 88-163.

[2] Брушлинский К.В., Морозов А.И. // Прикл. мат. мех. 1968. Т. 32. В. 5. С. 957-965.

[3] Гельфанд И.М. // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. В. 2(86). С. 87-158.

[4] Алексеева Л.М. Течения плазмы при наличии эффекта Холла. Препринт НИИЯФ МГУ № 88 - 38/59. М., 1988. 42 с.

[5] Алексеева Л.М. // ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 3. С. 567-571.

[6] Алексеева Л.М. // ЖТФ. 1991.

[7] Морозов А.И., Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы. В. 8. М.: Атомиздат, 1974. С. 3-87.

Научно-исследовательский
институт ядерной физики
Московского
государственного
университета им. М.В. Ломоносова

Поступило в Редакцию
2 мая 1991 г.