

01:05

© 1991

ИНДУЦИРОВАННЫЙ ШУМОМ ПЕРЕХОД  
В МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

В.С. А н и щ е н к о, А.Б. Н е й м а н

Влияние внешнего шума на нелинейные динамические системы приводит к эффектам двух типов: возникновению новых режимов, отсутствующих в невозмущенной системе (так называемые индуцированные шумом переходы) [1] и к сдвигу бифуркационной диаграммы системы (наличие шума качественно эквивалентно изменению управляющего параметра системы) [1, 2].<sup>1</sup> Для одномерных систем эффекты первого типа возможны в случае мультипликативного шумового возмущения [1]. В квазигиперболических системах  $N \geq 3$  индуцированные шумом переходы возможны и в случае аддитивного шума, вследствие разрушения под действием возмущений сепаратрисных гиперповерхностей, разделяющих в фазовом пространстве системы области с различными типами движений [3, 4].

Для изучения влияния шума на режимы динамического хаоса весьма удобной представляется модель Лоренца. Во-первых, здесь возможно корректное введение ланжевеновских источников в динамические уравнения системы [5, 6]. Во-вторых, для модели Лоренца, возмущаемой белым шумом, доказано свойство эргодичности [7]. И, в-третьих, в пространстве управляющих параметров этой модели реализуется фазовый переход „аттрактор-Лоренца - квазиаттрактор” [8], что позволяет на примере одной системы исследовать влияние шума на различные хаотические режимы [9].

Влияние внешнего шума на хаотические режимы модели Лоренца рассматривалось в работах [10-11]. Индуцированный шумом переход в области регулярных режимов движения рассматривался в [12].

В настоящем сообщении исследуется индуцированный шумом переход в области существования квазиаттрактора для значений параметров  $\sigma = 10$ ,  $r = 210$ ,  $b = 8/3$ . Стохастические дифференциальные уравнения системы Лоренца записываются в виде

$$\begin{aligned} dX/dt &= -\sigma X + \sigma Y + \xi_1(t), & dY/dt &= -Y + rX - XZ + \xi_2(t), \\ dZ/dt &= -bZ + XY + \xi_3(t), & \langle \xi_i(t) \xi_j(t+\tau) \rangle &= \delta_{ij} D \delta(\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup> При этом возможны эффекты изменения мелкомасштабной структуры бифуркационной диаграммы: например, ограничение числа бифуркаций удвоения в каскаде Фейгенбаума.

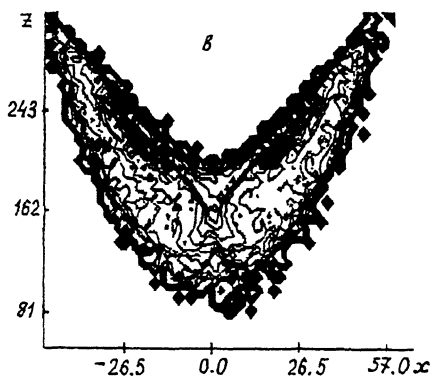
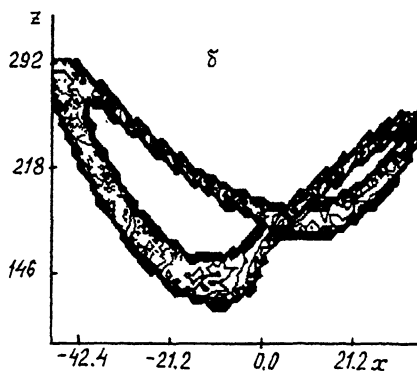
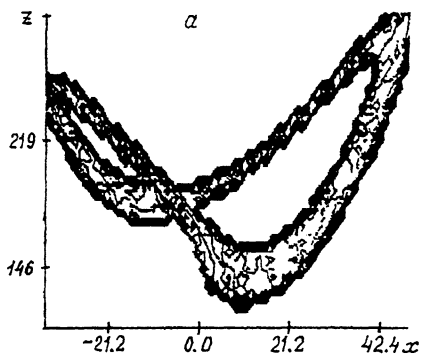


Рис. 1. Изолинии двумерной стационарной плотности вероятности  $\rho(x, z)$ : а -  $\mathcal{D}=0$ ,  $X_0=40.0$ ,  $Y_0=1.0$ ,  $Z_0=300.0$ ; б -  $\mathcal{D}=0$ ,  $X_0=-40.0$ ,  $Y_0=1.0$ ,  $Z_0=300.0$ ; в -  $\mathcal{D}=1.0$ ,  $X_0=40.0$ ,  $Y_0=1.0$ ,  $Z_0=300.0$ .

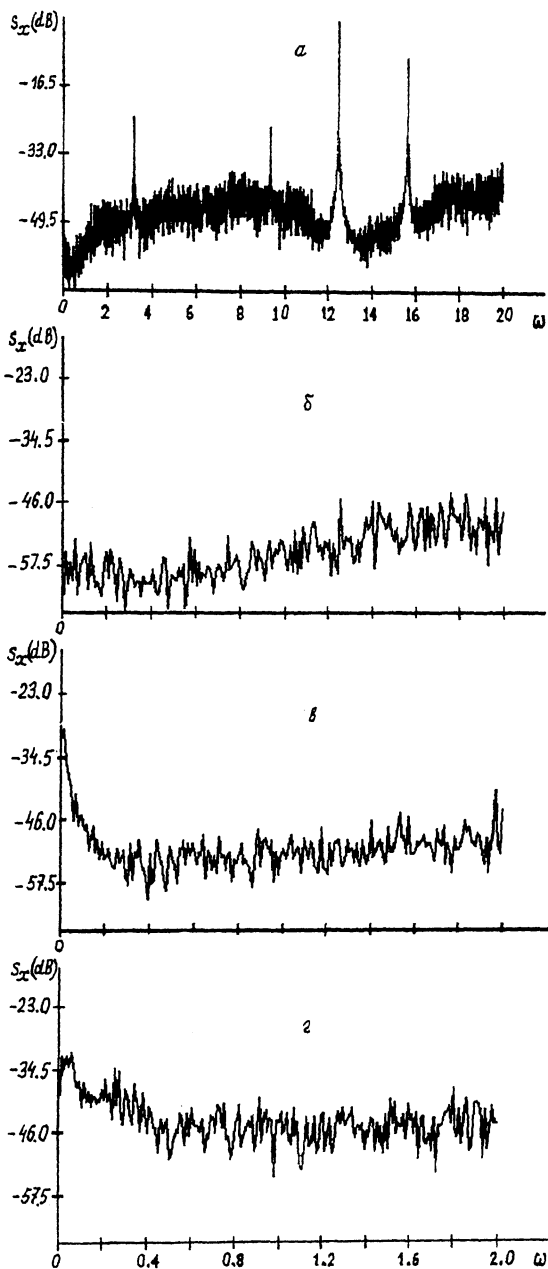


Рис. 2. Спектр мощности  $S_x(\omega)$  системы (1): а - общий вид спектра при  $\mathcal{D} = 0$ ; б-г - низкочастотная область:  $\mathcal{D} = 0, 0.2$  и  $0.5$  соответственно.

На рис. 1 показаны изолинии двумерной стационарной плотности вероятности  $P(X, Z)$ , полученные численным интегрированием системы (1) методом [13]: в отсутствие шума  $D=0$  (рис. 1, а, б) и при наличии шума интенсивности  $D=1.0$  (рис. 1, в). В отсутствие шума для различных начальных условий в системе реализуются два симметричных аттрактора (рис. 1, а, б). При  $D \neq 0$  анализ структуры плотности вероятности показывает, что шум индуцирует объединение двух симметричных аттракторов в единое хаотическое множество. При небольшой интенсивности шума фазовая траектория продолжительное время находится на каждом из аттракторов и совершает быстрые переходы между ними. Таким образом, в системе реализуется перемежаемость типа „хаос-хаос“, индуцированная внешним шумом. Для подтверждения вывода о наличии перемежаемости рассчитаем спектр мощности процесса  $S_X(\omega)$ . На рис. 2, а показан общий вид спектра мощности при отсутствии шума. Низкочастотная область показана на рис. 2, б. При наличии внешнего аддитивного шума спектр мощности эволюционирует в область низких частот, о чем свидетельствует рис. 2, в ( $D=0.2$ ). Появление низкочастотной составляющей в спектре мощности обусловлено наличием в процессе двух характерных временных масштабов: первого, связанного с продолжительным нахождением фазовой траектории на каждом из симметричных аттракторов и второго, связанного с переходами между ними. Среднее время  $T_S$  нахождения траектории на каждом из объединившихся аттракторов связано с полушириной низкочастотной спектральной составляющей  $\Delta\Omega$  очевидным соотношением  $T_S = \alpha 2\pi / \Delta\Omega$ , где  $\alpha$  – некоторый коэффициент пропорциональности. При возрастании интенсивности шума среднее время нахождения фазовой траектории на каждом из объединившихся аттракторов сокращается:  $T_S \sim \exp(\beta/D)$ , о чем свидетельствует выравнивание низкочастотной области спектра мощности (рис. 2, г).

Таким образом, в системе Лоренца в области значений параметров, отвечающей квазиаттрактору, реализуется индуцированный внешним шумом переход. В результате в системе имеет место явление взаимодействия аттракторов в виде перемежаемости типа „хаос-хаос“ [14]. Отметим, что указанный эффект сохраняется при мультипликативном шумовом воздействии, а также в случае, когда источники  $\xi_i(t)$  имеют конечное время корреляции [9].

#### С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 397 с.
- [2] Анищенко В.С., Сафонова М.А. // ЖТФ. 1988. Т. 58. № 4. С. 641–651.
- [3] Анищенко В.С., Сафонова М.А. // Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12. В. 12. С. 740–744.

- [4] Анищенко В.С., Сафонова М.А., Тучин В.В. // Квантовая электроника. 1988. Т. 15. № 9. С. 1885-1894.
- [5] Волновые и флуктуационные процессы в лазерах / Под ред. Ю.Л. Климонтовича. М.: Наука. 1974.
- [6] Асташкина Е.В., Хоф Ю.М. // Вестник МГУ. Сер. Физика. Астрономия. 1980. Т. 21. С. 67.
- [7] I t o Н.М. // J. Stat. Phys. 1984. V. 35. N 1/2. P. 151-158.
- [8] Быков В.В., Шильников А.Л. О границах существования аттрактора Лоренца. Методы качественной теории и теории бифуркаций / Под ред. Л.П. Шильникова. Горький: ГГУ, 1989. С. 151-159.
- [9] Анищенко В.С., Нейман А.Б. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. В. 7. С. 21-25.
- [10] Накамура К. // Prog. Theor. Phys. 1977. V. 57. N 6. P. 1874-1885.
- [11] Накамура К. // Prog. Theor. Phys. V. 59. N 1. P. 64-75.
- [12] Асташкина Е.В., Михайлов А.С., Толстопятенко А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 8. С. 1035-1037.
- [13] Никитин Н.Н., Разевиг В.Д. // ЖВМ. 1978. Т. 18. № 1. С. 106-117.
- [14] Анищенко В.С., Нейман А.Б. // Письма в ЖТФ. 1987. В. 17. С. 1063-1066.

Поступило в Редакцию  
15 июня 1991 г.