

01; 03

© 1991

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДЛЯ СТИМУЛИРОВАНИЯ ДИФфуЗИОННОГО ПОТОКА ЗАРЯЖЕННОЙ ПРИМЕСИ

В.А. К а ш е е в, П.П. П о л у э к т о в

Вопрос об изменении скорости переноса вещества в среде при воздействии внешнего периодического поля обсуждается достаточно давно [1-3]. В работах [1, 2, 4] приведены результаты вычислений эффективного коэффициента диффузии вещества примеси в жидкости в условиях, когда в среде действует периодическое по времени поле скоростей. Полученное точное решение диффузионной задачи в перечисленных выше условиях [3] показывает увеличение среднего по времени диффузионного потока вещества по сравнению со случаем отсутствия конвективных течений в среде. Данный факт усиления диффузии при наличии внешнего периодического поля весьма существен помимо чисто методического интереса. Он может иметь определяющее значение в ряде процессов с участием периодических силовых полей, в частности при электрической зарядке аэрозольных частиц в ионной атмосфере [5] под действием внешнего переменного электрического поля.

Для оценки возрастания эффективного коэффициента диффузии ионов атмосферы за счет действия периодического электрического поля проанализируем модельную задачу.

Рассмотрим диффузии монозаряженных ионов в плоском слое толщины L (см. рис. 1), при условии, что на границах слоя поддерживаются неизменные со временем значения концентраций ионов c_1 и c_2 . Тогда в отсутствии электрического поля концентрация ионов в зависимости от координаты x описывается выражением

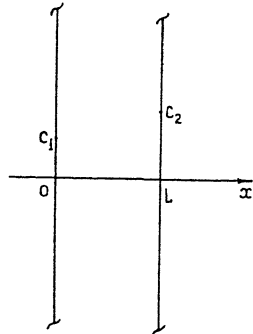
$$c(x) = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{L} x, \quad L \geq x \geq 0.$$

При включении периодического по времени электрического поля $E(t) = E_0 \cos \omega t$, где t - время, задача о нахождении $c(x, t)$ примет следующий вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - D \frac{q E_0 \cos \omega t}{K_B T} \cdot \frac{\partial c}{\partial x}; \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$c(x=0, t) = c_1, \quad c(x=L, t) = c_2, \quad t \geq 0.$$

Плоский слой бесконечной длины с постоянными значениями концентрации примеси на границах $c(x=0, t) = c_1$, $c(x=L, t) = c_2$, $t \geq 0$.



Здесь (1) D - коэффициент диффузии ионов в атмосфере, q - заряд иона, K_B - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура.

Поскольку точное аналитическое решение задачи (1) отсутствует, рассмотрим приближенные решения в некоторых предельных случаях.

1. Приближение слабого поля $qE_0L / K_B T = \alpha$, $|\alpha| \ll 1$. В этой ситуации допустим анализ задачи (1) методом последовательных приближений. Решение $c(x, t)$ можно искать в виде

$$c(x, t) = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{L} x + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c^{(k)}(x) \exp(i\omega k t). \quad (2)$$

Тогда уравнения для определения $c^{(k)}(x)$ с точностью до первого не исчезающего приближения по α примут вид

$$\frac{i\omega k}{D} c^{(k)} = \frac{d^2 c^{(k)}}{dx^2} - \frac{\alpha}{2L} \frac{d}{dx} [c^{(k-1)} + c^{(k+1)}], \quad (3)$$

$$c^{(k)}(x=0) = c^{(k)}(x=L) = 0, \quad k \neq \pm 1;$$

$$\pm \frac{i\omega}{D} c^{(\pm 1)} = \frac{d^2 c^{(\pm 1)}}{dx^2} - \frac{c_2 - c_1}{2L^2} \alpha; \quad c^{(\pm 1)}(x=0) = c^{(\pm 1)}(x=L) = 0. \quad (4)$$

Из формы выражения (2) следует, что дополнительный вклад в усредненный по времени поток вещества даст член $c^{(0)}(x)$, то есть

$$\begin{aligned} \langle J |_{x=0} \rangle &= -D \left\langle \frac{dc}{dx} \right|_{x=0} \rangle = -\frac{D}{L} \left[c_2 - c_1 + \frac{dc^{(0)}}{dx} \right|_{x=0} \rangle = \\ &= -D_{eff} \frac{c_2 - c_1}{L}. \end{aligned} \quad (5)$$

Скобки $\langle \dots \rangle$ в выражении (5) означают усреднение по периоду времени $\tau = 2\pi/\omega$.

Из решения уравнений (4) получим

$$c^{(\pm 1)}(x) = \frac{c_2 - c_1}{2} \alpha \frac{1}{\lambda_{\pm}^2} \left[ch\left(\lambda_{\pm} \frac{x}{L}\right) - 1 - \frac{ch(\lambda_{\pm}) - 1}{sh(\lambda_{\pm})} sh\left(\lambda_{\pm} \frac{x}{L}\right) \right];$$

$$\lambda_{\pm} = \sqrt{\pm \frac{i\omega L^2}{D}}$$

Используя $c^{(\pm)}$ (x), из уравнения (3) определим

$$D \frac{dc^{(0)}}{dx} \Big|_{x=0} = D \frac{c_2 - c_1}{2L} i \frac{D\alpha^2}{L^2\omega} \left[\frac{1}{\lambda_+} \frac{\text{ch}(\lambda_+) - 1}{\text{sh}(\lambda_+)} - \frac{1}{\lambda_-} \frac{\text{ch}(\lambda_-) - 1}{\text{sh}(\lambda_-)} \right]$$

и далее, учитывая формулу (5),

$$D_{\text{eff}} = D \left[1 + \frac{\alpha^2}{24} F(z) \right], \quad F(z) = \frac{6}{z^3} \frac{\text{sh}z - z \cos z}{\text{ch}z + \cos z}, \quad z = L \sqrt{\frac{\omega}{2D}}. \quad (6)$$

Таким образом, при наличии переменного электрического поля эффективный коэффициент диффузии ионов, так как $F(z) > 0$ при $z > 0$.

2. Приближение малой частоты электрического поля $\omega \ll D/L^2$. При низкочастотном электрическом поле допустим анализ задачи (1) в квазистационарной форме

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{qE_0}{k_B T} \cos \omega t \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0;$$

$$c(x=0, t) = c_1, \quad c(x=L, t) = c_2. \quad (7)$$

Решение задачи (7) имеет вид

$$c(x, t) = (c_2 - c_1) \frac{1 - \exp\left(\frac{x}{L} \alpha \cos \omega t\right)}{1 - \exp(\alpha \cos \omega t)}. \quad (8)$$

Используя соотношение

$$\langle J \Big|_{x=0} \rangle = -D \left\langle \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} \right\rangle = -D_{\text{eff}} \frac{c_2 - c_1}{L}$$

и формулу (8), определим эффективный коэффициент диффузии

$$\frac{D_{\text{eff}}}{D} = \frac{\alpha}{\pi} \int \text{cth} \left[\frac{\alpha}{2} \sqrt{1 - \xi^2} \right] d\xi. \quad (9)$$

Отметим, что для $|\alpha| \ll 1$ $D_{\text{eff}}/D \approx 1 + \alpha^2/24$ и формула (8) согласуется с выражением (6) в пределе $z \ll 1$ (при $z \ll 1$ $F(z) \approx 1$). В случае сильного электрического поля $|\alpha| \gg 1$ может наблюдаться значительное усиление диффузии, так как

$$D_{\text{eff}}/D \approx |\alpha|/\pi \quad \text{при} \quad |\alpha| \gg 1. \quad (10)$$

Таким образом, приложение к примесным частицам в веществе сил, изменяющихся по гармоническому закону, — сил, которые по первому впечатлению не могут оказывать влияния на диффузионный перенос, — увеличивает скорость диффузии вещества. Для достаточно сильных полей коэффициент диффузии становится пропорциональным амплитуде поля (см. (10)). Полученный в данной статье результат является развитием ранее выполненной работы Я.Б.Зельдовича [4].

По-видимому, имеются технические и технологические возможности использования периодических полей для ускорения массопереноса в веществе (в различном фазовом состоянии).

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Т а у л о р G.I. // Proc. Roy. Soc. A. 1953. V. 218. P. 186-203.
- [2] Т а у л о р G.I. // Proc. Roy. Soc. A. 1954. V. 225. P. 473-477.
- [3] Б а б е н я Л.А., Г о л о в е й к о А.Г., Н о в и к о в а В.И. // ИФЖ. 1987. Т. 53. № 6. С. 961-965.
- [4] З е л ь д о в и ч Я.Б. // ДАН СССР. 1982. Т. 266. № 4. С. 821-826.
- [5] Р а й с т П. Аэрозоли. М.: Мир, 1987. 280 с.

Поступило в Редакцию
28 июня 1991 г.