Письма в ЖТФ. том 17, вып. 17 12 сентября 1991 г.

01; 05.1

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ТРЕЩИН, ОБРАЗУЕМЫХ ПРИ ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ МОДЕЛЬНЫХ РЕШЕТОК И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.С. Баланкин, А.Л. Бугримов

Трещины, образуемые в твердых телах, имеют самоподобную структуру [1–3], отражающую фрактальную динамику процесса разрушения [2–6]. При моделировании разрушения плоских решеток, динамика которых задавалась уравнениями упругости сплошной среды, а распространение трещины – правилом, согласно которому вероятность разрыва связи между соседними узлами i, j пропорциональна напряжению σ_{ij}

$$P_{ij} \sim \sigma_{ij}^{m}, \qquad (1)$$

установлено [3], что фрактальная размерность самоподобных конфигураций трещин d_f не зависит от вида нагружения (растяжение, сжатие, сдвиг), моделируемого заданием соответствующих граничных условий, и определяется значениями коэффициента Пуассона ν [7] и показателя m [3]. В случае $m=1$ размерность конфигураций трещин d_f, образуемых в двумерной ($d=2$) решетке, равна $d_f=1+\nu$ [7] и совпадает с размерностью полей неоднородных деформаций и напряжений в двумерном упругоизотропном твердом теле [5, 6]. В случае d-мерного упругоизотропного тела размерность распределения неоднородных деформаций (напряжений) равна $d_f=(d-1)(1-\nu)$ [6] (для трехмерного тела соотношение $d_f=2(1+\nu)$ впервые получено в [4]).

Численные эксперименты [3] показали, что размерность конфигураций трещин растет от $d_f=1$ при $m \gg 1$ до $d_f=2$ при $m \ll 1$ (см. таблицу). Для установления зависимости $d_f(m)$ рассмотрим одностороннюю деформацию плоской решетки ($\varepsilon_{\parallel} = const$, $\varepsilon_{\perp}=0$) под действием напряжения $\sigma_{\parallel}$. Вследствие эффекта Пуассона в решетке возникает поперечное напряжение $\sigma_{\perp} = \nu\sigma_{\parallel}$. Согласно (1), отношение вероятностей разрыва связей под действием напряжений $\sigma_{\parallel}$ и $\sigma_{\perp}$ равно ν^m, поэтому размерность конфигурации трещин, определенная по [7], равна

$$d_f = 1+\nu^m. \qquad (2)$$

Как видно из данных, приведенных в таблице, значения d_f, рассчитанные по аналитической формуле (2), очень хорошо согласуются с результатами численного моделирования. Так как d_f не

Результаты оценки, d_f*		Значение				
		$m \ll 1$	0.5	1	2	$m \to \infty$
Расчет по формуле (2)		~ 2	1.82	1.67	1.44	1
Результаты численного моделирования [3] **	растяжение	2	1.9±0.1	1.66±0.05	1.45±0.05	1
	деформация сдвигом	2	1.9±0.1	1.65±0.05	1.40±0.05	1
Моделируемое разрушение		Вязкое разрушение		Разрушение вязкоупругих тел	Фрактальная трещина Гриффитса	Классическая трещина Гриффитса
ω		$\omega < \frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\omega > \frac{1}{2}$	

*Расчеты проведены при $\nu = 2/3$, поскольку в [3] принималось, что коэффициенты Ламе равны ($\lambda = \mu$), что при $d = 2$ дает $\nu = 2\lambda/(2\lambda + \mu) = 2/3$.

**В [3] для каждой конфигурации определены значения d_f тремя различными способами. Установлено: $d_0 > d_1 > d_2$, что указывает на мультифрактальную структуру конфигураций [9]. Здесь приводятся значения $d_f = d_0$ по [7], что соответствует модели Ш в [3].

зависит от вида нагружения, то формула (2) справедлива при всех видах нагружения. Легко показать, что в случае d-мерной решетки конфигурации трещин, образуемые в модели (1), имеют размерность

$$d_f=(d-1)(1+\nu^m), \tag{3}$$

откуда в трехмерном случае имеем $d_f=2(1+\nu^m)$.

В 8 рассмотрено распространение фрактальной трещины, когда разрыв связей определяется критерием Гриффитса. Было показано, что в окрестности вершины фрактальной трещины Гриффитса напряжения характеризуются асимптотическим поведением

$$\sigma\sim r^{-a}, \quad a=\frac{d-d_f}{2}, \tag{4}$$

где r – расстояние от вертины трещины, а площадь поверхности трещины размером R пропорциональна R^{d_f} (в случае двумерной решетки истинная длина трещины $\sim R^{d_f}$). В [5] показано, что размерность поверхности трещин, образуемых при разрушении твердых тел, определяется эффективным значением $\nu_э$

$$d_f=2(1+\nu_э), \quad \nu_э=\frac{\nu-0.5\delta}{1-\delta}, \tag{5}$$

где параметр δ определяется процессами релаксации упругих напряжений путем пластической деформации и концентрацией микротрещин, образуемых в процессе деформирования образца:

$$\delta=\frac{\delta V_s\pm\delta V_l}{\delta V}, \quad \delta V=\delta V_y+\delta V_l\pm\delta V_s. \tag{6}$$

Здесь $\delta V=(1-2\nu)\frac{\sigma}{E}$ – изменение объема, обусловленное упругими деформациями, а δV_l и δV_s – изменение объема, обусловленное накоплением микро-, мезо- и макродефектов и релаксацией напряжений при пластической деформации соответственно (накопление повреждений всегда приводит к увеличению объема, а изменение объема, обусловленное пластической деформацией, имеет знак противоположный знаку упругой составляющей изменения объема, что находит отражения в знаках „$\pm$" в (6)).

Для определения δ^*, $\nu_э$ и $d_f(\delta^*)$ самоподобной трещины Гриффитса вернемся к модели упругой решетки. В случае $d=2$ число связей в решетке со стороной R пропорционально $N\sim R^2$. Число разорванных связей в трещине размером R, согласно (1), пропорционально $k=N\cdot P(R)$, где $P\sim\sigma^m$. Подставляя это условие в (4), получаем

$$P\sim\sigma^m\sim R^{-ma}, \quad k\sim R^{r-ma}, \tag{7}$$

с другой стороны, по определению, $k \sim R^{d_f}$. Поэтому, сравнивая (4) и (7), получаем, что распространение самоподобной трещины Гриффитса моделируется вероятностной моделью (1) разрушения упругой решетки при условии

$$m = 2 \tag{8}$$

Это позволяет выразить зависимость коэффициента интенсивности напряжений K_I от R в пределах самоподобия [8] в форме

$$K_I \sim \sigma R^{\frac{1-2\nu^2}{2}} \quad и \quad K_I \sim \sigma R^{\frac{1-\nu^2}{2}} \tag{9}$$

Первое из соотношений (9) отвечает распространению трещины с фрактальной поверхностью, а второе – распространению гладкой трещины, фронт которой является фрактальной кривой. Из сравнения (3), (8) с (5) следует, что в рассматриваемом случае $\nu_э = \nu^2$, откуда получаем

$$d_f = 2(1+\nu^2), \quad \delta^* = \frac{2\nu(1-\nu)}{1-2\nu^2}, \tag{10}$$

где δ^* определяет концентрацию разорванных связей (микротрещин), при достижении которой в решетке (твердом теле) распространяется магистральная самоподобная трещина Гриффитса.

Разрушение можно рассматривать как процесс кластеризации дефектов [9], описываемый уравнением Смолуховского [10], асимптотическое решение которого $dR/dN \sim R^{\varphi}$, $\varphi = 1 - \frac{d_f}{z}$, $z^{-1} = 1 - 2\omega$ имеет вид закона Париса $dR/dN \sim (K_I)^n$ [11], где N – число циклов нагружения, а ω – параметр, определяющий зависимость константы скорости кластеризации $k \sim R^2$ В рамках модели разрушения упругой решетки (7) можно получить выражение

$$n = \frac{m[1+d_f(2\omega-1)]}{d-d_f} = \frac{m[1+(d-1)(1+\nu^m)(2\omega-1)]}{1-(d-1)\cdot\nu^m}, \tag{11}$$

связывающее показатель n с d_f и параметрами кинетической (ω) и вероятностной (m) модели. При распространении фрактальной трещины Гриффитса (8), (9) из соотношения (11) следует

$$n = 2\left[1 + 2(1+\nu^2)(2\omega - 1)\right] / (1-2\nu^2),$$

что позволяет определять ω по известным значениям n [11] и ν. В последних строках таблицы приведено сопоставление модели (1), (7) с кинетической моделью (11) и моделями разрушения твердых тел.

Авторы выражают признательность А.Б. Мосолову за ознакомление с результатами работы [8] и полезные обсуждения результатов настоящей работы и Е.И. Шемякину за внимание и полезные обсуждения вопросов фрактальной механики деформируемого твердого тела.

Список литературы

[1] Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. San Fransisco: Freeman, 1983.
[2] Барренблат Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1988.
[3] Meakin P., Li G., Sander L., Louis E., Guinea F. // J. Phys. A. 1989. V. 22. N 9. P. 1393-1403.
[4] Баланкин А.С. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. № 7. С. 14-20.
[5] Баланкин А.С., Иванова В.С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. № 1. С. 32-36.
[6] Баланкин А.С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. № 6. С. 84-90.
[7] Баланкин А.С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. № 11. С. 9-13.
[8] Мосолов А.Б. // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 7. С. 57-60.
[9] Баланкин А.С. Синергетика деформируемого тела. Ч.1. М.: МО СССР, 1991. 404 с.
[10] Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М.: Наука, 1991. 136 с.
[11] Миллер К. Ползучесть и разрушение. М.: Металлургия, 1986. 120 с.

Поступило в Редакцию
3 августа 1991 г.