01; 05.1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ЭНТРОПИЙНОЙ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНОСТИ ФРАКТАЛОВ

А.С. Баланкин

Экспериментальные данные по деформации эластоматериалов обычно интерпретируются в рамках классической теории энтропийной высокоэластичности, которая неплохо согласуется с экспериментом лишь в области сравнительно малых деформаций ($\lambda_i < 1, 2$) [1, 2]. Согласование же расчетов с экспериментом при больших λ_i осуществляют либо в рамках феноменологических модификаций энтропийной теории [2, 3], либо на основе эмпирических зависимостей функции упругого потенциала от инвариантов деформации [1, 4]. И в том и в другом случае требуемая точность аппроксимации экспериментальных зависимостей напряжений σ_i от λ_i достигается путем выбора надлежащих значений параметров согласования, являющихся по сути подгоночными. Помимо не всегда ясного физического смысла параметров согласования, принципиальным недостатком как феноменологических модификаций энтропийной теории, так и эмпирических моделей упругого потенциала является необходимость использования разных значений одного и того же параметра упругости, например, модуля Юнга E (или модулей сдвига G, объемной упругости B, коэффициенты Ламэ λ, $\mu \equiv G$) как для описания экспериментальных данных, полученных при разных условиях нагружения, так и для аппроксимации одних и тех же зависимостей, но в рамках различных феноменологических модификаций теории энтропийной высокоэластичности [2, 3]. Поэтому значения параметров упругости второго порядка, рассчитанные с использованием феноменологических соотношений, не удовлетворяют соотношениям классической теории упругости [5] даже в пределе бесконечно малых деформаций. Это, как будет показано ниже, обусловлено: а) существенно не гауссовой статистикой реальных полимерных сеток; б) несогласованностью двух основных постулатов, лежащих в основе классической теории энтропийной высокоэластичности – о гауссовой статистике и несжимаемости (ν =0.5) эластоматериалов.

То, что реальные полимерные сетки существенно не гауссовы, показано в [6], причем, если фрактальная размерность отдельной цепи равна двум [1], то размерность структуры эластоматериалов может лежать в пределах $2 \leqslant d_f \leqslant 3$, и только в случае d_f =2 сетки подчиняются статистике Гаусса.

В [7] показано, что в области малых деформаций поведение d_f -мерного фрактала, деформируемого в d -пространстве, аналогично поведению упругоизотропного d -мерного твердого тела.

Принципиальное отличие состоит в том, что поперечная деформация фрактала ($\lambda_\perp$) происходит под действием соответсвующих напряжений $\sigma_\perp$, возникающих при продольной деформации $\lambda_\parallel$ под действием $\sigma_\parallel$ благодаря тонкой структуре фракталов. При этом коэффициент поперечной деформации упругоизотропного фрактала однозначно определяется его размерностью [7]

$$\nu = \frac{d_f}{d-1} - 1, \tag{1}$$

а соотношения между модулями упругости второго порядка для фракталов тождественны таковым для d-мерных твердых тел [7, 8]. Легко видеть, что равенство (1) обеспечивает сохранение самоподобия фрактала при упругой деформации, причем условие несжимаемость выполняется только в случае $d_f \equiv d$. С другой стороны, для фракталов, подчиняющихся статистике Гаусса (d_f=2, d =3) из (1) получаем нулевое значение ν=0, означающее неизменность поперечных размеров при одноосной деформации. Последнее, очевидно, имеет место при растяжении хаотической полимерной цепи (d_f=2 [1]), что легко смоделировать, растягивая запутанную нить: длина нити и размер клубка в поперечном направлении не меняются, а объем, занимаемый клубком в трехмерном евклидовом пространстве, увеличивается пропорционально увеличению размера в направлении растяжения.

Как известно, в основе классической теории упругости твердого тела лежат два экспериментально установленных факта [5]: 1) закон Гука, согласно которому относительная деформация $\varepsilon_\parallel$ пропорциональна $\sigma_\parallel$ и 2) закон Пуассона, постулирующий эффект поперечных деформаций $\varepsilon_\perp = -\nu\,\varepsilon_\parallel$ в отсутствии соответствующих напряжений $\sigma_\perp$. Для построения теории упругости фракталов мы также постулируем два утверждения: 1) при деформации упругоизотропного фрактала под действием силы F возникает единственный новый характерный масштаб длины L_F, причем

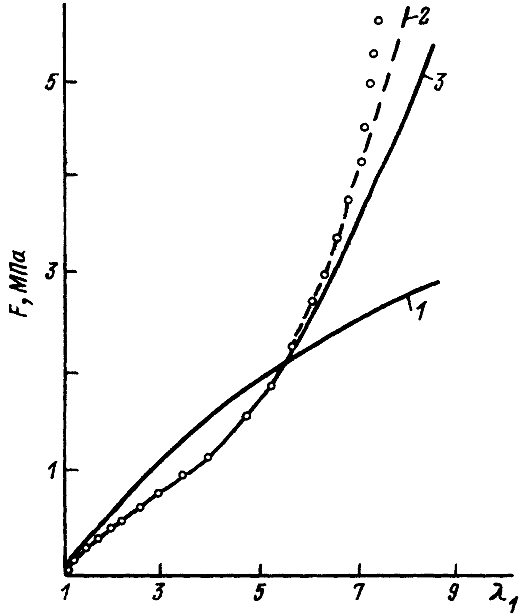
$$F = \frac{\partial U}{\partial L_F} - T\frac{\partial S}{\partial L_F}, \tag{2}$$

где первый член связан с энергетической, а второй – с энтропийной составляющими упругости фрактала.

2) При упругой деформации самоподобие фрактала сохраняется, т.е. закон изменения плотности фрактала ρ при упругой деформации подобен закону изменения ρ при геометрическом изменении размеров

$$\frac{\rho(F_1)}{\rho(F_2)} = \left(\frac{L_{F1}}{L_{F2}}\right)^{-\alpha} = \lambda_F^{-\alpha}, \quad \alpha = d - d_c, \tag{3}$$

где d_c – корреляционная размерность структуры, а d – евклидова размерность объемлющего пространства.



Зависимости $F_1(\lambda_1)$ при одноосном растяжении каучука: точки – эксперимент 2; 1 – расчет по формуле $F_1 = \frac{E}{3}(\lambda_1 - \lambda_1^{-2})$ при E=0.4 МПА [2]. Расчет по формуле (10): 2 – E=0.192 МПа, ν =0.5; 3 – E=0.2 МПа, ν =0.48.

В случае одноосной деформации фрактала из (3) следует, что изменение размера фрактала в направлении действия силы F, равное $\lambda_1 = L_1 / l_1$, сопровождается изменением его размеров в ортогональных направлениях, которое связано с $\lambda_1 = \lambda_F$ соотношением

$$\lambda_i = \lambda_\perp = \lambda_1^{-\nu} = \lambda_F^{-\nu}, \qquad i = 2, 3, \ldots, d, \tag{4}$$

где ν определяется равенством (1). В случае же двухосной деформации фрактала в трехмерном пространстве

$$\lambda_3 = \lambda_F^{-\nu}, \quad \lambda_F = (\lambda_1 \lambda_2)^{1/1-\nu}, \tag{5}$$

причем ν и d_C связаны тем же соотношением (1), которое выполняется и при трехосной деформации (d =3), когда можно положить

$$\lambda_f = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{1/\alpha}, \quad \alpha = 1 - 2\nu. \tag{6}$$

Изменение энтропии при упругой деформации d_f -мерного фрактала в d -пространстве можно представить в форме

$$\Delta S = -C\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{d_I} - d\right), \tag{7}$$

где d_I – информационная размерность [9], а параметр С не зависит от λ_i и может быть определен, например, в рамках подхода [6].

Для регулярных фаркатлов $d_I = d_c = d_f$ [9]. Кроме того, положим, что в случае одноосной деформации $V = Cd_c\lambda_1^{\beta}$, где $\beta = const$. Тогда, учитывая, что при $\lambda_i \equiv 1$ $F \equiv 0$ из (1)-(7) получаем

$$F = Cd_f\left\{\lambda_1^{d_f} - [d_f - (d-1)]\lambda_1^{-\nu d_f - 1} - (d - d_f)\lambda_1^{\alpha - 1}\right\}. \tag{8}$$

Истинное напряжение σ связано с силой F соотношением

$$\sigma = F\left(\prod_{i=2}^{d} l_i\right)^{-1}\lambda_1^{1-\alpha} = \frac{Cd_f}{l^{d-1}}\left\{\lambda_1^{2d_f - d} - [d_f - (d-1)]\lambda_1^{d_f(1-\nu)-d} - d + d_f\right\}, \tag{9}$$

учитывающим изменение поперечных размеров при деформации фрактала. Аналогично можно получить зависимости $\sigma_i(\lambda_i)$ и при n -осной деформации. При малых деформациях эти соотношения переходят в соотношения, полученные ранее [7]. Хотя для реальных эластоматериалов условие $d_c = d_I = d_f$ в общем случае, очевидно, не выполняется, оно может рассматриваться как первое приближение. В этом случае из (8) и (1) получаем выражение для зависимости $F(\lambda_1)$ при одноосной деформации

$$F = \frac{E}{1 + 2\nu + 4\nu^3}\left\{\lambda_1^{1+2\nu} - 2\nu\lambda_1^{-1-2\nu(1+\nu)} - (1 - 2\nu)\lambda_1^{-2\nu}\right\}, \tag{10}$$

которое отличается от классической формулы $F = \frac{E}{3}(\lambda_1 - \lambda_1^{-2})$ [1, 2] даже в пределе $\nu = 0.5$. Как видно из графиков (см. рисунок), расчет по (10) хорошо согласуется с экспериментом. Небольшое отклонение экспериментальной кривой от рассчитанной по (10) при $\lambda_1 > 7$ обусловлено, по-видимому, образованием микротрещин, что, как показано в [10], приводит к увеличению эффективного значения ν при растяжении, которое в рассматриваемом случае начинает превышать значение 0.5.

В заключение отметим, что предложенный подход можно использовать и для построения теории упругости мультифракталов ($d_c < d_I < d_f$ [9]). При этом, как следует из (1)-(8), для упругоизотропных мультифракталов должно выполняться равенство
$d_I(d-d_f)=d_c(d-d_c)$.

Автор выражает благодарность А.Л. Бугримову, А.Б. Мосолову, А.Я. Сагомоняну и Е.И. Шемякину за полезные обсуждения результатов работы.

Список литературы

[1] Бартенев Г.М., Френкель С.Я. Физика полимеров. Л.: Химия, 1990. 432 с.

[2] Гуль В.Е., Кулезнев В.Н. Структура и механические свойства полимеров. М.: Высшая школа, 1979. 352 с.

[3] Терновский Ф.Ф., Хохлов А.Р. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. № 4. С. 1249-1266.

[4] Kawabata S., Matsuda M., Tei K., Kawai H. // Macromolecules. 1981. V. 14. N 1. P. 154-171.

[5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.

[6] Панюков С.В. // ЖЭТФ. 1990. Т. 98. № 2. С. 668-680.

[7] Баланкин А.С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 11. С. 9-14.

[8] Баланкин А.С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 6. С. 84-90.

[9] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.

[10] Баланкин А.С., Иванова В.С. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. № 1. С. 32-36.

Поступило в Редакцию
12 августа 1991 г.