

01; 05.1

© 1991

ФРАКТАЛЬНЫЙ J -ИНТЕГРАЛ В РАЗРУШЕНИИ

А.Б. Мосолов

Широкое распространение при описании процессов разрушения и развития трещин в твердых телах получил подход, основанный на использовании инвариантных J -интегралов [1, 2]. Рассматривая малый круговой контур Γ радиуса Δl , охватывающий кончик трещины, можно записать J -интеграл в виде

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (W n_1 - \tilde{\sigma}_{ij} n_j u_{i,1}) ds, \quad (1)$$

где W - работа внутренних напряжений, $\tilde{\sigma}_{ij}$ - тензор напряжений, u_i - вектор перемещений, n_j - вектор нормали.

Физический смысл этого интеграла обычно связывают с потоком энергии в конец трещины в расчете на единицу ее площади. Критерий разрушения в этом случае выбирается в виде

$$J = J_c, \quad (2)$$

где J_c - постоянная материала.

Хорошо известно, что реальные трещины на мезомасштабе мало похожи на идеальные трещины с гладкими берегами, рассматриваемые обычно в теории разрушения. Поверхность трещин и изломов, формирующаяся при разрушении большинства материалов весьма нерегулярна и характеризуется наличием неровностей самых различных размеров. Важная особенность структуры поверхности трещин обнаружена в работах [3, 4], где установлено статистическое самоподобие микрорельефа поверхности разрушения. Следовательно, можно предположить, что структуру поверхности трещин можно моделировать фрактальными поверхностями. Фрактальная геометрия трещин подробно обсуждается в работах [3-6].

Используя для моделирования трещин фрактальные поверхности, следует помнить, что с математической точки зрения фрактал бесконечно извилист, а фрактальная поверхность имеет бесконечную площадь. Извилистость и площадь поверхности трещины конечны, поэтому существует естественный нижний предел l_0 применимости фрактальной модели, связанный с микроструктурой среды.

Обычно существует и верхний предел применимости фрактальной модели L_0 , связанный с геометрическими размерами тела, размером трещины, характерным масштабом неоднородности внешних

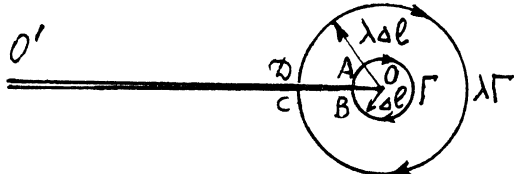


Рис. 1. Контуры интегрирования Γ и $\lambda\Gamma$ вокруг носика O трещин OO' .

полей и т.д. Таким образом, фрактальная модель применима для масштабов $l_0 \ll l \ll L_0$ и предельный переход: масштаб $l \rightarrow 0$ нужно понимать в смысле $l \rightarrow \xi \gg l_0$. Фрактальная структура поверхности трещины оказывает заметное влияние на распределение напряжений у ее носика, и, следовательно, на процесс разрушения. В работах [7, 8] показано, что на мезомасштабе асимптотика полей напряжений и перемещений имеет вид

$$\sigma_{ij} \sim r^{-\alpha}, \quad u_i \sim r^{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{2-D}{2}, \quad (3)$$

где r - расстояние от кончика трещины, D - фрактальная размерность поверхности (в двумерном случае - контура) трещины.

Подставляя (3) и (1), легко убедиться, что J -интеграл для фрактальной трещины перестает быть инвариантным. В причинах этого несложно разобраться, вспомнив доказательство инвариантности J -интеграла (см., например, [2]) для трещины с гладкими берегами. Существенным моментом в этом доказательстве является то обстоятельство, что в классическом случае единственной сингулярной точкой упругих полей является носик трещины. Интеграл $J(\Gamma)$, вычисленный по правилу (1) для контура Γ , отличается от соответствующего интеграла $J(\lambda\Gamma)$ для контура $\lambda\Gamma$ (см. рис. 1) на величину интеграла (1) по контуру $ABCA$ ($\lambda\Gamma$) да. Последняя величина равна нулю в силу уравнений упругости, поскольку единственная сингулярная точка лежит вне этого контура.

Совсем иначе обстоит дело для трещин с фрактальными берегами. В этом случае сингулярные точки упругих полей имеются не только в носике трещины, но и на ее фрактально изрезанных берегах, причем в пределах применимости фрактальной модели сингулярности присутствуют на всех масштабных уровнях. Это означает, что при замене контура интегрирования Γ на контур $\lambda\Gamma$ в рассмотрении вовлекаются новые сингулярные точки и поэтому ожидать инвариантности J -интеграла при замене контура интегрирования уже нельзя. Во фрактальном случае J -интеграл, вычисленный по правилу (1), характеризуется следующим скейлинговым поведением

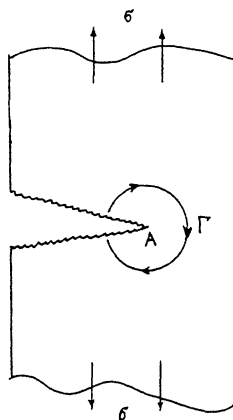


Рис. 2. Шероховатый V-образный надрез.

$$J(\lambda\Gamma) \approx \lambda^{D-1} J(\Gamma). \quad (4)$$

В справедливости зависимости (4) легко убедиться используя асимптотики (3).

Можно рассуждать и несколько иначе, вспомнив, что J - интеграл определяет плотность потока упругой энергии в вершину трещины в расчете на единицу ее длины. Действительно, пусть $\Delta U = J\Delta L$ - поток упругой энергии в вершину трещины при приращении ее длины. Если считать величину J_c - константой материала, не зависящей от размерности поверхности трещины, то условие разрушения (для наглядности рассматриваем двумерный случай) можно записать в виде (S - длина контура трещины)

$$J\Delta L = J_c S(\Delta L).$$

Во фрактальном случае $S(\lambda\Delta L) \sim \lambda^D S(\Delta L)$, получим

$$\frac{J(\lambda\Gamma)}{J(\Gamma)} \sim \frac{S(\lambda\Delta L)/\lambda\Delta L}{S(\Delta L)/\Delta L} \sim \lambda^{D-1}.$$

Отсюда опять следует соотношение (4), которое фактически означает, что для фрактальных трещин сохраняющейся величиной является не сам J - интеграл, а некоторая комбинация $J_f \sim \lambda^{1-D} J(\lambda\Gamma)$.

Для корректного определения сохраняющегося J_f - интеграла для фрактальных трещин можно поступить точно также, как и при определении сохраняющегося J - интеграла для V-образных надрезов [9], вводя в (1) соответствующим образом выбранную весовую функцию η . Запишем фрактальный J_f - интеграл в виде

$$J_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (Wn_i - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) \eta ds. \quad (5)$$

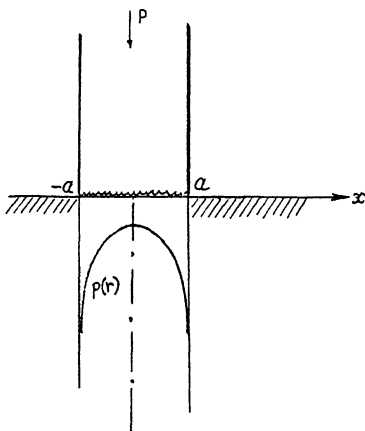


Рис. 3. Штамп с фрактально шероховатой поверхностью. Давление под штампом характеризуется асимптотикой $p(r) \sim r^{-\alpha}$, $\alpha = (2 - \mathcal{D})/2$, где r - расстояние от угловой точки.

Весовая функция η характеризуется следующим скейлинговым поведением

$$\eta \sim r^{1-\mathcal{D}}, \quad l_0 \ll r \ll L_0, \quad (6)$$

где r - расстояние от кончика трещины. Детальная структура функции η , в частности ее зависимость от угловой координаты, будет определяться особенностями строения фрактала, и по-видимому не является универсальной.

Интеграл (5) по форме напоминает соответствующий сохраняющийся интеграл для V -образного надреза с углом раствора 2β . В последнем случае весовая функция η также характеризуется степенным поведением

$$\eta = r^{\bar{\alpha}} \eta_*(\theta), \quad (7)$$

где $\bar{\alpha} = 1 - 2\zeta(\beta)$, θ - угловая координата, а $\zeta(\beta)$ определяется из уравнения [9]:

$$\sin 2\zeta(\pi - \beta) = \mp \zeta \sin 2(\pi - \beta).$$

Следовательно, в определенном смысле можно считать, что фрактальная трещина размерности \mathcal{D} „эквивалентна“ V -образному надрезу с углом раствора 2β , определяемым из уравнения

$$\zeta(\beta) = \frac{\mathcal{D}}{2}. \quad (8)$$

Принимая такую "эквивалентность" в качестве первого приближения, можно выбрать весовую функцию η для интеграла (5) в виде (7) для β , определенного из уравнения (8). Продолжая отмеченную выше аналогию между фрактальными трещинами и надрезами можно определить инвариантный J -интеграл для V -образного надреза с фрактально шероховатой поверхностью (рис. 2). В этом случае нетрудно убедиться, что

$$\eta \sim r^{\alpha - \delta(D)}, \quad \delta(D) = D - 1. \quad (9)$$

Из (5), (9) можно получить, что в окрестности вершины шероховатого надреза

$$\sigma_{ij} \sim r^{\xi - 1 + \delta/2}. \quad (10)$$

Напряжения перестают быть сингулярными при угле раствора $2\beta_0$, удовлетворяющем уравнению

$$\xi(\beta_0) = (3 - D)/2.$$

Из соотношения (10) следует, в частности, что для шероховатой полуплоскости ($\xi(\beta = \pi/2) = 1$)

$$\sigma_{ij} \sim r^{\delta/2},$$

значит фрактальная шероховатость способствует разгрузке границы полуплоскости.

В заключение кратко опишем еще одно приложение приведенных выше рассуждений. Оно связано с контактными задачами.

Как известно, задача о плоском штампе в значительной степени аналогична задаче о трещине нормального отрыва [10]. Учитывая эту аналогию, можно рассмотреть задачу о плоском шероховатом штампе с фрактальной шероховатостью (рис. 3). Рассуждая точно так, как это было сделано выше, можно показать, что в окрестности угловых точек давления под фрактально шероховатым штампом характеризуется следующим асимптотическим поведением

$$\rho(r) \sim r^{-\alpha}, \quad \alpha = (2 - D)/2.$$

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Черепанов Г.П. // ПММ. 1967. Т. 31.
 [2] Райс Дж. В кн.: Разрушение / Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 204-335.
 [3] Mandelbrot B.B., Passoja D.E., Paulay A.J. // Nature. 1984. V. 308. N 4. P. 721-722.

- [4] M e c h o l s k y J.J., M a c k i n T.J. // J. Mater. Sci. Lett. 1988. V. 7. N 11. P.1145-1147.
- [5] M u Z.O., L u n g C.W. // J. Phys. D. 1988. V. 21. N 5. P. 848-850.
- [6] X i e H e p i n g . // Intern. K. Fract. 1989. V. 41. P. 267.
- [7] М о с о л о в А.Б. // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 7. С. 57-60.
- [8] Г о л ь д ш т е й н Р.В., М о с о л о в А.Б. // ДАН СССР. 1991. Т. 319. № 4. С. 840-844.
- [9] S h a o f u W u , X i n g Z h a n g , O i n - g z h i H e . // Int. J. Fracture. 1989. V. 40. N 3. P. 221-233.
- [10] М у с ш е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Институт
проблем
механики АН СССР,
Москва

Поступило в Редакцию
20 августа 1991 г.