01

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО КОЛЬЦА В МОДЕЛИ „СТРУНА В СТРУНЕ"

В.Н. Капшай

Задача о движении кольцеобразных тел вокруг гравитационного центра рассматривалась после открытия колец Сатурна различными авторами, начиная с Лапласа [1], Максвелла [2] и Ковалевской [3]. В последнее время вновь возродился интерес к исследованию характера движения сплошных колец в центральном поле. Предполагается, что в перспективе энергетические и промышленные предприятия могут быть связаны в кольца вокруг Земли [4, 5]. В работах [5–7] в качестве модели искусственных колец исследуется тяжелая гибкая однородная струна. Для такой струны, подчиняющейся закону Гука и замкнутой в кольцо, вращающееся вокруг гравитационного центра, в [5, 6] показана неустойчивость движения в широкой области определения ее равновесных параметров. В [7] найдены условия, при которых такое движение может быть устойчивым.

В настоящей работе мы начинаем изучение закономерностей движения в более сложной модели искусственных колец „струна в струне". Орбитальное кольцо этой модели может использоваться не только на орбите, но и для выхода на орбиту [4]. Кроме того, есть веские основания считать, что оно будет значительно более устойчивым. В этой модели орбитальное кольцо состоит из двух струн, одна из них является полой (тонкая гибкая трубка), а вторая находится внутри первой и может скользить вдоль нее без трения. Первую струну будем называть оболочкой, вторую – ротором. В качестве лагранжевой координаты первой (второй) струны возьмем дугу a (b), отсчитываемую от некоторой точки A (B) этой струны в нерастянутом состоянии ($0 \leq a \leq l$, $0 \leq b \leq l$). Тогда положение первой струны в момент времени t полностью определяется вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(a, t)$. Положение второй струны относительно первой, а значит, и в пространстве, полностью определяется заданием функции $b = b(a, t)$, которая показывает, какая точка b второй струны находится там же, где и точка a первой струны.

Уравнения движения для функций $\vec{r}(a, t)$, $b(a, t)$ получим на основе принципа наименьшего действия. Кинетическая энергия системы есть

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\left[\mu_0(a)\dot{\vec{r}}^{\,2}(a,t) + \mu_p(b(a,t))\,\vec{v}_p^{\,2}(a,t)\,b'(a,t)\right]da, \qquad (1)$$

где $\mu_o(a)$ и $\mu_p(b)$ – линейная плотность оболочки и ротора, $\vec{v}_p(a, t)$ – скорость той точки ротора, которая в момент времени t находится рядом с точкой a оболочки. Штрихом в (1) и ниже обозначается производная по лагранжевой координате a, точкой – производная по времени. Нетрудно показать, что скорость точки ротора $b = b(a, t)$ в пространстве выражается через функции $\vec{r}(a, t)$ и $b(a, t)$ так:

$$\vec{v}_p(a,t) = \dot{\vec{r}}(a,t) - \vec{r}\,'(a,t)\,\dot{b}(a,t)/b'(a,t). \tag{2}$$

Потенциальная энергия взаимодействия оболочки и ротора с гравитационным центром массы M (G – постоянная тяготения) имеет вид

$$U_{гр} = -GM\int_0^l |\vec{r}(a,t)|^{-1}\Big[\mu_o(a) + \mu_p(b(a,t))\,b'(a,t)\Big]\,da. \tag{3}$$

Потенциальная энергия упругих деформаций различных участков оболочки и ротора будет функционалом, зависящим от соответствующих относительных деформаций $|\vec{r}\,'| - 1$ и $|\vec{r}\,'/b'| - 1$, а именно

$$U_{упр} = \int_0^l \Big[F_o(a; |\vec{r}\,'| - 1) + F_p(b; |\vec{r}\,'/b'| - 1)\,b'\Big]\,da. \tag{4}$$

В случае струн, подчиняющихся закону Гука, например, имеем

$$U_{упр} = \int_0^l \frac{1}{2}\Big[E_o(a)(|\vec{r}\,'| - 1)^2 + E_p(b(a,t))(|\vec{r}\,'/b'| - 1)^2 b'\Big]\,da, \tag{5}$$

где $E_o(a)$ ($E_p(в)$) – величина, пропорциональная модулю Юнга и площади поперечного сечения ободочки (ротора).

Используя формулы (1)–(5), можно записать явный вид функционала действия модели „струна в струне"

$$S[\vec{r}(a,t),\ b(a,t)] = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{T - U_{гр} - U_{упр}\Big\}\,dt, \tag{6}$$

с помощью которого и принципа Гамильтона $\delta S = 0$ нетрудно определить явный вид уравнений движения $\delta S/\delta\vec{r}(a, t) = 0$, $\delta S/\delta b$ (a, t) = 0.

Уравнения движения модели „струна в струне" выпишем для простоты в случае однородных оболочки и ротора, когда величины $\mu_{o,p}$ и $E_{o,p}$ являются постоянными, а функции $F_{o,p}$ не зависят от a и ъ соответственно. Эти уравнения таковы:

$$\mu_0\ddot{\vec r}+\mu_p\left(b'\dot{\vec v}_p-\dot b\,\vec v_p{}'\right)+GM\vec r\,|\vec r|^{-3}\left(\mu_0+\mu_p b'\right)-$$
$$-\left[f_0(|\vec r'|-1)\,\vec r'/|\vec r'|\right]-\left[f_p(|\vec r'/b'|-1)\,b'\vec r'/|b'\vec r'|\right]'=0,\qquad(7)$$

$$\mu_p(\vec v_p\vec r')^{\cdot}-\mu_p(\vec v_p\vec r'\dot b/b')'-\mu_p(\vec v_p^{\,2})'/2-$$
$$-GM\mu_p(r^{-1})'-\left[f_p(|\vec r'/b'|-1)|\vec r'/b'|+F_p(|\vec r'/b'|-1)\right]'=0.\qquad(8)$$

В (7) и (8) мы обозначили $f_{o,p}(x)=dF_{o,p}(x)/dx$, так что в случае закона Гука имеем, например, $f_0(|\vec r'|-1)=E_0(|\vec r'|-1)$.

Граничные условия для уравнений в частных производных (7) и (8) также выводятся в используемом методе и имеют следующий вид:

$$\left[\mu_p\vec v_p\dot b+f_0(|\vec r'|-1)\,\vec r'/|\vec r'|+f_p(|\vec r'/b'|-1)\,b'\vec r'/|b'\vec r'|\right]_0^l=0,\qquad(9)$$

$$\left[\mu_p\vec v_p\vec r'\dot b/b'+\mu_p\vec v_p^{\,2}/2+GM\mu_p/r+\right.$$
$$\left.+f_p(|\vec r'/b'|-1)|\vec r'/b'|-F_p(|\vec r'/b'|)\right]_0^l=0.\qquad(10)$$

Из системы уравнений (7), (8) нетрудно получить уравнение движения одной замкнутой струны (оболочки в отсутствие ротора). Действительно, полагая $\mu_p=0$, $F_p=0$, находим уравнение

$$\mu_0\ddot{\vec r}+GM\mu_0\vec r\,|\vec r|^{-3}-\left[f_0(|\vec r'|-1)\,\vec r'/|\vec r'|\right]'=0,\qquad(11)$$

которое изучалось в работах [5–7]. Граничное условие для него следует из (9) и имеет такой вид: $\left[f_0(|\vec r'|-1)\,\vec r'/|\vec r'|\right]_0^l=0$.

Решение нелинейной системы уравнений (7), (8) зависит не только от граничных условий (9), (10), но и от начальных условий, задающих функции $\vec r(a,t=0)$, $b(a,t=0)$, и найти его в общем случае невозможно. Из физических соображений однако ясно, что система уравнений (7), (8) должна иметь решение, описывающее орбитальное кольцо круговой формы с двойным вращением (оболочка вращается с одной угловой скоростью, ротор – с другой). Это решение таково:

$$\vec r(a,t)=R\left[\vec i\cos(\Omega_0t+a/A)+\vec j\sin(\Omega_0t+a/A)\right],\qquad(12)$$

$$b(a,t)=a-ct=a-A\Omega_1t,\qquad(13)$$

где A – радиус, который имело бы кольцо при отсутствии растяжения. Подставляя (12), (13) в (7), (8), находим, что эта система уравнений удовлетворяется, если выполнено условие равновесия

$$\mu_0 R\Omega_0^2 + \mu_p R(\Omega_0+\Omega_1)^2 = GM(\mu_0+\mu_p)R^{-2} + \left[f_0(\gamma-1)+f_p(\gamma-1)\right]\gamma R^{-1}, \qquad (14)$$

где $\gamma = R/A$. Граничные условия (9), (10) при этом также удовлетворяются. Очевидно, что в решении (12), (13) Ω_0 есть угловая скорость вращения оболочки, $\Omega_0 + \Omega_1$ – угловая скорость вращения ротора.

Следующая задача состоит в исследовании устойчивости найденного решения (12), (13) системы уравнений (7), (8), что мы и намереваемся осуществить в дальнейшем.

Список литературы

[1] Laplace P.S. // Mem. Acad. Sci. 1787. Celest. Mech. 1966. V. 2. P. 492–518.

[2] Maxwell J.C. The scientific papers of J.C. Maxwell. P.: Hermann. 1927. P. 288–374.

[3] Ковалевская С.В. В кн.: Ковалевская С.В. Научные работы. М.: АН СССР. 1948. С. 139–152.

[4] Юницкий А.Э. В сб.: Век XX и мир. 1987. № 5. С. 48–53.

[5] Breakwell J.V. // J. Guid and Control. 1981. V. 4. N 2. P. 197–200.

[6] Морозов А.И., Фридман А.М. // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 6. С. 1065–1074.

[7] Белецкий В.В., Левин Е.М. // ПММ. 1986. Т. 50. № 2. С. 179–186.

Гомельский
государственный
университет
им. Франциска Скорины

Поступило в Редакцию
29 декабря 1990 г.