Влияние структурно-нарушенного поверхностного слоя гексагонального кристалла на дисперсию и затухание поверхностных акустических волн Рэлея

© В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин

Московский инженерно-физический институт (Государственный университет),
115409 Москва, Россия

E-mail: kosachev@theor.mephi.ru

(Поступила в Редакцию 14 июня 2007 г.)

С учетом тонкого (по сравнению с длиной поверхностной волны) нарушенного изотропного поверхностного слоя, граничащего с вакуумом и расположенного на поверхности гексагонального кристалла с осью симметрии шестого порядка перпендикулярной поверхности, получены в аналитическом виде дисперсия фазовой скорости и обратная длина затухания поверхностных акустических волн Рэлея. Показано, что в пределе длинных (по сравнению с характерным размером неоднородности) волн, представляющем наибольший интерес для экспериментаторов, изменение дисперсии фазовой скорости волн Рэлея пропорционально второй, а обратная длина затухания — пятой степени частоты. Численно рассчитана обратная длина затухания рэлеевской волны. В настоящей работе ранее предложенный одним из авторов (В.В. Косачев, 1998) метод расчета обобщается на случай изотропного нарушенного слоя на анизотропной (гексагональной) подложке.

PACS: 43.20.Jr, 43.20.Hq, 43.20.Fn

1. Введение

При полировании оптических поверхностей диэлектрических материалов наряду с шероховатостью поверхности возникает так называемый структурно-нарушенный поверхностный слой, который оказывает существенное влияние на акустические свойства материала.

Влияние шероховатости поверхности на распространение поверхностных акустических волн (ПАВ) было рассмотрено в литературе достаточно подробно [1–7]. В настоящей работе структурно-нарушенный слой рассматривается без учета шероховатости.

Одним из возможных методов исследования параметров нарушенного слоя являются ПАВ. В основе исследования структурно-нарушенного слоя с помощью ПАВ лежит утверждение, что упругие свойства среды (плостность и коэффициенты Ламэ) изменяются при наличии различных структурных дефектов, что в свою очередь влияет на характер распространения ПАВ по нарушенному слою. Так, при исследовании поверхности металлов с помощью рэлеевских волн последние используются как средство неразрушающего контроля, позволяющего определять дефекты, степень и глубину термической закалки, остаточные механические напряжения и качество механической обработки поверхности [8].

Актуальной является также задача определения структуры существующего в металлах неоднородного приграничного слоя, свойства которого отличны от объемных характеристик [9,10]. В работах [11,12] изучалось влияние приграничных неоднородностей на характеристики волн Рэлея в коротковолновом пределе (длина волны много меньше характерных размеров дефекта). В работе [13] проведено измерение коэффициента затухания рэлеевской волны из-за рассеяния на неоднородностях нарушенного слоя при различных способах обработки образцов.

В работах [14,15] решается обратная задача: исследование структуры неоднородного поверхностного слоя изотропного материала по дисперсии фазовой скорости волн Рэлея. Рассмотрены флуктуации коэффициентов Ламэ и плотности массы, которые считаются зависящими только от глубины нарушенного слоя.

Иной подход продемонстрирован в работах [16–18], где исследовались влияние индивидуальных свойств структурных дефектов (вакансионная пора, дислокация, микротрещина) и геометрия их расположения относительно поверхности на процесс рассеяния ПАВ Рэлея. Например, в работе [16] на основе вариационного метода рассмотрена задача рассеяния ПАВ Рэлея на пограничных дефектах. Получены коэффициенты отражения и прохождения для случая прямоугольной полости, которая может располагаться как вблизи поверхности, так и на глубине. В работе [17] приведены результаты экспериментальных исследований рассеяния рэлеевских волн двумерной выемкой, сформированной на поверхности алюминиевого образца. Для широкого диапазона значений глубины выемки выполнен полный комплекс измерений параметров рассеянных полей — угловых характеристик рассеянных продольных и сдвиговых объемных волн, а также коэффициентов отражения и прохождения поверхностных волн Рэлея. В работе [18] исследовалась зависимость дислокационного поглощения ПАВ Рэлея от глубины залегания дислокации для наиболее простого случая статических дислокаций, параллельных поверхности. Рассматривались случаи винтовой дислокации у поверхности полубесконечного образца и краевой дислокации, размещенной параллельно поверхности тела. Отдельно получен вклад от полевого затухания ПАВ Рэлея, а также от затухания на ядрах дислокации.

В работах [19–21] найдено дисперсионное соотношение волн Рэлея. В частности, в работе [19] получено дисперсионное соотношение рэлеевских волн в коротковолновой области для стекол со слабым экспоненциальным изменением модулей упругости и плотности в приграничном слое, созданном механической обработкой или методом ионной имплантации. В [20] получена дисперсия фазовой скорости ПАВ Рэлея в длинноволновом пределе для изотропной среды с произвольным типом приповерхностной неоднородности, зависящей только от глубины. В [21] изучалось влияние приграничных неоднородностей на характеристики волн Рэлея в коротковолновом пределе. Считалось, что характеристики слоя зависят только от глубины. Получена дисперсия фазовой скорости и коэффициент затухания.

В работах [22,23] используется подход теории рассеяния для нахождения коэффициента затухания волны Рэлея. Так, в [22] рассмотрено рассеяние волны Рэлея поверхностной неоднородностью плотности массы изотропного твердого тела. Считается, что плотность массы зависит от глубины экспоненциально. В [23] предполагалось, что флуктуации плотности и коэффициентов Ламэ вносят вклад в затухание независимо и также имеют экспоненциальную зависимость от глубины.

Таким образом, анализ приведенной литературы показывает, что существует два подхода для исследования приповерхностного нарушенного слоя.

1) Метод функции Грина [22,23], дающий возможность найти только длину затухания поверхностной волны. При этом в [22] учитывается лишь флуктуация плотности, в то время как в [23] рассматривается еще и флуктуация коэффициентов Ламэ. Однако в обеих работах предполагается, что зависимость характеристик слоя от глубины задается экспонентой, т. е. она детерминирована.

2) Метод среднего поля [19–21], позволяющий найти не только длину затухания, но и дисперсию фазовой скорости. Однако плотность и модули упругости в этих работах считаются зависящими только от глубины, и флуктуации этих параметров не рассматриваются.

В отличие от [19–23] в [24] с помощью модифицированного метода среднего поля [7] найдена дисперсии фазовой скорости и обратная длина затухания волн Рэлея для тонкого изотропного нарушенного слоя на изотропной подложке. Учитывались в произвольной форме как флуктуации плотности, так и флуктуации коэффициентов Ламэ.

Во всех цитированных работах рассматривается только изотропное твердое тело. В настоящей работе метод, предложенный в [24], обобщается на случай анизотропной (гексагональной) подложки.

2. Постановка задачи. Эффективные граничные условия

Пусть на поверхности полубесконечного гексагонального кристалла расположен изотропный слой толщины d, граничащий с вакуумом. Кристалл характеризуется плотностью массы $\rho^{(0)}$ и тензором модулей упругости $C^{(0)}_{\alpha\beta\mu\nu}$, а слой — соответственно $\rho^{(1)}(\mathbf{x})$ и $C^{(1)}_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{x})$. Предполагается, что ось симметрии шестого порядка гексагонального кристалла направлена перпендикулярно поверхности. Кристалл занимает полупространство $x_3 > 0$. Будем считать, что толщина слоя мала по сравнению с длинной рэлеевской волны $d \ll \lambda$. Требуется найти дисперсию фазовой скорости и обратную длину затухания.

Для гармонической волны зависимость поля смещения от времени представляется в виде $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}\,|\,\omega) \times \exp(-i\omega t)$, тогда уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} L^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega) = 0, & -d < x_3 < 0, \\ L^{(0)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)u^{(0)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega) = 0, & 0 < x_3 < +\infty, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$L_{\alpha\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega) = \rho(\mathbf{x})\omega^2\delta_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} C_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Граничные условия можно записать как

$$C^{(1)}_{\alpha3\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{(1)}_{\mu}}{\partial x_\nu}\bigg|_{x_3=-d} = 0,$$

$$C^{(0)}_{\alpha3\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{(0)}_{\mu}}{\partial x_\nu}\bigg|_{x_3=0} = C^{(1)}_{\alpha3\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{(1)}_{\mu}}{\partial x_\nu}\bigg|_{x_3=0},$$

$$\lim_{x_3\to+\infty} u^{(0)}_{\alpha}(\mathbf{x}\,|\,\omega) = 0. \tag{2}$$

Так как $d \ll \lambda$, разложим граничное условие на поверхности в окрестности $x_3 = 0$ — до членов второго порядка малости

$$\begin{aligned} &C^{(1)}_{\alpha3\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)}{\partial x_\nu}\bigg|_{x_3=0-} \\ &= d\,\frac{\partial}{\partial x_3}\left(C^{(1)}_{\alpha3\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)}{\partial x_\nu}\right)\bigg|_{x_3=0-} \\ &\quad - \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(C^{(1)}_{\alpha3\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)}{\partial x_\nu}\right)\bigg|_{x_3=0-} + O(d^3). \end{aligned} \tag{3}$$

Далее исключим из правой части (3) производные по x_3. Для этого левую часть (3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0-} &= -\Gamma^{(1)-1}_{\mu\lambda}(\mathbf{x})C^{(1)}_{\lambda3\mu\Delta}(\mathbf{x}) \\ &\quad\times \frac{\partial u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)}{\partial x_\Delta}\bigg|_{x_3=0-} + O(d), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\Gamma^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}) = C^{(1)}_{\alpha3\mu3}(\mathbf{x})$. Здесь и далее индексы ϕ, Δ, θ пробегают значения 1 и 2. В первом слагаемом в правой части (3) подставим вторую производную по x_3 из уравнения движения, а первую — из (4). В результате получим эффективное граничное условие на поверхности $x_3 = 0$ в первом порядке по d

$$C^{(1)}_{\alpha 3\mu\nu}(\mathbf{x})\,\frac{\partial u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)}{\partial x_{\nu}}\bigg|_{x_3=0-} = -d\omega^2\rho^{(1)}(\mathbf{x})u^{(1)}_{\alpha}(\mathbf{x}\,|\,\omega)\big|_{x_3=0-}$$

$$- d\,\frac{\partial}{\partial x_{\phi}}\,\tilde{C}^{(1)}_{\alpha\phi\mu\Delta}(\mathbf{x})\,\frac{\partial u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)}{\partial x_{\Delta}}\bigg|_{x_3=0-} + O(d^2), \qquad (5)$$

где $\tilde{C}^{(1)}_{\alpha\phi\mu\Delta}(\mathbf{x}) = C^{(1)}_{\alpha\phi\mu\Delta}(\mathbf{x}) - C^{(1)}_{\alpha\phi\gamma 3}(\mathbf{x})\Gamma^{(1)-1}_{\gamma\lambda}(\mathbf{x})C^{(1)}_{\lambda 3\mu\Delta}(\mathbf{x})$.

Далее, подставляя в (3) вторую производную по x_3 из уравнения движения, а первую — из (5), получаем эффективные граничные условия на поверхности $x_3 = 0$ — во втором порядке

$$C^{(1)}_{\alpha 3\mu\nu}(\mathbf{x})\frac{\partial u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}|\omega)}{\partial x_{\nu}}\bigg|_{x_3=0-} = -dM^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)\big|_{x_3=0-}$$

$$+ \frac{d^2}{2}\,N^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)\big|_{x_3=0-} + O(d^3), \qquad (6)$$

где

$$N^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega) = \frac{\partial M^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_{\phi}}\,C^{(1)}_{\alpha\phi\gamma 3}(\mathbf{x})\Gamma^{(1)-1}_{\gamma\lambda}(\mathbf{x})$$

$$\times M^{(1)}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega) - M^{(1)}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}\,|\,\omega)\Gamma^{(1)-1}_{\gamma\lambda}(\mathbf{x})C^{(1)}_{\lambda 3\mu\phi}(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial x_{\phi}},$$

$$M^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega) = \rho^{(1)}(\mathbf{x})\omega^2\delta_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x_{\phi}}\,\tilde{C}^{(1)}_{\alpha\phi\mu\theta}(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial x_{\theta}}.$$

Заметим, что условия (6) получены для кристалла произвольной симметрии.

3. Система уравнений для среднего поля ПАВ

Введем функцию Грина для гексагонального кристалла

$$\begin{cases} L_{\alpha\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)D_{\mu\beta}(\mathbf{x},\mathbf{x}'\,|\,\omega) = \delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \\ C^{(0)}_{\alpha 3\mu\nu}\,\frac{\partial D_{\mu\beta}(\mathbf{x},\mathbf{x}'\,|\,\omega)}{\partial x_{\nu}}\Big|_{x_3=0} = 0, \\ D_{\mu\beta}(\mathbf{x},\mathbf{x}'\,|\,\omega)\big|_{|\mathbf{x}|,|\mathbf{x}'|\to\infty} \to 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Пользуясь интегральной теоремой Грина, можно написать

$$\int\limits_V (u_{\alpha}L_{\alpha\mu}\omega_{\mu} - \omega_{\alpha}L_{\alpha\mu}u_{\mu})d^3x$$

$$= \int\limits_S dS\,\hat{n}_{\beta}C^{(0)}_{\alpha\beta\mu\nu}\left(u_{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\,\omega_{\mu} - \omega_{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\,u_{\mu}\right), \qquad (8)$$

где $\hat{n}_{\beta}$ — единичный вектор нормали к поверхности интегрирования, а $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — произвольные функции.

Выбирая их в виде $u_{\alpha}=D_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{x}'|\omega)$, $\omega_{\alpha}=D_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{x}''|\omega)$, получим из (8) выражение

$$D_{\beta\gamma}(\mathbf{x}'',\mathbf{x}'\,|\,\omega) = D_{\gamma\beta}(\mathbf{x}',\mathbf{x}''\,|\,\omega). \qquad (9)$$

Подставляя в (8) $u_{\alpha} = u_{\alpha}(\mathbf{x}\,|\,\omega)$, $\omega_{\alpha} = D_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{x}'\,|\,\omega)$, получим систему уравнений движения

$$u^{(0)}_{\gamma}(\mathbf{x}'\,|\,\omega)\theta(x'_3)$$

$$= \int d^2x_{\parallel}\left(D_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{x}'\,|\,\omega)C^{(0)}_{\alpha 3\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}u^{(0)}_{\mu}(\mathbf{x}\,|\,\omega)\right)\bigg|_{x_3=0+}, \qquad (10)$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, а $\mathbf{x}_{\parallel} = (x_1, x_2, 0)$.

Рассмотрим (10) на поверхности $x'_3 = 0$. Используя равенство $\mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega) = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)$, граничное условие (2) и свойство (9), получаем

$$u^{(1)}_{\gamma}(\mathbf{x}'_{\parallel}\,|\,\omega)$$

$$= \int d^2x_{\parallel}D_{\gamma\alpha}(\mathbf{x}'_{\parallel},\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)\,C^{(1)}_{\alpha 3\mu\nu}(\mathbf{x}_{\parallel})\,\frac{\partial}{\partial x_{\nu}}\,u^{(1)}_{\mu}(\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega), \qquad (11)$$

где под интегралом в правой части стоит эффективное граничное условие (6).

Далее произведем усреднение по всевозможным реализациям характеристик тонкого слоя. Для этого введем оператор $\hat{P}$, усредняющий все величины, и оператор $\hat{Q} = 1 - \hat{P}$. Любую функцию можно представить в виде $f = \hat{P}f + \hat{Q}f$. Очевидно также, что $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ коммутируют, их квадраты равны им самим и среднее значение единицы $\hat{P}1 = 1$. Пользуясь этими свойствами, а также тем, что (11) можно записать в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}') = \mathbf{L}(\mathbf{x}',\mathbf{x})\,\mathbf{u}(\mathbf{x}), \qquad (12)$$

где $\mathbf{L}(\mathbf{x}',\mathbf{x}) = d\mathbf{L}_1(\mathbf{x}',\mathbf{x}) + d^2\mathbf{L}_2(\mathbf{x}',\mathbf{x}) + O(d^3)$, а d — малый параметр, с точностью до квадратичных членов по d получаем

$$\langle u_{\gamma}(\mathbf{x}'_{\parallel}\,|\,\omega)\rangle = \int d^2x_{\parallel}D_{\gamma\alpha}(\mathbf{x}'_{\parallel},\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)\bigg(-d\langle M^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)\rangle$$

$$+ \frac{d^2}{2}\,\langle N^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)\rangle\bigg)\langle u_{\mu}(\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)\rangle + d^2\int d^2y_{\parallel}d^2x_{\parallel}$$

$$\times D_{\gamma\beta}(\mathbf{x}'_{\parallel},\mathbf{y}_{\parallel}\,|\,\omega)\big(\langle M^{(1)}_{\beta\delta}(\mathbf{y}_{\parallel}\,|\,\omega)D_{\delta\alpha}(\mathbf{y}_{\parallel},\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)M^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)\rangle$$

$$- \langle M^{(1)}_{\beta\delta}(\mathbf{y}_{\parallel}\,|\,\omega)\rangle D_{\delta\alpha}(\mathbf{y}_{\parallel},\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)\langle M^{(1)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)\rangle\big)\langle u_{\mu}(\mathbf{x}_{\parallel}\,|\,\omega)\rangle. \qquad (13)$$

Здесь введено обозначение $\hat{P}f = \langle f\rangle$.

Для вычисления средних значений операторов введем следующие обозначения:

$$\rho^{(1)}(\mathbf{x}_{\parallel}) = \rho_0\big(1 + f_1(\mathbf{x}_{\parallel})\big),$$

$$\lambda(\mathbf{x}_{\parallel}) = \lambda_0\big(1 + f_2(\mathbf{x}_{\parallel})\big),$$

$$\mu(\mathbf{x}_{\parallel}) = \mu_0\big(1 + f_3(\mathbf{x}_{\parallel})\big). \qquad (14)$$

При этом будем считать, что

$$\langle f_i(\mathbf{x}_\parallel)\rangle = 0,$$
$$\langle f_i(\mathbf{x}_\parallel) f_j(\mathbf{x}'_\parallel)\rangle = \varepsilon_{ij} W_{ij}\big(|\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel|\big),$$
$$W_{ij}(0) = 1, \quad \varepsilon_{ij} \ll 1, \tag{15}$$

Предполагаем также, что тонкий слой слабо неоднороден:

$$f_\alpha(\mathbf{x}_\parallel) \ll 1, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Перейдем к Фурье-представлению

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\parallel, \mathbf{x}'_\parallel\,|\,\omega) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp\big(i\mathbf{k}(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel)\big) D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\,|\,\omega),$$

$$u_\alpha(\mathbf{x}_\parallel\,|\,\omega) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}_\parallel)\, u_\alpha(\mathbf{k}\,|\,\omega),$$

$$W_{ij}(|\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{y}_\parallel|) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp\big(i\mathbf{k}(\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{y}_\parallel)\big) g_{ij}(|\mathbf{k}|),$$

$$\delta(\mathbf{x}_\parallel) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}_\parallel), \tag{17}$$

$$\langle f_i(\mathbf{k}) f_j(\mathbf{q})\rangle = \varepsilon_{ij} g(|\mathbf{k}|)(2\pi)^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}), \tag{18}$$

где a_{ij} — корреляционный радиус неоднородности слоя,

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0), \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, 0), \tag{19}$$

а $g(|\mathbf{k}|)$ — поверхностный структурный фактор, который выбираем в гауссовом виде

$$g(|\mathbf{k}|) = \pi a_{ij}^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{k}^2 a_{ij}^2}{4}\right). \tag{20}$$

Тогда (13) принимает вид

$$\langle u_\gamma(\mathbf{k}\,|\,\omega)\rangle = \Big(D_{\gamma\alpha}(\mathbf{k}\,|\,\omega) A_{\alpha\mu}(\mathbf{k}\,|\,\omega) + d^2 D_{\gamma\beta}(\mathbf{k}\,|\,\omega)$$
$$\times \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} B_{\beta\delta\alpha\mu}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}\,|\,\omega) D_{\delta\alpha}(\mathbf{q}\,|\,\omega)\Big)\langle u_\mu(\mathbf{k}\,|\,\omega)\rangle, \tag{21}$$

где $A_{\alpha\mu}(\mathbf{k}\,|\,\omega)$ и $B_{\beta\delta\alpha\mu}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{q}\,|\,\omega)$ приведены в Приложении.

Для упрощения выражений переходим от функций $D_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\,|\,\omega)$ к функциям $d_{\alpha\beta}(k\,|\,\omega)$.

Для этого введем матрицу поворота

$$S(\hat{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & 0 \\ -\hat{k}_2 & \hat{k}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \hat{k}_\phi = \frac{k_\phi}{k}, \tag{22}$$

и следующие обозначения:

$$F_\alpha(\mathbf{k}\,|\,\omega) = S_{\alpha\mu}(\hat{\mathbf{k}})\langle u_\mu(\mathbf{k}\,|\,\omega)\rangle,$$

$$d_{\alpha\beta}(k\,|\,\omega) = S_{\alpha\mu}(\hat{\mathbf{k}}) D_{\mu\nu}(\mathbf{k}\,|\,\omega) S^{-1}_{\nu\beta}(\hat{\mathbf{k}}),$$

$$T^{(i)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}\,|\,\omega) = S_{\alpha\mu}(\hat{\mathbf{k}}) N^{(i)}_{\mu\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}\,|\,\omega) S^{-1}_{\delta\beta}(\hat{\mathbf{q}}) = T^{(i)}_{\beta\alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{k}\,|\,\omega),$$

$$t_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\,|\,\omega) = S_{\alpha\mu}(\hat{\mathbf{k}}) A_{\mu\delta}(\mathbf{k}\,|\,\omega) S^{-1}_{\delta\beta}(\hat{\mathbf{k}}). \tag{23}$$

После сделанных преобразований в (21) пробное интегрирование по углам показывает, что компоненты F_1 и F_3 отделяются от F_2:

$$F_2(\mathbf{k}\,|\,\omega) = \bigg(d_{22}(k\,|\,\omega) t_{22}(\mathbf{k}\,|\,\omega)$$
$$+ d^2 \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} g_{ij}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|)\, K^{ij}_{22}(\mathbf{k}, \mathbf{q}\,|\,\omega)\bigg) F_2(\mathbf{k}\,|\,\omega), \tag{24}$$

$$\begin{pmatrix} F_1(\mathbf{k}\,|\,\omega) \\ F_3(\mathbf{k}\,|\,\omega) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} d_{11}t_{11} + d_{13}t_{31} & d_{11}t_{13} + d_{13}t_{33} \\ d_{31}t_{11} + d_{33}t_{31} & d_{31}t_{13} + d_{33}t_{33} \end{pmatrix}\right.$$
$$+ d^2 \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\, g_{ij}(|\mathbf{k} - \mathbf{q}|)$$
$$\left.\times \begin{pmatrix} K^{ij}_{11}(\mathbf{k}, \mathbf{q}\,|\,\omega) & K^{ij}_{13}(\mathbf{k}, \mathbf{q}\,|\,\omega) \\ K^{ij}_{31}(\mathbf{k}, \mathbf{q}\,|\,\omega) & K^{ij}_{33}(\mathbf{k}, \mathbf{q}\,|\,\omega) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{k}\,|\,\omega) \\ F_3(\mathbf{k}\,|\,\omega) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $K^{ij}_{\alpha\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{q}\,|\,\omega) = d_{\alpha\beta}(k\,|\,\omega) T^{(i)}_{\beta\delta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}\,|\,\omega) d_{\delta\alpha}(q\,|\,\omega) \times T^{(j)T}_{\alpha\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{q}\,|\,\omega)$.

Уравнение (24) описывает преимущественно волны горизонтальной поляризации, а (25) — сагиттальной. Функция Грина для Z-среза полубесконечного гексагонального кристалла со свободной границей получена в [25] для любых значений x_3, x'_3. В нашем случае $x_3 = 0$; $x'_3 = 0$, в результате чего функция Грина существенно упрощается.

4. Дисперсионное соотношение для ПАВ Рэлея

Будем искать дисперсионное соотношение для волн сагиттальной поляризации. Заметим, что условие разрешимости (25), дающее дисперсионное соотношение, можно записать в виде

$$\det(1 + \delta A) = 0. \tag{26}$$

Для любых квадратных матриц 2×2

$$\det(A + \delta A) = \det A + \det A \cdot \mathrm{Sp}\big((A^{-1})^T \delta A\big) + \det \delta A. \tag{27}$$

Из (27) и (26) следует выражение

$$1 = -\,\mathrm{Sp}(\delta A) + \det \delta A. \tag{28}$$

При рассмотрении (25) и (28) видно, что есть компоненты функции Грина $d_{\alpha\beta}(k\,|\,\omega)$, знаменатель которых может обращать правую часть (28) в бесконечность при некоторых значениях переменной k. Умножив (28) на этот знаменатель, получим

$$A(k\,|\,\omega) = Z(k\,|\,\omega), \tag{29}$$

где $A(k\,|\,\omega)$ приведено в Приложении.

При $d = 0$ выражение $Z(k\,|\,\omega)$ обращается в нуль, и уравнение

$$A(k\,|\,\omega) = 0 \tag{30}$$

дает известное дисперсионное соотношение для Z-среза гексагонального кристалла на свободной плоской поверхности [25]. Решение (30) имеет вид

$$\rho\omega_R^2 = c_{44}\varepsilon k^2, \tag{31}$$

где ε зависит только от компонент тензора модулей упругости.

Разлагая далее в (29) $A(k\,|\,\omega)$ в ряд Тейлора по ω в окрестности $\omega = \omega_R$, запишем закон дисперсии в виде

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_R} = \frac{\omega - \omega_R}{\omega_R} = \frac{1}{\omega_R\left(\frac{\partial A(k\,|\,\omega_R)}{\partial\omega}\right)} Z(k\,|\,\omega)\Big|_{\omega\to\omega_R+i\alpha}, \tag{32}$$

где α — малое вещественное число, а

$$Z(k\,|\,\omega) = A(k\,|\,\omega)(d_{11}t_{11} + d_{13}t_{31} + d_{31}t_{13} + d_{33}t_{33})$$
$$- A(k\,|\,\omega)\det\delta A + A(k\,|\,\omega)d^2\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}$$
$$\times\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}g_{ij}(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|)\big(K_{11}^{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\,\omega) + K_{33}^{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\,\omega)\big). \tag{33}$$

В $Z(k\,|\,\omega)$ оставляем только члены, пропорциональные до d^2. Введем переменные

$$\xi_{ij} = ka_{ij}, \quad \eta = \frac{q}{k} \tag{34}$$

и проинтегрируем по углам, используя интегральное представление модифицированной функции Бесселя. В (33) часть подынтегрального выражения содержит в знаменателе $A(q,\omega_R + i\alpha)$, для которого можно записать

$$\frac{1}{A(q,\omega_R+i\alpha)} = P\,\frac{1}{A(q,\omega_R)}$$
$$- i\pi\,\mathrm{Sign}\left(\frac{\frac{\partial A(k,\omega_R)}{\partial\omega}}{\frac{\partial A(k,\omega_R)}{\partial q}}\right)\frac{\delta(\eta-1)}{k\frac{\partial A(k,\omega_R)}{\partial q}}, \tag{35}$$

где символ P означает интегрирование в смысле главного значения Коши, а $\mathrm{Sign}(x)$ — знак x.

В результате получаем дисперсионное соотношение

$$\frac{\Delta\omega(k)}{\omega_R} = \gamma\Bigg[kd\chi + (kd)^2\psi + (kd)^2\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\xi_{ij}^2$$
$$\times\exp(-\xi_{ij}^2/4)\big(A^{ij}(\xi_{ij}) + B^{ij}(\xi_{ij}) + E^{ij}(\xi_{ij})\big)\Bigg]. \tag{36}$$

Здесь

$$A^{ij}(\xi_{ij}) = \int_0^\infty d\eta\,\eta\,\frac{\exp(-\xi_{ij}^2\eta^2/4)}{\alpha_{tt}(\eta)}\sum_{m=\theta}^{4}P_m^{ij}(\eta)I_m(\eta\xi_{ij}^2/2), \tag{37}$$

$$B^{ij}(\xi_{ij}) = P\int_0^\infty d\eta\,\eta\,\frac{\exp(-\xi_{ij}^2\eta^2/4)}{\tilde{A}(\eta)}\sum_{m=0}^{4}Q_m^{ij}(\eta)I_m(\eta\xi_{ij}^2/2), \tag{38}$$

символ P означает интегрирование в смысле главного значения Коши, полюс находится в точке $\eta_0 = 1$, а его значение $E^{ij}(\xi_{ij})$ приведено в Приложении; $I_m(z)$ — модифицированные функции Бесселя,

$$I_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\exp(z\cos\theta)\cos m\theta,$$

χ, ψ, γ — константы, зависящие от характеристик гексагонального кристалла и изотропного слоя.

Остальные величины приведены в Приложении. Матрицы P_m^{ij} и Q_m^{ij} симметричны относительно перестановки верхних индексов.

Комплексный сдвиг частоты делится на вещественную и мнимую части

$$\Delta\omega(k) = \nu_1(k) - i\nu_2(k). \tag{39}$$

При этом $\nu_1(k)$ дает дисперсию фазовой скорости волны Рэлея, а мнимая часть $\nu_2(k)$ — обратную длину затухания

$$\frac{1}{l(k)} = 2k\,\frac{\nu_2(k)}{\omega_R}. \tag{40}$$

Если в задаче о распространении ПАВ по структурно-нарушенному слою положить параметры слоя постоянными величинами, то получится задача о распространении ПАВ в системе „однородный слой на полупространстве“. Рассмотрение такого частного случая дает возможность частично проверить полученные результаты. В частности, в работе [26] найдена дисперсия фазовой скорости для тонкого гексагонального слоя, лежащего на гексагональной полубесконечной подложке, в первом порядке по d. В [27] рассмотрена задача о распространении ПАВ в системе, состоящей из нескольких различных изотропных слоев (суммарная толщина которых мала по сравнению с длиной волны), лежащих на изотропной подложке. При сравнении результатов настоящей работы с результатами [26,27] показано их совпадение.

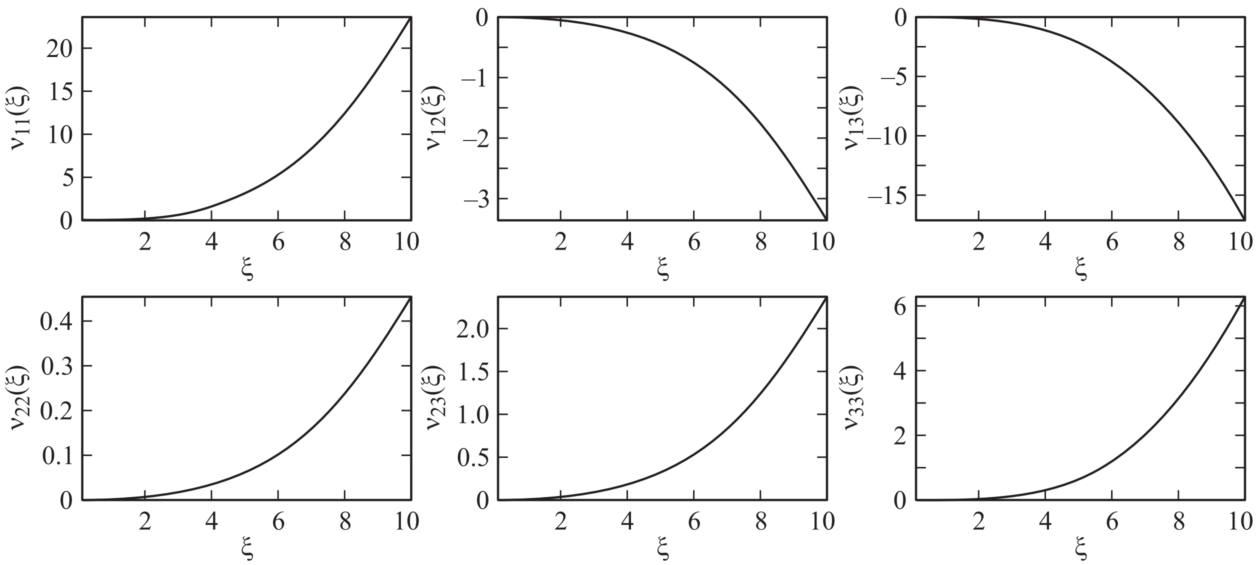
5. Длинноволновой предел

В длинноволновом пределе длина рэлеевской волны λ велика по сравнению со всеми корреляционными радиусами неоднородности a_{ij}.

Рассмотрим вещественную часть (36). Интегралы (37), (38) „набирают“ свое основное значение при $\xi_{ij}\eta = ka_{ij}\eta \approx 1$; следовательно, $\eta \gg 1$. Аргумент модифицированных функций Бесселя мал, поэтому

$$I_m(z) \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m\big(1 + O(z)\big). \tag{41}$$

Мнимая часть интегралов равна нулю при $\eta > \sqrt{\varepsilon/h}$ ≈ 1 для (37) и $\eta > \sqrt{\varepsilon} \approx 1$ для (38), поэтому для



Графики безразмерных функций ν_{ij}, характеризующих обратную длину затухания рэлеевских волн в структуре гексагональная подложка ZnO–изотропный слой ZnO.

вычисления мнимой части нужно под интегралами (37), (38) положить $\xi_{ij}\eta = 0$. В результате получаем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_R} = \gamma Z, \tag{42}$$

$$\mathrm{Re}(Z) = -kdc_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{22})\left(\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon - b_0 - 2\mu_0 - \frac{c_{44}\varepsilon - c_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}c_{33}}\,\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon\right) + \frac{kd}{2}\left(\varepsilon_{33}\,\frac{d}{a_{33}}\,\frac{\sqrt{\pi}\mu_0^2 c_{33}}{c_{44}\sqrt{h}} \times (\alpha_{11}+\alpha_{22}) - \sum_{i,j=2}^{3}\varepsilon_{ij}\,\frac{d}{a_{ij}}\,\frac{2\sqrt{\pi}Q_{ij}}{a_1 c_{33}c_{44}}\right), \tag{43}$$

$$\mathrm{Im}(Z) = \frac{k^4 d^2}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}a_{ij}^2\left(\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}}} d\eta\,\eta\,\frac{P_0^{ij}(\eta)}{\sqrt{\varepsilon - h\eta^2}} + \mathrm{Im}\left(\int\limits_0^{\sqrt{\varepsilon}} d\eta\,\eta\,\frac{Q_0^{ij}(\eta)}{\tilde{A}(\eta)}\right) + E^{ij}(0)\right), \tag{44}$$

где величины Q_{ij} приведены в Приложении.

Отсюда следует, что изменение дисперсии фазовой скорости $\nu_1 \sim k^2 \sim \omega^2$, а обратная длина затухания $1/l \sim k^5 \sim \omega^5$.

6. Численный расчет

Дисперсионное соотношение (36) содержит 15 параметров, характеризующих поверхностный нарушенный слой. Это средние значения ρ_0, λ_0, μ_0 и по шесть независимых компонент ε_{ij} и a_{ij}. Мнимую часть $\Delta\omega$ для волн Рэлея можно записать в виде

$$\mathrm{Im}\,\frac{\Delta\omega}{\omega_R} = -\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\,\frac{d^2}{a_{ij}^2}\,\nu_{ij}(\xi_{ij}), \tag{45}$$

где $\nu_{ij}(\xi_{ij})$ — безразмерные функции, симметричные по нижним индексам и зависящие только от трех величин, характеризующих слой ρ_0, λ_0, μ_0, а $\xi_{ij} = ka_{ij}$ является параметром. В работе [28] предложен метод определения изотропных упругих постоянных поликристаллических систем, полученных из данных для монокристаллов. Взяв из [28] соответствующие параметры, можно построить графики функций $\nu_{ij}(\xi_{ij})$. На рисунке представлены графики $\nu_{ij}(\xi_{ij})$ для волн Рэлея в системе „подложка ZnO с изотропным слоем ZnO". Все представленные на рисунке графики качественно подобны друг другу и различаются в основном знаком и амплитудой.

В частном случае тонких пленок флуктуирует только плотность. В этом случае из всех ε_{ij} отличным от нуля остается только ε_{11} и обратная длина затухания будет определяться только одним графиком $\nu_{11}(\xi)$, представленным на рисунке.

Таким образом, по сравнению с (45) остаются всего два свободных (подгоночных) параметра, характеризующих распределение неоднородностей в нарушенном слое, а именно: корреляционный радиус a_{11} и среднеквадратичная флуктуация плотности $\langle(\rho^{1,f}(\mathbf{x}_\parallel))^2\rangle^{1/2}$.

7. Заключение

В работе впервые исследовано распространение рэлеевских волн вдоль свободной поверхности (гексагонального) кристалла с учетом структурно-нарушенного поверхностного слоя. Поверхностный слой предполагался изотропным и тонким по сравнению с длиной рэлеевской волны. В задаче рассматривалась флуктуация характеристик нарушенного слоя — плотности и коэффициентов Ламэ, произвольно зависящих от пространственных координат. Статистическое распределение флуктуаций неоднородностей нарушенного слоя предполагалось гауссовым. С помощью модифицированного метода среднего поля [7] в аналитическом виде получены дисперсия фазовой скорости и обратная длина затухания во втором порядке по толщине слоя.

В длинноволновом пределе, когда длина волны много больше корреляционных радиусов неоднородностей структурно-нарушенного слоя, показано, что дисперсия фазовой скорости пропорциональна второй степени частоты волны, а обратная длина затухания — пятой.

Для конкретного случая гексагональной подложки ZnO с учетом изотропного поверхностного слоя ZnO обратная длина затухания рэлеевской волны исследована численно.

Поскольку найденное в работе дисперсионное соотношение содержит 15 параметров, характеризующих поверхностный нарушенный слой, обсуждается частный случай тонких пленок, когда остаются всего два параметра, характеризующих распределение неоднородностей в слое. Заметим, что такая упрощенная модель может оказаться весьма полезной при исследовании параметров неоднородностей аморфных пленок.

Приложение

$$A_{\alpha\mu}(\mathbf{k}\,|\,\omega) = -d\rho_0\omega^2\delta_{\alpha\mu} - d\big((b_0+\mu_0)k_\alpha k_\mu + \mu_0 k^2(\delta_{\alpha\mu}-\delta_{\alpha3}\delta_{\mu3})\big) - i\,\frac{d^2}{2}\big(-\rho_0\omega^2 b_1 + k^2(b_0+2\mu_0)\big) \times (\delta_{\alpha3}k_\mu - \delta_{\mu3}k_\alpha); \quad (\Pi1)$$

$$B_{\beta\delta\alpha\mu}(\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{k}-\mathbf{q}\,|\,\omega) = \sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}g_{ij}(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|) \times N^{(i)}_{\beta\delta}(\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\,\omega)N^{(j)T}_{\alpha\mu}(\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\,\omega); \quad (\Pi2)$$

$$N^{(1)}_{\beta\delta}(\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\,\omega) = -\rho_0\omega^2\delta_{\beta\delta},$$

$$N^{(2)}_{\beta\delta}(\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\,\omega) = d_1 k_\beta q_\delta,$$

$$N^{(3)}_{\beta\delta}(\mathbf{k},\mathbf{q}\,|\,\omega) = d_2 k_\beta q_\delta + \mu_0\big(q_\beta k_\delta + (\mathbf{k},\mathbf{q})(\delta_{\beta\delta}-\delta_{\beta3}\delta_{\delta3})\big); \quad (\Pi3)$$

$$b_1 = \frac{d_0}{\lambda_0} + \left(\frac{d_0^3}{\lambda_0^2\mu_0} + \frac{d_0^2}{2\lambda_0\mu_0}\right)\varepsilon_{23} + \frac{d_0^3}{4\lambda_0\mu_0^2}\,\varepsilon_{22} + \frac{d_5}{\lambda_0}\,\varepsilon_{33} - \frac{d_0^2}{2\lambda_0\mu_0}\,\varepsilon_{12} + \frac{d_2}{\lambda_0}\,\varepsilon_{13}; \quad (\Pi4)$$

$$b_0 = d_0 + d_3\varepsilon_{23} + d_4\varepsilon_{22} + d_5\varepsilon_{33}; \quad (\Pi5)$$

$$d_0 = \frac{2\lambda_0\mu_0}{\lambda_0+2\mu_0}, \quad d_1 = d_0 - \frac{d_0^2}{2\mu_0}, \quad d_2 = d_0 - \frac{d_0^2}{\lambda_0}; \quad (\Pi6)$$

$$d_3 = d_0 - \frac{d_0^2}{\lambda_0} - \frac{d_0^2}{2\mu_0} + \frac{d_0^3}{\lambda_0\mu_0}, \quad d_4 = \frac{d_0^3}{4\mu_0^2} - \frac{d_0^2}{2\mu_0},$$

$$d_5 = \frac{d_0^3}{\lambda_0^2} - \frac{d_0^2}{\lambda_0}; \quad (\Pi7)$$

$$E^{ij}(\xi_{ij}) = -i\pi\,\mathrm{Sign}\left(\frac{(1-\varepsilon)\big(2\frac{c_{33}}{c_{11}}\alpha_{11}\alpha_{22} + 2 - 3\frac{c_{44}}{c_{11}}\varepsilon\big) + \varepsilon\big(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\varepsilon\big)}{(1-\varepsilon)\big(2a_1\frac{c_{33}}{c_{11}}\alpha_{11}\alpha_{22} - \varepsilon\big) + \varepsilon\big(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\varepsilon\big)}\right) \times \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}(1-\varepsilon)\exp(-\xi_{ij}^2/4)}{c_{11}c_{44}\Big((1-\varepsilon)\big(2a_1\frac{c_{33}}{c_{11}}\alpha_{11}\alpha_{22} - \varepsilon\big) + \varepsilon\big(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\varepsilon\big)\Big)} \times \sum_{m=0}^{4} Q_m^{ij}(1)I_m(\xi_{ij}^2/2); \quad (\Pi8)$$

$$\gamma = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}(1-\varepsilon)}{c_{11}c_{44}\varepsilon\Big((1-\varepsilon)\big(2\frac{c_{33}}{c_{11}}\alpha_{11}\alpha_{22} + 2 - 3\frac{c_{44}}{c_{11}}\varepsilon\big) + \varepsilon\big(1-\frac{c_{44}}{c_{11}}\varepsilon\big)\Big)}; \quad (\Pi9)$$

$$\chi = -c_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33}) \times \left(\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon - b_0 - 2\mu_0 - \frac{c_{44}\varepsilon - c_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}c_{33}}\,\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon\right); \quad (\Pi10)$$

$$\psi = \left(-c_{13} + \frac{c_{11}-c_{44}\varepsilon}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right)\left(-\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon b_1 + b_0 + 2\mu_0\right) + \frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon + b_0 + 2\mu_0\right)\left(1 + \frac{c_{33}}{c_{44}}\,(a_1-\varepsilon)\right); \quad (\Pi11)$$

$$A(\eta) = c_{13}^2\eta^2 + (c_{11}\eta^2 - c_{44}\varepsilon)\left(\frac{c_{44}\varepsilon}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}} - c_{33}\right); \quad (\Pi12)$$

$$\alpha_{tt}(\eta) = \begin{cases} \sqrt{\eta^2 h - \varepsilon}, & \eta^2 h - \varepsilon \ge 0, \\ -i\sqrt{\varepsilon - \eta^2 h}, & \eta^2 h - \varepsilon < 0; \end{cases} \quad (\Pi13)$$

$$h = \frac{c_{11}-c_{12}}{2c_{44}}; \quad (\Pi14)$$

$$\tilde\alpha_{11}^2 = \frac{1}{2}\big(x + \sqrt{x^2-4y^2}\big), \quad \mathrm{Re}\,\tilde\alpha_{11,22}^2 > 0,$$

$$\tilde\alpha_{22}^2 = \frac{1}{2}\big(x - \sqrt{x^2-4y^2}\big), \quad \mathrm{Im}\,\tilde\alpha_{11,22}^2 < 0,$$

$$x = \left(a_1 + 2\,\frac{c_{13}}{c_{33}}\,\eta^2\right) - \frac{c_{33}+c_{44}}{c_{33}}\,\varepsilon,$$

$$y^2 = \frac{1}{c_{33}}\,(\eta^2-\varepsilon)(c_{11}\eta^2 - c_{44}\varepsilon); \quad (\Pi15)$$

$$\alpha_{11,22} = \tilde\alpha_{11,22}\big|_{\eta=1}; \quad (\Pi16)$$

$$\begin{cases} \left(1-\frac{c_{44}}{c_{33}}\right)\varepsilon^3 + \left(\frac{c_{11}}{c_{33}} - 1 - 2a_1\right)\varepsilon^2 + a_1(2+a_1)\varepsilon - a_1^2 = 0, \\ 0 < \varepsilon < \min(1, a_1), \quad a_1 = \frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{33}c_{44}}; \end{cases} \quad (\Pi17)$$

$$P_0^{11} = -P_2^{11} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \frac{c_{44}\varepsilon^2 c_{33}}{2}\,(\alpha_{11}+\alpha_{22}); \tag{П18}$$

$$P_1^{13} = -P_3^{13} = -\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \frac{\varepsilon\eta\mu_0 c_{33}}{2}\,(\alpha_{11}+\alpha_{22}); \tag{П19}$$

$$P_0^{33} = -P_4^{33} = \eta^2\,\frac{\mu_0^2 c_{33}}{2c_{44}}\,(\alpha_{11}+\alpha_{22}); \tag{П20}$$

$$Q_0^{11} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (c_{44}\varepsilon)^2 \left(\frac{1}{2}\,c_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{22})c_{33}(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22}) + \frac{(c_{44}\varepsilon - c_{11})(\alpha_{11}+\alpha_{22})}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\,\frac{(c_{44}\varepsilon - c_{11}\eta^2)(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22})}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}\right); \tag{П21}$$

$$Q_1^{11} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (c_{44}\varepsilon)^2 2\left(-c_{13} + \frac{c_{11}-c_{44}\varepsilon}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right) \times \left(-c_{13} + \frac{c_{11}\eta^2 - c_{44}\varepsilon}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}\right); \tag{П22}$$

$$Q_2^{11} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (c_{44}\varepsilon)^2 \frac{1}{2}\,c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22}); \tag{П23}$$

$$Q_0^{12} = -\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon\eta d_1\left(c_{13} + \frac{c_{44}\varepsilon - c_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right) \times \left(c_{13} + \frac{c_{44}\varepsilon - c_{11}\eta^2}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}\right); \tag{П24}$$

$$Q_1^{12} = -\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon\eta d_1 c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22}); \tag{П25}$$

$$Q_0^{13} = -\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon\eta(d_2+\mu_0)\left(c_{13} + \frac{c_{44}\varepsilon - c_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right) \times \left(c_{13} + \frac{c_{44}\varepsilon - c_{11}\eta^2}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}\right); \tag{П26}$$

$$Q_1^{13} = -\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon\eta c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22})\left(d_2 + \mu_0\,\frac{3}{2}\right); \tag{П27}$$

$$Q_2^{13} = -\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon\eta\mu_0\left(c_{13} + \frac{c_{44}\varepsilon - c_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right) \times \left(c_{13} + \frac{c_{44}\varepsilon - c_{11}\eta^2}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}\right); \tag{П28}$$

$$Q_3^{13} = -\frac{\rho_0}{\rho}\,c_{44}\varepsilon\eta\,\frac{\mu_0}{2}c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22}); \tag{П29}$$

$$Q_0^{22} = d_1^2\eta^2 c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22}); \tag{П30}$$

$$Q_0^{23} = d_1(d_2+\mu_0)\eta^2 c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22}); \tag{П31}$$

$$Q_2^{23} = \mu_0 d_1\eta^2 c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22}); \tag{П32}$$

$$Q_0^{33} = \eta^2 c_{33}^2\left(d_2^2 + 2\mu_0 d_2 + \frac{3}{2}\,\mu_0^2\right)(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22}); \tag{П33}$$

$$Q_2^{33} = 2\eta^2 c_{33}^2\,\mu_0(d_2+\mu_0)(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22}); \tag{П34}$$

$$Q_4^{33} = \eta^2\,\frac{\mu_0^2}{2}\,c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22}); \tag{П35}$$

$$Q_m^{ij} = Q_m^{ij}, \quad P_m^{ij} = P_m^{ji}. \tag{П36}$$

Остальные элементы P_m^{ij} и Q_m^{ij} равны нулю.

$$Q_{22} = d_1^2 c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22})\left(\sqrt{a_2+b_2} + \sqrt{a_2-b_2}\right); \tag{П37}$$

$$Q_{33} = \left(d_2^2 + 2\mu_0 d_2 + \frac{3}{2}\,\mu_0^2\right)c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22}) \times \left(\sqrt{a_2+b_2} + \sqrt{a_2-b_2}\right); \tag{П38}$$

$$Q_{23} = Q_{32} = d_1(d_2+\mu_0)c_{33}^2(\alpha_{11}+\alpha_{22}) \times \left(\sqrt{a_2+b_2} + \sqrt{a_2-b_2}\right); \tag{П39}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} - \frac{c_{13}}{c_{33}}, \quad b_2 = \sqrt{a_2^2 - \frac{c_{11}}{c_{33}}}. \tag{П40}$$

Список литературы

[1] Е.И. Уразаков, Л.А. Фальковский. ЖЭТФ **63**, 2297 (1972).
[2] В.В. Крылов. В.Е. Лямов. ЖТФ **49**, 2514 (1979).
[3] Ф.Г. Басс, И.М. Фукс. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. Наука, М. (1972). 424 с.
[4] A.G. Eguiluz, A.A. Maradudin. Phys. Rev. B **28**, 728 (1983).
[5] Ю.В. Гуляев, М.А. Магомедов, Р.П. Мейланов. РЭ **6**, 1091 (1985).
[6] В.В. Косачёв, Ю.Н. Лохов, В.Н. Чуков. ЖЭТФ **94**, 162 (1988).
[7] V.V. Kosachev, A.V. Shchegrov. Ann. Phys. (N.Y.) **240**, 225 (1995).
[8] C. Minton. Nondest. Test **12**, 13 (1954).
[9] В.А. Ломакин. Теория упругости неоднородных тел. МГУ, М. (1976). 78 с.
[10] В.П. Алёхин. Физика прочности и пластичности поверхности слоев материалов. Наука, М. (1983). 280 с.
[11] Л.М. Бреховских. Волны в слоистых средах. Наука, М. (1973). 341 с.
[12] И.А. Викторов. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Наука, М. (1981). 287 с.
[13] A.D. Hyndman, S.B. Palmer. Ultrasonic **20**, 73 (1973).
[14] J.M. Richardson. J. Appl. Phys. **48**, 498 (1977).
[15] J.M. Richardson, B.R. Tittmann. J. Appl. Phys. **48**, 5111 (1977).
[16] В.Н. Данилов, В.С. Лищиков. Акуст. журн. **31**, 323 (1985).
[17] С.Ж. Жарылкапов, В.В. Крылов. Акуст. журн. **33**, 878 (1987).
[18] В.Д. Харитонов. ФТТ **27**, 553 (1985).
[19] J.A. Bucaro, L. Flax. J. Appl. Phys. **45**, 765 (1974).
[20] И.А. Кайбичев. Акуст. журн. **32**, 688 (1986).
[21] А.Г. Аленицын. ПММ **37**, 895 (1973).
[22] В.Н. Чуков. ФТТ **39**, 267 (1997).
[23] Masa-aki Narita, Tetsuro Sakuma, Tsuneyoshi Nakayama. J. Appl. Phys. **49**, 5507 (1978).
[24] V.V. Kosachev. Proc. IV Int. Symp. on surface waves in solid and layered structures. St. Petersburg (1998). P. 107.
[25] L. Dobrzynski, A.A. Maradudin. Phys. Rev. B **14**, 2200 (1976); Erratum. Phys. Rev. B **15**, 2432 (1977).
[26] V.R. Velasco, O. Hardouin Duparc, B. Djafari-Rouhani. Surf. Sci. **114**, 574 (1982).
[27] V.V. Kosachev, A.V. Shchegrov. Solid State Commun. **93**, 701 (1995).
[28] O.L. Anderson. Phys. Acoust. B **3**, 80 (1965).