01;02

СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОНА С ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНОЙ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА В ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Ю.А. Победин

Для построения теории многих явлений в реальных физических системах и средах, например, в плазме, твердом теле (взаимодействие с полем тепловых колебаний кристаллической решетки), электронике необходимо определение состояний заряженной частицы в поле электромагнитных волн, потенциалы которого зависят от координаты и времени как $\vec{k}\vec{r}-\omega t$ при наличии столкновений.

В этой работе определим состояния нерелятивистского электрона в поле с потенциалами, разложенными в ряд Фурье по пространственным гармоникам, что имеет место, в частности, в эффекте Смитта–Парселла – генерации электромагнитного поля при прохождении потока электронов вблизи поверхности дифракционной решетки [1], который интересен не только как основа работы лазеров на свободных электронах типа „оротрон" [2], но и как модель процессов, происходящих в плазме и твердом теле. Полагаем, что эффект Смитта–Парселла есть результат взаимодействия электронов с полем медленных гармоник собственного дифрагированного решеткой поля частиц, со скалярным потенциалом

$$\Phi(x,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n(z)\exp i\left(k_n x-\omega t_n\right), \tag{1}$$

где $t_n=t-\frac{\eta_n}{\omega}$, η_n, $r_n(z)=r_n\exp\left(-k_n^z z\right)$ – фаза и амплитуда n-ой гармоники, $k_n^z=k_n\left(1-\left(\frac{v_{ph}^n}{c}\right)^2\right)^{1/2}$, $v_{ph}^n \ll c$ – фазовая скорость n-ой гармоники, c – скорость света, $k_n=\frac{\omega}{v_{ph}^n}$, x – компонента векторного потенциала имеет тот же вид с амплитудой $r_n'=\frac{v_{ph}^n}{c}r_n$ (в калибровке Лоренца). В адиабатическом приближении $\omega\tau\gg 1$ ($\tau=\frac{L}{v}$, v – начальная групповая скорость частицы) полагаем, что $\eta_n, r_n, r_n' = const$.

Ищем состояния частицы вблизи поверхности решетки, разлагаем потенциалы (1) по степеням z (ось Z перпендикулярна плоскости решетки) и в нулевом приближении рассматриваем одномерное движение электрона. В известном нестационарном уравнении Шредингера для электрона в поле (1) опускаем члены $\sim c^{-2}$, c^{-3} и делаем замену переменных:

$$2u_n = k_n x - \omega t_n, \quad t_n' = t_n,$$

где $u_n(L, \tau) \geq u_n \geq 0$, $u_n(L, \tau) = \frac{1}{2}(k_n L - \omega\tau) = \frac{1}{2}\omega(\tau_{ph}^n - \tau)$, $\tau_{ph}^n = \frac{L}{v_{ph}^n}$, а волновую функцию ищем в виде

$$\Psi(u_n, x, t_n') = \varphi(u_n, x, t_n') \exp i(\gamma_n u_n - \Omega t_n'), \tag{2}$$

где $\gamma_n = \frac{2k_{ph}^n}{k_n} = \frac{2\lambda}{\lambda_{ph}^n}$, λ – длина волны поля, $\hbar k_{ph}^n$, λ_{ph}^n – импульс и длина волны де Бройля частицы с групповой скоростью v_{ph}^n, $\hbar\Omega = E$ – энергия частицы, $L \gg \lambda$, L – длина свободного пробега.

Уравнение Шредингера в переменных (u_n, t_n') для функции $\varphi(u_n, t_n', x)$ имеет вид неоднородного уравнения Матье [3]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_n^2} + (p_n^2 + 2q_n \cos 2u_n)\varphi = -\frac{2q_n}{r_n}\left[\hat{W}(x, t_n') + i\frac{\hbar}{e}\frac{d}{dt_n'}\right]\varphi, \tag{3}$$

где $\hat{W}(x, t_n') = e\sum\limits_{n' \neq n} r_{n'} \cos(k_{n'}x - \omega t_n' + \Delta\eta_{n'})$, $\Delta\eta_{n'} = \eta_{n'} - \eta_n$,

$p_n^2 = \frac{2m_n^*}{\hbar^2}(E + E_{\gamma_n}) \geq 0$, $m_n^* = \frac{4m_e}{k_n^2}$, $E_{\gamma_n} = \frac{\hbar}{2m_n^*}\gamma_n^2 = \frac{\hbar^2}{2m_e}(k_{ph}^n)^2$,

$q_n = \frac{2er_n\gamma_n}{\hbar\omega}$.

Из (3) получим функции $\varphi_{p_n}^0(u_n)$ при $q_n = 0$, $\hat{W}(x, t_n') = 0$:

$\varphi_{p_n}^0(u_n) = A_{p_n}^+ \exp(ip_n u_n) + A_{p_n}^- \exp(-ip_n u_n)$.

Тогда волновая функция свободного движения (2) равна

$$\Psi_{p_n, \gamma_n}^0(u_n, t_n') = \psi_{p_n}(u_n, t_n')\psi_{\gamma_n}(u_n, t_n'), \tag{4}$$

где

$\psi_{p_n}(u_n, t_n') = \varphi_{p_n}^0(u_n)\exp(-i\Omega_{p_n}t_n')$, $\hbar\Omega_{p_n} = E_{p_n} = \frac{\hbar^2}{2m_n^*}p_n^2$,

$\psi_{\gamma_n}(u_n, t_n') = \exp i(\gamma_n u_n + \Omega_{\gamma_n}t_n')$, $\hbar\Omega_{\gamma_n} = E_{\gamma_n}$; $\hbar p_n$, $\hbar\gamma_n$ – собственные числа оператора импульса $\hat{p}_n = -i\hbar\frac{\partial}{\partial u_n}$ принимают единственное значение для каждого чистого состояния $|p_n, \gamma_n\rangle$.

Действительно, т. к. $u_n(L,\tau)=const$ $(\tau, \tau_{ph}^n = const)$, то, переходя в (4) к (x, t_n), получим, что

$$v = \frac{\hbar}{2m_e} k_n(p_n + \gamma_n) = const \quad , \quad v_{ph}^n = \frac{\hbar}{2m_e} k_n \gamma_n = const \ .$$

Таким образом, квантованные числа p_n, γ_n являются квантовыми, а из определения скорости v получим, что

$$p_n = \frac{2(k_{in} - k_{ph}^n)}{k_n} = l + \varkappa_n ,$$

где l – целая часть числа p_n, квантованная величина $|\varkappa_n| < 1$, $\hbar k_{in}$ – начальный импульс электрона. Полагаем, что $l=0$, 1, т. к. при $|l| > 1$ происходит процесс „переброса" – резонансное взаимодействие с гармоникой, номер которой $n' \geq n$. Искомая энергия электрона равна

$$E = E_{p_n} - E_{\gamma_n} . \tag{5}$$

Решения уравнения (3) ищем в виде

$$\mathcal{Y}_{p_n}(u_n, x, t_n') = \sum_{j=1}^{2} C_{j,p_n}(x, t_n')\, \varphi_{j,p_n}(u_n, q_n) , \tag{6}$$

где $C_{j,p_n}(x, t_n')$ – неизвестные коэффициенты, $\varphi_{j,p_n}(u_n, q_n)$ ортонормированные на интервале $\left[\frac{1}{2}k_n L ,\ 0\right]$ функции:

$$\langle \varphi_{i,p_n} | \varphi_{j,p_n} \rangle = \int_0^{\frac{1}{2}k_n L} du_n\, \varphi_{i,p_n}^{*}(u_n, q_n)\, \varphi_{j,p_n}(u_n, q_n) = \delta_{i,j} ,$$

$\varphi_{1,p_n}(u_n, q_n) = a_{p_n}^{+} \varphi_{p_n}^{o}(u_n, -q_n)$, $\varphi_{2,p_n}(u_n, q_n) = b_{p_n}\big(\varphi_{1,p_n}(u_n, q_n) +$ $a_{p_n}^{-} d_{p_n} \varphi_{p_n}^{-}(u_n - q_n)\big)$, $\varphi_{p_n}^{\pm}(u_n - q_n)$ – фундаментальная система решений уравнения Матье [3]

$$|a_{p_n}^{\pm}|^{-2} = \langle \varphi_{p_n}^{\pm} | \varphi_{p_n}^{\pm} \rangle , \quad b_{p_n} = \left(|d_{p_n}|^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} ,$$

$$d_{p_n} = -(a_{p_n}^{+})^{*} a_{p_n}^{-} \langle \varphi_{p_n}^{+} | \varphi_{p_n}^{-} \rangle .$$

Подставляя (6) в (3), легко получить, что

$$C_{j,p_n}(x, t_n') = g(x, t_n')\, c_{j,p_n} ,$$

где

$$c_{j,p_n} = const, \quad g(x, t_n') = exp\left[i \frac{q_n}{2\omega} \sum_{n' \neq n} \frac{r_n'}{r_n} \sin(k_{n'} x - \omega t_n' + \Delta \eta_{n'}) \right] .$$

Полагаем, что причиной рассеяния являются локальные искажения поля (1). Пусть при $t_n = 0$ электрон находится в состоянии с „прошедшей" волновой функцией (4), где для $k_{in} \geqslant k_{ph}^n$ ($\rho_n \geqslant 0$) коэффициент $A_{\rho_n}^- = 0$, а величина $|A_{\rho_n}^+|^2$ – коэффициент прохождения. Разлагая функцию $A_{\rho_n}^+ g(x, t_n') \varphi_{\rho_n}^+ |(u_n)$ (4) по функциям $\varphi_{j,\rho_n}(u_n, q_n)$ при $t_n = 0$ легко получить

$$c_{j,\rho_n} = A_{\rho_n}^+ \langle \varphi_{j,\rho_n}(u_n(x,0), q_n) | g^*(x,0) \varphi_{\rho_n}^+(u_n(x,0)) \rangle .$$

Таким образом, волновая функция электрона в поле (1) определена.

Решения уравнения Матье $\varphi_{\rho_n}^{\pm}(u_n - q_n)$ при $\rho_n \neq 0, 1$ имеют вид [3]

$$\varphi_{\rho_n}^{\pm}(u_n, -q_n) = exp(\pm \mu_n u_n) F_{\rho_n}^{\pm}(u_n),$$

где

$$F_{\rho_n}^{\pm}(u_n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m C_{2m+1} \, exp(\pm i(2m+1) u_n),$$

$\mu_n = \mu_n(\rho_n, q_n)$ – характеристический показатель.

В этом случае явный вид волновой функции (2) в переменных (x, t_n), разложенной по плоским волнам, имеет вид

$$\Psi_{\rho_n,\gamma_n}(x,t_n) = g(x,t_n) \Big[D_{\rho_n}^+(x,t_n) \, exp \frac{1}{2} \mu_n (k_n x - \omega t_n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \psi_{m,\rho_n,\gamma_n}^+(x,t_n) +$$

$$+ D_{\rho_n}^-(x,t_n) \, exp\left(-\frac{1}{2}\mu_n(k_n x - \omega t_n)\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \psi_{m,\rho_n,\gamma_n}^-(x,t_n) \Big],$$

где

$$\psi_{m,\rho_n,\gamma_n}^{\pm}(x,t_n) = exp\, i \left(k_{m,\rho_n,\gamma_n} x - \Omega_{m,\rho_n,\gamma_n}^{\pm} t_n\right),$$

$$k_{m,\rho_n,\gamma_n}^{\pm} = \frac{1}{2} k_n (\gamma_n \pm \rho_n \pm 2m), \quad \hbar \Omega_{m,\rho_n,\gamma_n}^{\pm} = \frac{\hbar}{2m_e} \left(k_{m,\rho_n,\gamma_n}^{\pm}\right)^2,$$

$$D_{\rho_n}^{\pm}(x,t_n) = D_{\rho_n}^{\pm} exp(\mp i æ_n u_n(x,t_n)),$$

$$D_{\rho_n}^+ = a_{\rho_n}^+ (c_{1,\rho_n} + b_{\rho_n} c_{2,\rho_n}), \quad D_{\rho_n}^- = a_{\rho_n}^- b_{\rho_n} c_{2,\rho_n}.$$

Известно, что величина μ_n в зависимости от ρ_n, q_n либо мнимая, либо действительная. В случае $Jm \mu_n = 0$ ($=1$) величина

$\Gamma_{pn} = \omega\mu_n$ является постоянной распада состояний с волновыми функциями ψ^+. Одновременно происходит рост состояний с волновыми функциями ψ^-. Частоты переходов кратны ω. Описанная диссипация энергии есть параметрический квантомеханический резонанс [4, 5]. Для $Re\mu_n = 0$ ($l = 0$) состояния стационарны, тогда величина $\frac{1}{2}\omega\mu_n$ – смещение частоты переходов при $m \neq 0$. Полагаем, что $sign\mu_n = sign\rho_n$, включая в рассмотрение состояния с $\rho_n < 0$, получим, что совокупность энергий (5) чистых состояний частиц, резонансно взаимодействующих с n-ой гармоникой поля представляет „сандвич" – зону стационарных состояний между двумя зонами квазистационарных состояний.

В зависимости от функции распределения частиц по скоростям величина суммарного по всем состояниям ρ_n – числа определяет наличие или отсутствие динамического равновесия в системе частицы-поле. При суммарном числе $\rho_n > 0$ происходит диссипация энергии частиц, при суммарном числе $\rho_n < 0$ происходит поглощение энергии поля. Эффект Смитта-Парселла является реализацией процесса релаксации в системе частицы-поле, при котором величина суммарного ρ_n – числа стремится к нулю.

Список литературы

[1] Smith S.L., Purcell E.T. // Phys. Rev. 1953. V. 91. P. 1069-1073.

[2] Русин Ф.С., Богомолов Р.Д. // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11. № 5. С. 756-770.

[3] Мах-Лаклан И.В. Теория и приложение функций Матье. М.: ИИЛ. 1963.

[4] Побединн Ю.А. // ЖЭТФ. 1990. Т. 96. № 5.

[5] Побединн Ю.А. // ЖТФ. 1990. Т. 60. № 5.

Поступило в Редакцию
28 ноября 1991 г.