Письма в ЖТФ, том 18, вып. 6 26 марта 1992 г.
01; 12
© 1992

О МИНИМИЗАЦИИ ДЖОУЛЕВА НАГРЕВА ПРИ ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДУ С ПРОВОДИМОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ КООРДИНАТЫ

Г.А. Шнеерсон

Известно, что при диффузии магнитного поля в проводник происходит адиабатический джоулев нагрев среды. При этом наибольшая объемная плотность энергии $\Delta\theta$ достигается вблизи границы. В частности, при включении поля, индукция которого меняется по синусоидальному закону, граничное значение ΔQ определяется выражением $\Delta Q = QB_m^2/(2\mu_0)$, где B_m – амплитуда индукции. Численный множитель θ зависит лишь от фазы синусоиды ωt и не зависит от частоты и проводимости, если последняя постоянна. Например, для фазы $\omega t = \pi$ число $\theta = 2.18$ [1]. Нагрев проводника можно уменьшить двумя способами – путем перехода к другой форме импульса [2] или за счет перехода к двух- или многослойной среде, в которой проводимость слоев возрастает при удалении от поверхности [3–5]. Численные расчеты показали, что в многослойной среде наименьший нагрев имеет место при условии, что энерговыделение на границах слоев одинаково [5]. Эта наводит на мысль о том, что наименьшее энерговыделение будет иметь место, если мощность, выделяемая в некотором поверхностном слое x_0, не зависит от координаты:

$$\rho(x)\,\delta^2(x,t) = \varphi^2(t). \qquad (1)$$

Здесь ρ – удельное сопротивление, δ – плотность тока. Координата x отсчитывается от поверхности проводника. Условие (1) может быть выполнено лишь при определенной зависимости $\rho(x)$ в слое $x \leqslant x_0$ и некотором, заранее неизвестном, законе изменения индукции на границе $B_e(t)$. При этом $\rho = \rho_0 = const$ за пределами слоя ($x \geqslant x_0$). Аналитическое решение задачи определения $\rho(x)$ и $B_e(t)$ при условии $B(\infty) = 0$ возможно, если плотность тока выражается зависимостью вида

$$\delta(x,t) = \varphi(t)/\lambda(x). \qquad (2)$$

В среде с проводимостью, зависящей от координаты, имеем

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\partial^2(\rho\delta)}{\partial x^2} = 0. \qquad (3)$$

При условии (2) возможно разделение переменных:

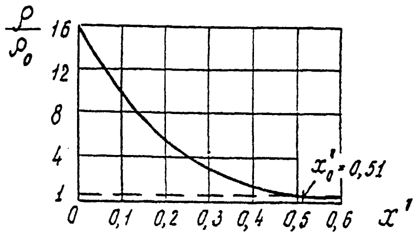

Рис. 1. Пример распределения $\rho/\rho_0 = f(x')$ для $\rho_1/\rho_0 = 16$; $x' = x\left[\mu_0/(2\rho_1 t_0)\right]^{1/2}$.

$$\frac{1}{\varphi(t)}\,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} = \frac{\lambda(x)}{\mu_0}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) = C, \tag{4}$$

где $C = const$. Таким образом, $\varphi(t) = A\exp(Ct)$, а $\lambda(x)$ следует найти уравнения

$$\lambda\,\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) = \mu_0 C, \tag{5}$$

где $\rho(x) = \lambda^2(x)$, если $x \leq x_0$, и $\rho(x) = \rho_0$, если $x \geq x_0$. Константы A и C должны быть найдены по заданным значениям $\rho(0) = \rho_1 = \lambda_1^2$ и $\rho(x_0) = \rho_0 = \lambda_0^2$. Если в точке x_0 имеет место непрерывность не только ρ, но и производной $((\partial\rho/\partial x)_{x_0} = 0)$, то решение уравнения (5) имеет вид

$$x = \int_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{2\mu_0 C\ln\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{\mu_0 C}}\left[\sqrt{\rho_1}\,D\left(\sqrt{\frac{1}{2}\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}}\right) - \sqrt{\rho}\,D\left(\sqrt{\frac{1}{2}\ln\frac{\rho}{\rho_0}}\right)\right], \quad x \leq x_0; \tag{6}$$

$$\lambda = \lambda_0 \exp\left[\sqrt{\frac{\mu_0 d}{\rho_0}}\,(x - x_0)\right], \quad x \geq x_0.$$

Для определения x_0 можно использовать уравнение

$$x_0 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{2\mu_0 C\ln\lambda}} = \sqrt{\frac{2\rho_1}{\mu_0 C}}\,D\left(\sqrt{\frac{1}{2}\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}}\right), \tag{7}$$

где $D=e^{-z^2}\int_0^z e^{z^2}dz$ – интеграл, табулированный в справочнике [5]. Индукция внешнего поля может быть выражена через интеграл от плотности тока

$$B_e=\mu_0\int_0^\infty \delta(x,t)\,dx=\frac{A\exp(Ct)}{\sqrt{C}}\sqrt{\mu_0}\left[\sqrt{\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}}+1\right]. \qquad (8)$$

Первое слагаемое в формуле (8) соответствует току в слое x_0, а второе – току в остальной части проводника. Пусть внешнее поле изменяется по закону $B_e=B_0\exp(t/t_0)$, тогда $C=1/t_0$, $A=$ $=B_0(\mu_0 t_0)^{-1}\left[\sqrt{\ln(\rho_1/\rho_0)}+1\right]^{-1}$, объемная плотность энергии выражается простыми зависимостями

$$\Delta q'(x,t)=\frac{B_e^2(t)}{\mu_0}\,\frac{1}{\left[\sqrt{\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}}+1\right]^2}; \qquad x\le x_0, \qquad (9)$$

$$\Delta q'(x,t)=\Delta q'(x_0,t)\exp\left[-2\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0 t_0}}\,(x-x_0)\right], \qquad x>x_0. \qquad (10)$$

В рассмотренном примере при экспоненциальном нарастании поля плотность энергии джоулевых потерь в проводнике с неоднородной электропроводностью может быть существенно меньше, чем в среде с $\rho=const$. На поверхности проводника ($x=0$) различие характеризуется коэффициентом $\chi=\left[\sqrt{\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}}+1\right]^{-2}$, который может быть достаточно мал, например для $\rho_1/\rho_0=5$ он равен 0.194. Зависимость коэффициента χ от ρ_1/ρ_0, а также графики для $x_0'=$ $=x_0\sqrt{\mu_0\ (2\rho_1 t_0)}$ и пример распределения $\rho(x)$ приведены на рис. 1 и 2. Параметр χ медленно убывает и в пределе $\rho_1/\rho_0\to\infty$ обращается в нуль. Иначе говоря, теоретически энерговыделение может быть сколь угодно мало, если $\rho_1\gg\rho_0$. В этом пределе

$$x_0\approx\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho_1 t}{\mu_0\ln(\rho_1/\rho_0)}}. \qquad (11)$$

Указанный предел может быть достигнут в двух случаях: за счет роста ρ_1, при заданном ρ_0 и за счет снижения ρ_0 при фиксиро-

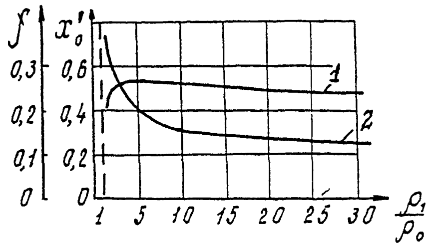

Рис. 2. Кривая 1 – зависимость $\chi = f(\rho_1/\rho_0)$; кривая 2 – $x_0' = f(\rho_1/\rho_0)$.

ванном ρ_1. В первом из этих случаев x_0 растет, а во втором – убывает при увеличении отношения ρ_1/ρ_0.

Список литературы

[1] Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.

[2] Rosenbluth M.N., Furth H.P., Case K.M. // J. Appl. Phys. 1974. V. 45. P. 1094–2001.

[3] Farynski A., Karpinski L., Nowak A. // Journ. Techn. Phys. (Poland). 1979. V. 20. P. 265–280.

[4] Адамьян Ю.Э., Титков В.В., Шнеерсон Г.А.// Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. 1984. № 5. С. 107–107.

[5] Карпова И.М., Титков В.В., Шнеерсон Г.А.// Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. 1988. № 3. С. 122–127.

[6] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

С.-Петербургский
технический университет

Поступило в Редакцию
11 февраля 1992 г.