Письма в ЖТФ, том 18, вып. 7 12 апреля 1992 г.

01

СИММЕТРИИ И КОНСТАНТЫ ДВИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БЛОХА

Б.Д. Агапьев, Е.А. Корсунский,
Б.Г. Матисов

Уравнения Блоха впервые введены [1] для описания магнитного резонанса в ансамбле слабовзаимодействующих двухуровневых квантовых систем. Позже они были распространены на многоуровневые системы [2], а также применены для описания оптического резонанса [3]. Однако до настоящего времени в литературе отсутствует описание симметрий и законов сохранения, допускаемых уравнениями Блоха. Восполнению этого пробела и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим оптические уравнения Блоха [4], записанные для компонент r_i вектора псевдоспина $r(t)$. По форме они совпадают с магнитными уравнениями Блоха [1], записанными для нестационарных компонент магнитного момента

$$\frac{dr}{dt}=\omega\times r-\frac{r}{T_2}-\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)r_3 e_3. \tag{1}$$

Здесь T_1 и T_2 – постоянные времени продольной и поперечной релаксации, e_3 – орт продольной оси координат (оси квантования момента), и ω – обобщенный вектор Раби, пропорциональный вращающему моменту.

Рассмотрим точечные симметрии уравнения (1), то есть преобразования t и r, оставляющие (1) инвариантным. При постоянном векторе Раби левая часть (1) не зависит от выбора начала отсчета времени, поэтому временные трансляции

$$t'=t+\lambda=e^{\lambda X_1}t$$

с инфинитезимальным генератором

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t} \tag{2}$$

являются симметриями уравнений Блоха.

Другой симметрией является растяжение $r'=\lambda r=e^{\lambda X_2}r$

с генератором $X_2=(r\cdot\nabla)$. (3)

Еще одна очевидная симметрия соответствует повороту системы отсчета на произвольный угол вокруг вектора Раби ω

$$r' = r + \lambda\omega \times r$$

с генератором

$$X_3 = [\omega \times r] \cdot \nabla . \qquad (4)$$

Полный набор генераторов группы Ли уравнений Блоха может быть определен в результате решения определяющих уравнений [5] для генераторов. Решая их, можно найти, что приведенные выше генераторы X_1, X_2, X_3 задают фактор-алгебру относительно симметрий

$$X_0 = r_0(t) \cdot \nabla , \qquad (5)$$

отвечающих преобразованиям сдвига в пространстве псевдоспина на произвольное решение уравнений Блоха, и образующих нормальный делитель группы симметрий этих уравнений.

В случае общего положения перечисленными преобразованиями исчерпываются симметрии уравнений Блоха. Однако следует заметить, что в случае равенства нулю отдельных компонент вектора Блоха группа симметрии будет расширяться.

Для нахождения законов сохранения, допускаемых уравнениями Блоха, можно воспользоваться теоремой Нётер. Поскольку ее применение требует предварительного вычисления лагранжиана системы (1), более удобен для наших целей метод Ли [6]. Следуя ему, запишем константу движения $J(t, r)$ в виде функции инвариантов найденной фактор-группы. Требование постоянства $J(t, r)$ на решениях уравнений Блоха определяет вид искомой функциональной зависимости. В общем случае результаты довольно громоздки, однако существенно упрощаются при изотропной релаксации, когда $T_1 = T_2 \equiv T$.

Опуская выкладки, приведем найденные для этого случая константы движения. Их три:

$$J_1 = r e^{t/T} , \qquad (6)$$

$$J_2 = \omega \cdot r e^{t/T} , \qquad (7)$$

$$J_3(A) = (\omega \cdot r)^A e^{-(i\omega - \frac{1}{T}(A+1))t} \cdot \left\{ i\omega \cdot \omega \times r + \omega \times [\omega \times r] \right\} , \qquad (8)$$

где A – произвольный параметр.

Следует отметить, что постоянство отношения

$$\frac{J_2}{\omega \cdot J_1} = \frac{\omega \cdot r}{\omega \cdot r} \qquad (9)$$

означает, что, несмотря на наличие релаксаций, угол, составляемый вектором псевдоспина r и вектором Раби ω, остается неизменным во времени.

Использование найденных законов сохранения упрощает решение уравнений Блоха.

Список литературы

[1] Bloch F. // Phys. Rev. 1946. V. 70. P. 460.

[2] Wangsness R.K., Bloch F. // Phys. Rev. 1953. V. 89. P. 728.

[3] Feynman R.P., Vernon F.L.Jr., Hellwarth R.W. // J. Appl. Phys. 1957. V. 28. P. 49.

[4] Блум К. Теория матрицы плотности и ее приложения. М.: Мир, 1983. 248 с.

[5] Овсянников Л.В. // ДАН СССР. 1958. Т. 118(3) С. 439.

[6] Rudra P. // Pramana J. Phys. 1984. V. 23. P. 445.

С.-Петербургский государственный технический университет

Поступило в Редакцию 4 февраля 1992 г.