Письма в ЖТФ, том 18, вып. 7 12 апреля 1992 г.

01

© 1992

СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИ УСКОРЕННОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ

В.М. Логинов

Эффект стохастического разгона заряженных частиц флуктуациями электрических и магнитных полей является одним из ярких физических примеров трансформации хаотических форм движений в направленные. Изучение подобной организации движений в системе заряженная частица+флуктуирующее электромагнитное поле проводилось в рамках различных моделей и представлений (см., например, [1, 2]). Многие важные вопросы были изучены в рамках одномерной модели [3–5], в частности, известный механизм стохастического ускорения Ферми.

В данном сообщении в рамках одномерной модели анализируется динамика стохастического ускорения частицы массы m и заряда q в случайно-неоднородном электрическом поле $E(x)$, моделируемым гауссовским шумом с произвольным законом спада корреляций. Показано, что „эволюция" средней скорости происходит аналогично процессу изменения температурного поля в полуограниченном стержне, один конец которого поддерживается при заданной температуре. При этом в качестве временной переменной выступает координата, связанная с коррелятором поля, а пространственной – кинетическая энергия частицы на входе в слой стохастической среды. Проведено также рассмотрение частиц, захваченных флуктуациями поля и определена граница области запрета для проникновения частицы в стохастический слой.

Выражение для скорости $V(x)$ частицы в точке x, отвечающее отдельным реализациям случайного поля $E(x)$, имеет вид

$$V(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\varepsilon + q\int_0^x E(y)dy\right)}, \tag{1}$$

где $\varepsilon = \dfrac{mV_0^2}{2}$ – кинетическая энергия частицы в точке $x=0$, рассматриваемой в качестве границы стохастического слоя (т. е. слоя $x > 0$, занятого флуктуирующим полем $E(x)$). Примем, что среднее $\langle E(x)\rangle = 0$ и автокорреляционная функция поля $k(|x-y|) = \langle E(x)E(y)\rangle$ произвольна и зависит лишь от разности аргументов. Здесь и далее угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций гауссова поля $E(x)$.

П р о л е т н ы е   ч а с т и ц ы. Будем называть пролетными те частицы, у которых скорость задается выражением

$$v(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\mathcal{E}+q\int\limits_0^x E(y)dy\right)\theta\left(\mathcal{E}+q\int\limits_0^x E(y)dy\right)}\quad, \tag{2}$$

где $\theta(z)=\begin{cases}1, & z>0\\ 0, & z<0\end{cases}$. Определим среднюю скорость пролетной частицы. Для этого воспользуемся результатом работы [6], в которой было выведено уравнение движения для среднего от некоторой функции $\Phi=\Phi\left(z+\alpha\int\limits_0^x E(y)dy\right)$ по гауссовой мере процесса E, где z – переменная, статистически несвязанная с E, α – параметр. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial x}=\alpha^2\mathcal{D}(X)\,\frac{\partial^2\psi(x,z)}{\partial z^2}, \tag{3}$$

где обозначено $\psi(x,z)=\langle\Phi\rangle$ и

$$\mathcal{D}(x)=\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y k(y-y_1)dy_1 .$$

Среднее $\psi(x,z)$ в пространстве переменных (x,z) задает некоторый диффузионный процесс. При этом существенно, что коэффициент диффузии $\mathcal{D}(x)$ является переменным, зависит от „времени" x и непосредственно определяется видом корреляционной функции поля $E(x)$. Легко видеть, что скорость частицы, определяемая зависимостью (2), относится к классу функции Φ. Поэтому эволюция средней скорости описывается уравнением (3), где следует положить $z=\mathcal{E}$ и $\alpha=q$. Это уравнение еще более упрощается и сводится к уравнению диффузии с постоянными коэффициентами при введении новой „временной" координаты $\tau=\tau(x)=\mathcal{D}(x)$.

Выпишем явный вид начальных (при $\tau=0$) и граничных (при $\mathcal{E}=0$) условий для средней скорости частицы

$$\langle v(0,\mathcal{E})\rangle=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\mathcal{E}}\quad \langle v(x,0)\rangle=\pm\sqrt{\frac{|q|}{\pi m}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt[4]{\tau},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Если трактовать переменные τ и $\mathcal{E}$ соответственно как время и пространственную координаты, то рассматриваемая задача совпадает с задачей о распространении тепла в полуограниченном стержне, один конец которого поддерживается при фиксированной температуре (закон изменения „температуры" определяется зависимостью $\langle v(\tau,0)\rangle$). Решение такой задачи хорошо известно. Используя явный вид начальных и граничных условий (4), получаем

$$\langle v(\tau,\varepsilon)\rangle = \pm\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2q\sqrt{2m\tau}}\varepsilon^{3/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{8q^2\tau}\right)\left[I_{-1/4}\left(-\frac{\varepsilon^2}{8q^2\tau}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+I_{3/4}\left(-\frac{\varepsilon^2}{8q^2\tau}\right)\right]+\frac{2\sqrt{|q|}}{\pi\sqrt{m}}\Gamma(3/4)\int\limits_{\varepsilon/2q\sqrt{\tau}}^{\infty}\times \tag{5}$$

$$\left.\times\left(\tau+\frac{\varepsilon^2}{4q^2\xi^2}\right)^{1/4}\exp(-\xi^2)\,d\xi\right),$$

где $I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя. Выражение (5) является точным и полностью решает задачу об изменении средней скорости пролетной частицы в зависимости от интенсивности флуктуаций электрического поля E и параметров и формы его спектральной функции (напомним, что $\tau = D(x) = \int\limits_0^x dy\int\limits_0^y k(y-y_1)dy_1$).

Будем интересоваться величиной средней скорости, которую набирает частица на больших дистанциях. Рассмотрим простейший случай, когда поле $E(x)$ является гауссовским белым шумом с коррелятором $k(|x-y|) = 2D_0\delta(x-y)$. Это ведет, как легко видеть, к линейной зависимости от x переменной τ, $\tau = D_0 x$. Из (5) при $\varepsilon^2 \ll 8q^2 D_0 x$ получаем

$$|\langle v(x,\varepsilon)\rangle| \approx \sqrt{\frac{|q|}{m}}\sqrt[4]{D_0 x}\ . \tag{6}$$

Таким образом, с ростом дистанции, проходимой частицей в поле гауссовского белого шума, ее средняя скорость растет как $x^{1/4}$. Частица ускоряется флуктуациями поля.

З а х в а ч е н н ы е   ч а с т и ц ы. Этому случаю отвечает отрицательное значение подкоренного выражения в (2). Возникает область запрета для проникновения частицы. Граница x_{cr} этой области определяется из равенства нулю, стоящего под знаком корня выражения и является решением следующего уравнения: $\varepsilon^2 = 2q^2 D(x_{cr})$. Применительно к модели гауссовского белого шума имеем $D(x_{cr}) = D_0 x_{cr}$. Отсюда граница области запрета определяется простой зависимостью

$$x_{cr} = \frac{\varepsilon^2}{2q^2 D_0}\,. \tag{7}$$

Видно, что глубина проникновения частицы в область флуктуирующего поля тем больше, чем больше кинетическая энергия частицы на входе в слой и меньше интенсивность флуктуаций поля и заряд частицы q. В общем случае, произвольной спектральной зависимости флуктуаций, уравнение для x_{cr} является трансцендентным.

В заключение отметим, что из выражения (2) следует также, что характер функциональной зависимости от случайного поля $E(x)$

сохраняется и для любых одноточечных моментов скорости частицы $\langle v^k(x)\rangle$, $k=2, 3, \ldots$. Следовательно, их эволюция в пространстве фазовых переменных (τ, ε) также описывается уравнением вида (3). При этом отличие в поведении моментов обусловливается различием их начальных и граничных условий.

Список литературы

[1] Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. М.: Атомиздат, 1971. С. 423.

[2] Топтыгин И.Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. М.: Наука, 1983. С. 302.

[3] Grappin R.F. // Physica. 1977. V. 88A. P. 434-45[illegible]

[4] Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990. С. 376.

[5] Loginov V.M. // Physica Scripta. 1989. V. 40. P. 449-450.

[6] Логинов В.М. // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 4. С. 186-188.

Поступило в Редакцию
30 декабря 1991 г.