Письма в ЖТФ, том 18, вып. 9 12 мая 1992 г.

03; 12

© 1992

СТАТИСТИКА ИЗМЕРЕНИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ПУЧКОВ КОНДЕНСИРОВАННЫХ ГАЗОВ

В.Ф. Ежов, В.В. Ящук

В работе [1] было показано, что количественные измерения с пучками конденсирующихся газов удобно проводить, регистрируя вторичные частицы, возникающие при столкновении кластеров с поверхностью конструктивных элементов детектора. Это связано с тем, что вторичные частицы, как правило, мономеры [2], для которых калибровка детектора не представляет особый трудностей.

В данной работе подробно рассмотрены вопросы статистики измерений интенсивности пучка кластеров при регистрации вторичных мономеров. Показано, что при подобных измерениях возрастают „нестатические" флуктуации сигнала.

Для обычных условий эксперимента, когда пучок кластеров формируется из сверхзвукового потока конденсированного газа с помощью скиммера с малым отверстием при вершине, расположенного достаточно далеко от детектора, угловая расходимость кластеров пучка обратно пропорциональна $(k)^{1/2}$, где k – число мономеров, составляющих кластер [3]. При этом функция распределения кластеров $g_d(k)$ по числу входящих в них мономеров k, соответствующая пучку, регистрируемому детектором, и исходная функция распределения $g_s(k)$, относящаяся к кластерам в сверхзвуковом потоке, связаны соотношением:

$$g_d(k) = \frac{k}{k_0} g_s(k), \qquad (1)$$

где $k_0 = \alpha_1^s$ – первый нормальный момент распределения $g_s(k)$. Связь между моментами функций распределения $g_d(k)$ и $g_s(k)$

легко установить, обратив внимание на то, что производящая функция $L_d(v)$ для распределения $g_d(k)$ с точностью до константы $1/k_0$ совпадает с первой производной от производящей функции $L_s(v)$ распределения $g_s(k)$:

$$L_d(v)=\sum_k exp(vk)g_d(k)=\frac{1}{k_0}\sum_k k\,exp(vk)g_s(k)=\frac{1}{k_0}L_s'(v). \qquad (2)$$

Нормальные моменты этих распределений выражаются друг через друга:

$$\alpha_1^d=1/k_0\alpha_2^s,\quad \alpha_2^d=1/k_0\alpha_3^s,\ \ldots,\ \alpha_n^d=1/k_0\alpha_{n+1}^s. \qquad (3)$$

Если за время регистрации на детектор пришло n кластеров, среди которых n_k – число кластеров размера k, то полное число образовавшихся из них мономеров m есть:

$$m=\sum_k n_k k=n\left(\sum_k n_k k\right)\left(\sum_k n_k\right)^{-1}=n\hat{k}, \qquad (4)$$

здесь $\hat{k}$ – выборочное среднее, являющееся также случайной величиной с функцией распределения $g_n(\hat{k})$ с параметром n. Так как производящая функция $L_n(v)$ распределения $g_n(\hat{k})$ выборочного среднего $\hat{k}$ связана с $L_d(v)$ соотношением (см., например, [4]):

$$L_n(v)=\left(L_d(v)\right)^n, \qquad (5)$$

то нормальные моменты распределения $g_n(\hat{k})$ выражаются через моменты распределения $g_d(k)$. Для первых трех моментов эти выражения имеют следующий вид:

$$\alpha_1^n=\alpha_1^d, \qquad (6а)$$

$$\alpha_2^n=\frac{1}{n}\left(\alpha_2^d-\left(\alpha_1^d\right)^2\right)+\left(\alpha_1^d\right)^2, \qquad (6б)$$

$$\alpha_3^n=\frac{1}{n^2}\left(\alpha_3^d-3\alpha_1^d\alpha_2^d+2\left(\alpha_1^d\right)^3\right)+$$

$$+\frac{1}{n}\left(3\alpha_1^d\alpha_2^d-3\left(\alpha_1^d\right)^3+\left(\alpha_1^d\right)^3\right. \qquad (6в)$$

Теперь можно перейти к нахождению функции распределения $f(m)$ полного числа мономеров m, образовавшихся в детекторе из кластеров пучка. Для этого введем функцию распределения $\rho(n)$ числа кластеров n и учтем, что случайная величина m

может реализоваться при данном числе кластеров n, если выборочное среднее от числа молекул в кластере $\hat{k} = m/n$:

$$f(m)=\sum_n p(n) g_n(m/n). \qquad (7)$$

И, наконец, стандартный учет вероятности регистрации мономера ε с помощью функции Бернулли $B_\varepsilon(m, i)$ [4] приводит к функции распределения $G(i)$ числа зарегистрированных мономеров i вида:

$$G(i)=\sum_m B_\varepsilon(m,i) f(m). \qquad (8)$$

Отметим, что функция распределения Бернулли в пределе $\varepsilon \sim 0$ и $m \gg 1$ переходит в распределение Пуассона:

$$\pi(i_0, i) = exp(-i_0)\frac{(i_0)^i}{i!} \qquad (9)$$

с параметром $i_0 = m\varepsilon$. Первые три начальных момента распределения Бернулли имеют следующий вид [4]:

$$\alpha_1^B = m\varepsilon, \qquad (10а)$$

$$\alpha_2^B = (\alpha_1^B)^2 + (1-\varepsilon)\alpha_1^B, \qquad (10б)$$

$$\alpha_3^B = (\alpha_1^B)^3 + 3(1-\varepsilon)(\alpha_1^B)^2 + (1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)\alpha_1^B. \qquad (10в)$$

Итак, комбинируя выражения (7) и (8), получим функцию распределения числа зарегистрированных мономеров вида:

$$G(i)=\sum_n p(n)\sum g(m/n) B_\varepsilon(m,i), \qquad (11)$$

начальные моменты которой нетрудно найти, если воспользоваться соотношениями (3), (6), (10). Выпишем первые три из них при вполне естественном предположении, что функция распределения $p(n)$ имеет вид распределения Пуассона (9) с параметром n_0, для которого справедливы соотношения:

$$\alpha_1^p = n_0, \qquad (12а)$$

$$\alpha_2^p = n_0(n_0+1), \qquad (12б)$$

$$\alpha_3^p = n_0\left(n_0^2 + 3n_0 + 1\right). \qquad (12в)$$

Тогда для начальных моментов распределения $G(i)$ имеем:

$$\alpha_1 = i_0 = \mathcal{E} n_0 \alpha_3^s / \alpha_1^s, \qquad (13а)$$

$$\alpha_2 = \left(1 - \mathcal{E} + \mathcal{E}\alpha_3^s/\alpha_2^s\right) i_0 + i_0^2, \qquad (13б)$$

$$\alpha_3 = (1-\mathcal{E})\left(1 - 2\mathcal{E} + 3\mathcal{E}\alpha_3^s/\alpha_2^s + \mathcal{E}^2\alpha_4^s/\alpha_2^s\right) i_0 +$$
$$+ 3\left(1 - \mathcal{E} + \mathcal{E}\alpha_3^s/\alpha_2^s\right) i_0^2 + i_0^3. \qquad (13в)$$

Проанализируем полученные соотношения. Во-первых, обратим внимание, что только при достаточно малой эффективности регистрации, когда в выражениях (13) можно пренебречь всеми слагаемыми, пропорциональными $\mathcal{E}$, распределение $G(i)$ приобретает вид распределения Пуассона с нормальными моментами (12), определяемыми математическим ожиданием i_0. Однако даже при вероятности регистрации $\mathcal{E} \ll 1$ дисперсия сигнала $Di = \alpha_2 - (\alpha_1)^2$ может оказаться существенно больше дисперсии распределения Пуассона $Di_{\mathcal{R}} = i_0$. Действительно, величина такого различия δ, условно назовем ее нестатистичностью, есть:

$$\delta = \left(Di - Di_{\mathcal{R}}\right)/Di_{\mathcal{R}} = \mathcal{E}\alpha_3^s/\alpha_2^s. \qquad (14)$$

Отношение α_3^s/α_2^s по порядку величины можно оценить значением $\alpha_1^s = k_0$. Среднее число мономеров в кластере k_0, как показывает эксперимент (см., например, [5]), может достигать нескольких сотен и даже тысяч. Следовательно, уже при эффективности регистрации $\mathcal{E} \sim 10^{-3}$, соответствующей ионизации электронным ударом, нестатистичность δ может оказаться порядка единицы. При этом будут наблюдаться „нестатистические" флуктуации измеряемого сигнала, то есть дисперсия сигнала от кластеров будет больше, чем для сигнала той же величины от пучка неконденсированного газа.

В заключение обратим внимание на формально имеющуюся возможность определения основных параметров распределения кластеров $g_s(k)$ по числу входящих в них молекул из измерений моментов функции распределения сигнала от вторичных мономеров $G(i)$. Наиболее наглядно это можно показать, если принять в качестве функции $g_s(k)$ распределение Гаусса с параметрами: k_0 – математическое ожидание и σ – среднеквадратичное отклонение:

$$g_s(k) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \exp\left(-(k-k_0)^2/(2\sigma^2)\right), \qquad (15)$$

первые нормальные моменты которого есть:

$$\alpha_1^s = k_0, \tag{16а}$$

$$\alpha_2^s = k_0^2 + \sigma^2, \tag{16б}$$

$$\alpha_3^s = 3k_0\sigma^2 + k_0^3, \tag{16в}$$

$$\alpha_4^s = 3\sigma^4 + 6k_0^2\sigma^2 + k_0^4. \tag{16г}$$

Таким образом, в этом случае имеется три неизвестных параметра: n_0, k_0 и σ, определить которые можно, в принципе, решив систему из трех уравнений (13) с измеренными нормальными моментами функции распределения сигнала от вторичных мономеров.

Список литературы

[1] Ашкинадзи Б.Н. и др. Препринт ЛИЯФ АН СССР №-1751, Л., 1991. 23 с.

[2] Востриков А.А. и др. // ЖТФ. 1981. Т. 51. В. 1. С. 209-214.

[3] Козлов Б.Н. и Щебелин В.Г. // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 1.

[4] Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. М.: Мир, 1968. 462 с.

[5] Петров Ю.И. Кластеры и малые частицы. М.: Наука, 1986. 368 с.

С.-Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова РАН

Поступило в Редакцию 12 февраля 1992 г.

2 Заказ 2028