Письма в ЖТФ, том 18, вып. 16 26 августа 1992 г.

01; 05.2

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

А.В. Мальшаков

В последнее время не ослабевает интерес к проблеме поведения эффективных электрических свойств сильно неупорядоченных сред вблизи порога перколяции [1-3].

Критические индексы теории перколяции являются универсальными, т. е. они не зависят от свойств среды на микроуровне, а зависят только от размерности пространства (см., например, [4]). Однако в природе встречаются материалы, например, пористые среды [5, 6], свойства которых зависят от микроскопических особенностей структуры порового пространства. При изучении таких сред важным является вопрос о соотношении между критическими индексами, знание которых позволило бы из независимых экспериментов находить значения индексов, недоступных прямому измерению.

Предметом данной работы является получение зависимости магнетосопротивления от величины магнитного поля для перколяционной системы и, воспользовавшись соотношением между задачей проводимости и задачей о гальваномагнитных свойствах, нахождения зависимости критического индекса проводимости трехмерной случайно-неоднородной среды от других критических индексов теории перколяции.

Согласно гипотезе подобия, эффективную проводимость сильно неоднородной среды вблизи порога протекания можно представить в автомодельном виде [1].

$$\sigma_{eff} = \sigma_1 h^S \left(\frac{\varepsilon}{h^{S/T}}\right), \tag{1}$$

где параметр $h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ – отношение проводимости фаз, величина ε – отклонение от порога протекания.

В работе [7] был предложен способ нахождения индекса S, который исходит из соответствия между задачей проводимости и задачей о гальваномагнитных свойствах, и показано, что на пороге протекания зависимость поперечной проводимости σ_{xx}^{eff} от магнитного поля H выражается в виде

$$\sigma_{xx}^{eff} \sim \frac{\sigma_0}{(\beta)^{2S}}, \tag{2}$$

где $\beta = \omega_H/\nu_c \gg 1$ (ω_H – ларморова частота, ν_c – частота столкновений).

Для нахождения индекса S авторы работы [7] использовали закон „4/3", т. е. $\sigma_{xx}^{eff} \sim \frac{\sigma_0}{(\beta)^{4/3}}$, полученный в [8], откуда $S = \frac{2}{3}$. Однако при выводе закона „4/3" авторы [8] использовали уравнение диффузии в сплошной среде, тогда как диффузия в перколяционной среде обладает аномальными свойствами [9, 10, 4], учет которых и является целью данной работы.

Для вычисления индекса S воспользуемся методом расчета, использованным в [8] в связи с рассмотрением задачи о проводимости случайно-неоднородных сред в сильно магнитном поле, в которой предлагалось, что случайную функцию $\sigma(r)$ можно грубо охарактеризовать величиной флуктуации $\Delta = \langle(\delta\sigma_{xy})^2\rangle^{1/2}/\langle\sigma_{xy}\rangle$ и масштабом флуктуаций ξ (ξ – корреляционный радиус). Воспользовавшись диффузионной аналогией, авторы [8] свели задачу стационарного протекания тока в случайно-неоднородной среде к уравнению конвективной диффузии со скоростью

$$v \sim \frac{\sigma_0 \Delta}{\beta \xi}. \tag{3}$$

Эффективный коэффициент диффузии можно найти из известной формулы

$$\sigma_\perp^{eff} = \lim \frac{\langle r_\perp^2(t)\rangle}{4t}, \tag{4}$$

где $r_\perp(t)$ – смещение частицы поперек магнитного поля за время t, а скобки означают усреднение по всевозможным диффузионным траекториям.

Среднее квадратичное смещение рассчитывается по формуле

$$\langle r_\perp^2(t)\rangle = \int_0^t\int_0^t \langle v(z(t_1))\, v(z(t_2))\rangle\, dt_1\, dt_2 , \tag{5}$$

где угловые скобки означают усреднение как по всевозможным диффузионным траекториям, так и по ансамблю случайных полей v. Поскольку $\langle v(z_1)\, v(z_2)\rangle$ зависит только от разности $z_1 - z_2$, то

$$\langle v(z(t_1))\, v(z(t_2))\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle v(0)\, v(z)\rangle\, G(z, t_1 t_2)\, dz, \tag{6}$$

где $G(z, t_1, t_2)\,dz$ дает долю траекторий, попадающих за время $|t_1 - t_2|$ из точки $z=0$ в отрезок $z, z+dz$; $G(z, t_1, t_2)$ – вероятность частице попасть из точки $z=0$ в точку z за время $|t_1 - t_2|$.

Функцию $G(z, t_1, t_2)$ можно получить из решения уравнения диффузии на перколяционном кластере или фрактале, которая была получена в работах [9, 10], а также приведена в [4] и в случае одномерного движения принимает вид

$$G(z,t) = \frac{2+\theta}{\Gamma(1/2+\theta)}\left(D_0(2+\theta)^2 t\right)^{-1/2+\theta} exp\left(-\frac{z^{2+\theta}}{D_0(2+\theta)^2 t}\right), \qquad (7)$$

где θ – критический показатель, называемый показателем аномальной диффузии и связанный с критическими индексами теории перколяции.

Подставляя выражение (6) в (5), получим

$$\langle r_\perp^2(t)\rangle = \int_0^t\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} \langle v(0)v(z)\rangle G(z, t_1, t_2)\,dt_1, dt_2, dz. \qquad (8)$$

Коррелятор $\langle v(0)\, v(z)\rangle$ существенно отличен от нуля при $z \lesssim \xi$ и нас будет интересовать $\langle r_\perp^2(t)\rangle$ при $t \gg \frac{\xi^{2+\theta}}{D_0}$.

В интеграле (8) существенны $|t_1 - t_2| \gg \frac{\xi^{2+\theta}}{D_0}$, а в этой области экспоненту можно заменить единицей.

При этом получим

$$\langle r_\perp^2(t)\rangle \sim \frac{t^{\frac{3+2\theta}{2+\theta}}}{D_0^{1/2+\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \langle v(0)v(z)\rangle dz. \qquad (9)$$

Интеграл в выражении (9), вообще говоря, порядка $v^2 \xi^{\frac{2}{2+\theta}}$ (здесь учтено, что в присутствии постоянной внешней силы расстояние z, пройденное частицей по фрактальной структуре будет соответствовать расстоянию $z^{\frac{2}{2+\theta}}$, пройденному по евклидовому пространству [11]).

Тогда (9) станет

$$\langle r_\perp^2(t)\rangle \sim \frac{t^{\frac{3+2\theta}{2+\theta}}\, v^2 \xi^{\frac{2}{2+\theta}}}{D_0^{\frac{1}{2+\theta}}}. \qquad (10)$$

Найдем время корреляции τ_ξ из уравнения $r_\perp(\tau_\xi)=\xi$:

$$\tau_\xi \sim \frac{D_0^{\frac{1}{3+2\theta}}\,\xi^{\frac{2+2\theta}{3+2\theta}}}{v^{\frac{4+2\theta}{3+2\theta}}}. \tag{11}$$

При $t>\tau_\xi$ перенос частицы становится диффузионным с эффективным коэффициентом диффузии

$$\sigma_\perp^{eff} \sim \frac{r_\perp^2(\tau_\xi)}{\tau_\xi} \sim \frac{v^{\frac{4+2\theta}{3+2\theta}}\,\xi^{\frac{4+2\theta}{3+2\theta}}}{D^{\frac{1}{3+2\theta}}} \sim \frac{\sigma_0}{(\beta)^{\frac{1+2\theta}{3+2\theta}}}, \tag{12}$$

где $\theta=\frac{T-\beta_b}{V}$ и T, β_b, v – критические показатели теории перколяции (проводимости, вероятности принадлежать бесконечному кластеру и корреляционной длины соответственно). Значения величин T, v равны 1.7 и 0.88, соответственно [4]. Величину критического индекса β_b для скелета бесконечного кластера найдем из известного выражения для фрактальной размерности $D_b=d-\frac{\beta_b}{v}$, значение которого для скелета бесконечного кластера известно из численного эксперимента $D_b=1.68\pm0.14$ (см.,например, [4]). Откуда находим $\beta_b\approx1.19$.

Из формулы (12) видно, что учет аномальной диффузии на перколяционном кластере приводит к появлению в законе „4/3" дополнительных слагаемых в показателе и числителе.

В работе (12) проводился численный расчет методом Монте-Карло магнетосопротивления от величины магнитного поля и получена величина показателя степени 1.19 (доверительные границы в использованном методе наименьших квадратов с вероятностью 0.95 от 1.1 до 1.27), что существенно ниже, чем это следует из закона „4/3 и лучше согласуется с выражением (12). Такое расхождение с законом „4/3" можно объяснить тем, что при увеличении величины поля H аномальный дрейф носителей создается все более мелкими неоднородностями, что и приводит к необходимости учета аномальной диффузии.

Из сравнения (12) и (2) находим, что индекс S равен

$$S=\frac{2+\theta}{3+2\theta}. \tag{13}$$

Подставляя значения T, v, β_b в (13), получим значение индекса $S=0.62$. В работе [1] получено значение $S=0.62$ в соответствии с компьютерным моделированием [13], что согласуется с выражением (13) и отличается от величины следующей из закона „4/3".

В заключение отметим работу [14], в которой рассматривалось наличие нескольких режимов аномального сопротивления случайно-неоднородной среды в сильном магнитном поле, которые также должны наблюдаться в перколяционной системе.

Список литературы

[1] Efros A.L., Shklovskii B.J. // Phys. Stat. Sol (b). 1970. P. 475-485.

[2] Виноградов А.П., Каримов А.М., Сарычев А.К. // ЖЭТФ. 1988. Т. 91. В. 10. С. 301-308.

[3] Clerc S.P., Giraud G., Lauqier J.M., Luck J.M. // Adv. in Phys. 1990. V. 39. N 3. P. 191-309.

[4] Соколов И.М. // УФН. 1986. Т. 150. В. 2. С. 221-255.

[5] Мальшаков А.В., Ефимов В.А. // ИФЖ. 1991. Т. 61. В. 4. С. 635-640.

[6] Halperin B.J., Feng S., Sen P.N. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. N 22. P. 2391-2394.

[7] Архинчеев В.Е. // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 50. С. 293-295.

[8] Дрейзин Ю.А., Дыхне А.М. // ЖЭТФ. 1972. Т.63. В. 1(7). С. 242-260.

[9] O'Shaughnessy B., Procaccia J. // Phys Rev. Lett. 1985. V. 54. N 5. P. 455-458; Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 3073-3083.

[10] Hentshel H.G.E., Procaccia J. // Phys. Rev. A. 1984. V. 29. N 3. P. 1461-1470.

[11] Ohtsnki T., Keyes T. // Phys. Lett. 1984. V. 105. N 6. P. 273-276.

[12] Коробова И.Л., Кудинов В.А., Мойжес Б.Я. // ЖТФ. 1977. Т. 47. С. 1319-1323.

[13] Webman I., Sortner J., Cohen M.H. // Phys. Rev. B. 1975. V. 11. P. 2885-2889.

[14] Исиченко М.Б., Калда Я.Л. // ЖЭТФ. 1991. Т.99. В. 1. С. 224-236.

Поступило в Редакцию

21 апреля 1992 г.