

01; 03

© 1992

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РАЗРЕЖЕННОЙ
МЕЛКОДИСПЕРСНОЙ ГАЗОВЗВЕСИ

В.Я. Р у д я к

Настоящая заметка посвящена выводу кинетических уравнений мелкодисперсной разреженной газовой взвеси. Предполагается, что несущей фазой является газ бесструктурных молекул, а взвешенные частицы представляют собой твердые сферы радиуса R_0 . Мелкодисперсными здесь называются частицы, для которых $r_0 \ll R_0 \ll \lambda$, где r_0 , λ — соответственно эффективный радиус и длина свободного пробега молекул газа. Будем считать, что $R_0 \sim r'$, r' — физически бесконечно малый масштаб длины. Так как $r' \sim \sqrt{\varepsilon_g} \lambda$ [1], то данная система характеризуется соотношениями: $R_0 \sim \sqrt{\varepsilon_g} \lambda$, $\varepsilon_g = n_g r_0^3 \ll 1$, $\varepsilon_p = n_p R_0^3 \ll 1$, где n_g , n_p — соответственно плотности несущего газа и взвешенной фазы. Для простоты здесь рассматривается столь разреженная газовая взвесь, что взаимодействием частиц между собой можно пренебречь.

Пусть газовая взвесь состоит из n взвешенных частиц и $(N-n)$ молекул. Ее динамика описывается функцией распределения F_N , которая удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\partial F_N / \partial t + L F_N = 0, \quad L = L_{(N-n)g} + L_{np}, \quad (1)$$

$$L_{(N-n)g} = \sum_{i=n+1}^N \left[\frac{\vec{P}_i}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{R}_i} - \sum_{j>i}^N \theta_{ij} - \sum_{j=1}^n \pi_{ij} \right],$$

$$L_{np} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\vec{P}_i}{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{R}_i} - \sum_{j=n+1}^N \pi'_{ij} \right],$$

где \vec{R}_i , \vec{R}_j — соответственно радиус-векторы i -й молекулы и j -й частицы, \vec{P}_i , \vec{P}_j — их импульсы, а m и M — массы. Операторы θ_{ij} описывают взаимодействие молекул, π_{ij} и π'_{ij} — молекул с частицами.

Поскольку $m/M \sim r_0^3/R_0^3 \sim \varepsilon_g^{3/2}$, то нетрудно убедиться, что уравнение (1) содержит малый параметр $\mu \sim \sqrt{m/M} \ll 1$, причем $L_{np} \sim \mu$, $\pi'_{ij} \sim \mu$.

Для получения кинетических уравнений введем обычным образом [2, 3] S -частичные функции распределения. Интегрируя затем по фазовым переменным молекул, $x_i = \{\vec{R}_i, \vec{P}_i\}$ и частиц $X_j = \{\vec{R}_j, \vec{P}_j\}$,

деления молекул F_{1g} и частиц F_{1p} :

$$\frac{\partial F_{1g}}{\partial t} + L_{1g} F_{1g} = n_g \int dx_{n+2} \theta_{n+1, n+2} F_{2g} + n_p \int dX_n \Pi_{n, n+1} F_{11}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial F_{1p}}{\partial t} + L_{1p} F_{1p} = n_g \int d\alpha_{n+1} \Pi'_{n, n+1} F_{11}.$$

Эти уравнения не замкнуты относительно функций F_{1g} и F_{1p} . Так как газовзвесь предполагается разреженной, то парные функции распределения молекул F_{2g} вычисляются стандартно [2] и равны

$$F_{2g} = S_{-t}^{(2g)} F_{1g}(t) F_{1g}(t), \quad (3)$$

где $S_{-t}^{(kg)}$ - предельный оператор сдвига по траектории k молекул.

Парную функцию распределения молекул и частиц F_{11} , входящую в уравнения (2), необходимо вычислить для конфигурации $(\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n) \lesssim R_0$. В пределе разреженного газа при выводе кинетических уравнений следует пренебречь членами порядка ε_g , ε_p и меньше. Поэтому на масштабах порядка R_0 функция F_{11} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial t} + (L_{1g} + L_{1p} - \Pi'_{n, n+1} - \Pi_{n, n+1}) F_{11} = n_g \int dx_{n+2} (\theta_{n+1, n+2} + \Pi'_{n, n+2}) F_{21}, \quad (4)$$

причем $L_{1p} \sim \Pi'_{n, n+1} \sim \varepsilon_g^{3/4}$, первый член в правой части уравнения (4) порядка $\varepsilon_g^{1/2}$, а второй - $\varepsilon_g^{1/4}$.

Таким образом, в приближении разреженной газовзвеси функцию F_{21} следует вычислять с разной точностью. Для конфигурации $|\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_{n+2}| \lesssim r_0$ с точностью до членов $O(\varepsilon_g^{1/4})$ включительно, а для конфигурации $|\vec{r}_{n+2} - \vec{r}_n| \lesssim R_0$ - с точностью до членов $O(\varepsilon_g^{1/2})$. Для этого, как можно показать, следует вычислить также функции F_{31} и F_{41} , т.е. функции, определяющие совместную динамику трех молекул и частицы, и четырех молекул. Физически это связано с необходимостью учесть возможность одновременного взаимодействия нескольких молекул с частицей и корреляций, возникающих между молекулами и обусловленных их последовательным взаимодействием с частицей.

В настоящей заметке мы для простоты ограничимся вычислением функции F_{11} с точностью $O(\varepsilon_g^{1/4})$, а поправками порядка $\varepsilon_g^{1/2}$ и $\varepsilon_g^{3/4}$ будем пренебрегать. В уравнении (4) тогда можно опустить члены L_{1p} и $\Pi'_{n, n+1}$ и первый член в правой части.

Функция F_{21} для конфигурации $|\vec{r}_n - \vec{r}_{n+i}| \lesssim R$, определяющая второй член в правой части (4), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial t} + \left(L_{2g} - \sum_{i=1}^2 \Pi_{n, n+i} \right) F_{21} = 0. \quad (5)$$

В разреженном газе пространственные и временные масштабы порядка r_0 и τ_0 (τ_0 - время взаимодействия молекул) не различимы. И чтобы вычислить функции F_{21} на масштабах порядка R_0 , необходимо ввести огрубленные соответствующим образом функции и уравнения. Огрубление производится усреднением функции F_{21} и уравнения (5) по физически бесконечно малым для разреженного газа объему и времени [4]. Усредненную таким образом функцию F_{21} обозначим f_{21} . Эта последняя удовлетворяет уравнению (сравни с уравнением (5))

$$\frac{\partial f_{21}}{\partial t} + \sum_{i=n+1}^{n+2} \frac{\vec{P}_i}{m} \cdot \frac{\partial f_{21}}{\partial \vec{r}_i} - \sum_{i=1}^2 \Pi_{n, n+i} f_{21} = 0,$$

решение которого имеет вид: $f_{21}(t) = \Omega^{(21)} F_{1p}(t) F_{1g}(t)$
 где $\Omega^{(21)} = S_{-t}^{(21)} S_t^{(1g)} S_t^{(1g)} S_t^{(1p)}$, $S_{-t}^{(kz)}$ - предельный оператор сдвига по траектории k взаимодействующих молекул и z частиц, $S_t^{(1p)} S_t^{(1g)}$ - операторы сдвига по траектории изолированных частиц и молекулы соответственно.

Это решение позволяет замкнуть систему кинетических уравнений газовзвеси. Функции F_{1g} и F_{1p} удовлетворяют уравнениям (2), (3), а F_{11} - уравнению

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial t} + \frac{\vec{P}_{n+1}}{m} \cdot \frac{\partial F_{11}}{\partial \vec{r}_{n+1}} - \Pi_n F_{11} = n_g \int dx_{n+2} \Pi'_{n, n+2} \Omega^{(21)} F_{1p} F_{1g} F_{1g}.$$

Интегрируя его и используя ослабления начальных корреляций, находим

$$F_{11}(t) = \Omega^{(11)} F_{1g} F_{1p} + n_g \int dx_{n+2} \int_0^t dt' \Omega_{-t'}^{(11)} \Pi'_{n, n+2} \Omega^{(21)} F_{1p} F_{1g} F_{1g}. \quad (6)$$

Подстановка первого члена решения (6) в (2) приводит к большим интегралам перекрестных столкновений молекул с частицей. Именно такие интегралы столкновений и использовались обычно при кинетическом описании разреженных газовзвесей. Второй член решения (6) приводит к появлению в кинетических уравнениях и несущего газа, и взвешенных частиц интегралов столкновений, учитывающих тройные столкновения двух молекул с частицей и соответствующие последовательности парных столкновений. Учет этих интегралов столкновений принципиален. При обычных условиях он будет определять поправки к характеристикам переноса газо-

звеси в десятки процентов. Напротив, ограничиваясь учетом поправок порядка $\varepsilon^{1/4}$, вполне можно пренебречь вкладом столкновений в недиссипативные характеристики газозвеси.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] К л и м о н т о в и ч Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975. 352 с.
- [2] Б о г о л ю б о в Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 119 с.
- [3] Р у д я к В.Я. Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Наука, 1987. 272 с.
- [4] Р у д я к В.Я. Изв. АН СССР. МЖТ. 1989. В. 6. С. 154-160.

Новосибирский
инженерно-строительный институт

Поступило в Редакцию
1 октября 1992 г.