

# Объемная спин-волновая электродинамика антиферромагнитной пластины в постоянном внешнем электрическом поле

© А.С. Савченко, С.В. Тарасенко

Донецкий физико-технический институт Национальной академии наук Украины,  
83114 Донецк, Украина

E-mail: tarasen@mail.fti.ac.donetsk.ua

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 24 октября 2007 г.)

На примере пластины легкоосного антиферромагнетика с центром симметрии определены условия, при которых во внешнем постоянном электрическом поле качественно изменяется не только характер рефракции объемной  $TM$ -волны, падающей из вакуума на поверхность магнетика, но и структура спектра распространяющихся объемных магнонов. Изучена связь найденных эффектов с формой поверхности рефракции нормальных  $TM$ -поляритонов.

PACS: 41.20.-q, 03.65.Ge, 78.20.Ls

## 1. Введение

Определение условий, при выполнении которых распространяющаяся в магнитном кристалле спиновая волна сопровождается квазиэлектростатическим полем, представляется важным прежде всего потому, что в этом случае имеется возможность как для целенаправленного воздействия на спектр спиновых волн с помощью внешнего электрического поля, так и для формирования косвенного спин-спинового обмена через дальнедействующее электродипольное взаимодействие [1]. Подобный анализ приобретает особое значение, прежде всего в тех случаях, когда исследуемый тип нормальных магнитных колебаний по тем или иным причинам не является магнитодипольно-активным. Как показано в [2–8], именно такая ситуация может реализоваться, например, для оптических или акустических магнонов в многоподрешеточных магнитных кристаллах (в частности, антиферромагнитных) при условии, что участвующие в формировании нормальной спиновой волны магнитные атомы находятся не в centrosymmetric позициях. Естественно, что наиболее эффективным такой механизм формирования дисперсии спектра распространяющихся спиновых колебаний будет для магнонов акустического типа, которые, как известно, могут обладать малыми энергиями активации либо вблизи границы устойчивости данного магнитного состояния (например, мягкая магнонная мода вблизи спин-ориентационного фазового перехода), либо в силу особых симметричных свойств кристалла (например, магнитные кристаллы с кубической или легкоплоскостной магнитной анизотропией). В работах [9–13] впервые было показано, что в тех случаях, когда в неограниченном центроантисимметричном магнетике имеет место формирование магнитного  $TM$ -поляритона ( $E$ -волны), в тонкой пластине этого магнетика в кулоновском пределе (т.е. при  $\omega/c \rightarrow 0$ , где  $\omega$  — частота поляритона,  $c$  — скорость света в вакууме) становится возможным существование нового типа распространяющихся безобменных объемных спин-волновых возбуждений — электростатических спиновых

волн (ЭСВ). Данный тип безобменных магнонов является электродипольно-активным аналогом хорошо известного класса безобменных магнонов — магнитостатических спиновых волн. Поскольку магнитостатическая спиновая волна представляет собой кулоновский предел магнитного  $TE$ -поляритона ( $H$ -волны), в дальнейшем, следуя [9], будем называть кулоновские магнитные  $TE$ - и  $TM$ -поляритоны соответственно магнонами  $H$ - и  $E$ -типа. Физическим механизмом, ответственным за формирование дисперсии в объемной безобменной спиновой волне  $E$ - или  $H$ -типа, является косвенное взаимодействие магнитных моментов через дальнедействующее электростатическое или магнитостатическое поле соответственно.

Однако несмотря на то что число работ, посвященных этой теме, непрерывно возрастает, все они выполнены при следующих, существенных для целей настоящей работы ограничениях: 1) как правило, роль постоянного электрического поля  $\mathbf{E}$  (не меняющего равновесную магнитную конфигурацию по сравнению со случаем  $\mathbf{E} = 0$ ) сводилась лишь к формированию дополнительной энергии активации в спектре нормальной спиновой волны (случай фазовых переходов, индуцированных электрическим полем [14], здесь не рассматривается); 2) подавляющая часть теоретических исследований проводилась для модели неограниченного или полуограниченного кристалла [15–17]; 3) рассматривались только магнитные среды, обладающие линейным магнитоэлектрическим эффектом, для чего требуется, чтобы магнетик удовлетворял определенным симметричным свойствам [4–13].

Вместе с тем хорошо известно, что одной из особенностей взаимодействия электромагнитной волны со спиновой подсистемой магнитного кристалла даже без учета конечных размеров реального образца является существование при любой кристаллической симметрии квадратичных магнитооптических эффектов [14–17]. Так, для модели двухподрешеточного обменно-коллинеарного антиферромагнетика ( $\mathbf{M}_{1,2}$  — намагниченности подрешеток,  $|\mathbf{M}_1| = |\mathbf{M}_2| = M_0$ ,  $M_0$  — модуль намагниченности

отдельной подрешетки) квадратичное магнитооптическое взаимодействие может быть представлено в виде [15]:

$$F_{mo} = -\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} l_{\alpha} l_{\beta} E_{\gamma} E_{\delta} / 8\pi. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — тензор магнитооптических констант,  $\mathbf{E}$  — электрическое поле. Кроме того, считалось, что с хорошей степенью точности выполнено условие  $|\mathbf{m}|/|\mathbf{l}| \ll 1$  (где  $\mathbf{m}$  — вектор ферромагнетизма,  $\mathbf{m} = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)/2M_0$ , а  $\mathbf{l}$  — вектор антиферромагнетизма,  $\mathbf{l} = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)/2M_0$ ).

В [15] было показано, что величина взаимодействия (1) может быть достаточно велика. В эксперименте это проявилось как существование линейного изотропного и анизотропного магнитных двупреломлений уже в коллинеарной фазе легкоосного антиферромагнитного (АФМ) кристалла. Вместе с тем из (1) следует, что если такой АФМ-кристалл поместить в постоянное внешнее электрическое поле  $\mathbf{E}$ , то это может существенно повлиять на характер локализации вблизи границы раздела магнитной и немагнитной сред распространяющихся магнитных поляритонов не только  $TE$ -, но и  $TM$ -типа. Анализ условий формирования поверхностных магнитных  $s$ - и  $p$ -поляритонов в центросимметричном антиферромагнетике, помещенном в постоянное внешнее электрическое поле, был проведен в работах [18,19]. Отмеченное в [18,19] существование при  $|\mathbf{E}| \neq 0$  и учете квадратичного магнитооптического взаимодействия (1) дисперсии в спектре нормальных поляритонных волн  $TM$ -типа свидетельствует о том, что в этом случае в спектре спиновых волн центросимметричного магнитного кристалла появляются электродипольно-активные ветви, отсутствующие при  $|\mathbf{E}| = 0$ . Таким образом, следует ожидать, что в условиях квадратичного магнитооптического взаимодействия (1) постоянное внешнее электрическое поле должно качественно изменять не только поверхностную, но и объемную динамику ограниченного магнетика. Однако до сих пор этот вопрос не рассматривался.

В связи с этим целью настоящей работы является анализ влияния квадратичного магнитооптического взаимодействия в негиротропном магнетике на спектр распространяющихся объемных спиновых волн  $E$ -типа (кулоновских магнитных  $TM$ -поляритонов) на примере пластины легкоосного антиферромагнетика в коллинеарной фазе, помещенного в постоянное внешнее электрическое поле.

Структурно работа состоит из нескольких разделов. В разделе 2 дана постановка задачи, приведены материальные соотношения, соответствующие коллинеарной и нормальной ориентациям постоянного внешнего электрического поля относительно легкой оси АФМ-кристалла, а также дана постановка соответствующей краевой задачи для случая АФМ-пластины. В разделе 3 для безобменного приближения проанализировано влияние квадратичного магнитооптического взаимодействия на характер рефракции объемной  $TM$ -волны, падающей

на границу раздела немагнитной диэлектрик–легкоосный антиферромагнетик, находящуюся в постоянном внешнем электрическом поле. Здесь же исследован спектр безобменных объемных электродипольно-активных магнонов (кулоновских поляритонов  $TM$ -типа), распространяющихся вдоль пластины скомпенсированного антиферромагнетика. Раздел 4 посвящен рассмотрению ряда особенностей спектра объемных кулоновских  $TM$ -поляритонов, связанных с учетом эффектов пространственной дисперсии (неоднородного обменного взаимодействия). Изучено влияние толщины пластины легкоосного антиферромагнетика на дисперсионные свойства данного типа объемных  $E$ -магнонов. Здесь же с учетом эффектов неоднородного обмена проанализирована связь этих особенностей с формой изочастотной поверхности волновых векторов нормальных объемных кулоновских колебаний  $TM$ -типа. В Заключении приведены основные выводы, следующие из полученных результатов, и некоторые численные оценки, характеризующие условия существования и распространения рассматриваемых в настоящей работе объемных электродипольно-активных спиновых волн для одноосного антиферромагнетика.

## 2. Основные соотношения

Для описания спиновой динамики негиротропного магнетика в условиях одновременного действия эффекта пространственной дисперсии и квадратичного магнитооптического эффекта, следуя [18,19], рассмотрим двухподрешеточную модель обменно-коллинеарного антиферромагнетика, включив в рассмотрение также и неоднородное обменное взаимодействие. С учетом (1) соответствующую плотность энергии в терминах векторов ферромагнетизма  $\mathbf{m}$  и антиферромагнетизма  $\mathbf{l}$  можно представить в виде

$$F = F_m + F_{mo} - \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_{\perp}^{(0)}(E_x^2 + E_y^2) + \varepsilon_{\parallel}^{(0)} E_z^2), \quad (2)$$

$$F_m = M_0^2 \left\{ \frac{\delta}{2} \mathbf{m}^2 + \frac{\alpha}{2} (\nabla \mathbf{l})^2 - \frac{\beta}{2} l_z^2 - 2\mathbf{m} \mathbf{h}_M \right\}, \quad (3)$$

где  $\delta$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — соответственно константы однородного, неоднородного межподрешеточного обмена и анизотропии,  $\mathbf{h}_M \equiv \mathbf{H}/M_0$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — соответственно электрическое и магнитное поля,  $\varepsilon_{\perp}^{(0)}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}^{(0)}$  — компоненты диагонального тензора диэлектрической проницаемости АФМ-среды при  $\lambda = 0$ .

Следуя [15], конкретизируем выражение для квадратичного магнитооптического взаимодействия (1) в рассматриваемой модели легкоосного двухподрешеточного антиферромагнетика, считая, что  $|\mathbf{m}| \ll |\mathbf{l}| \cong 1$  (малость релятивистских взаимодействий по сравнению с меж-

подрешеточным обменом):

$$F_{mo} = -\frac{1}{8\pi} \left[ \lambda_1 E_z^2 I^2 + \lambda_2 (E_x^2 + E_y^2) I^2 + \lambda_3 E_z^2 l_z^2 + \lambda_4 (E_x^2 + E_y^2) l_z^2 + \lambda_5 E_z l_z (E_x l_x + E_y l_y) + \lambda_7 E_x E_y l_x l_y + \lambda_8 (E_x^2 - E_y^2) (l_x^2 - l_y^2) \right]. \quad (4)$$

Динамические свойства исследуемой модели в рамках феноменологической теории описываются с помощью системы связанных векторных уравнений ( $\mathbf{H}_j \equiv (1/M_0^j) \delta F / \delta \mathbf{j}$ , ( $\mathbf{j} = \mathbf{m}, \mathbf{l}$ )):

$$\begin{aligned} \frac{2}{gM_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} &= [\mathbf{mH}_m] + [\mathbf{lH}_l], & \frac{2}{gM_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} &= [\mathbf{lH}_m] + [\mathbf{mH}_l], \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{D} &= 0, & \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $g$  — гиромагнитное отношение.

В случае, когда частота поляритонных колебаний рассматриваемой системы удовлетворяет условию

$$\omega \ll g\bar{M}_0, \quad (6)$$

система уравнений (5) может быть представлена в следующем виде ( $s^2 \equiv 0.25\omega_s^2 \delta \alpha$ ;  $\omega_s \equiv gM_0$ ):

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{D} &= 0, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{l} \left\{ \alpha \Delta \mathbf{l} - \frac{\alpha}{s^2} \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial t^2} - \frac{\partial W_a}{\partial \mathbf{l}} - \frac{1}{M_0^2} \frac{\partial F_{mo}}{\partial \mathbf{l}} \right\} - \frac{4}{\delta \omega_s} \right. \\ & \times \left. \left\{ 2(\mathbf{lH}_M) \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \mathbf{l} \left( \mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{h}_M}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{h}_M}{\partial t} \right\} - \frac{4}{\delta} (\mathbf{lH}_M) [\mathbf{lH}_M] \right] = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $W_a \equiv \frac{\beta}{2} l_z^2$ ,

$$\mathbf{m} = \frac{2}{\delta} \left[ \frac{1}{\omega_s} \left[ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \mathbf{l} \right] + \mathbf{h}_M - \mathbf{l}(\mathbf{lH}_M) \right]. \quad (8)$$

Таким образом, в электростатическом пределе система динамических уравнений, определяющая взаимодействие электромагнитной и спиновой подсистем АФМ-кристалла, связывает между собой только компоненты векторов  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{E}$ . Такая редуцированная система справедлива при произвольной величине отклонения вектора антиферромагнетизма  $\mathbf{l}$  от равновесной ориентации.

В исследуемой модели тетрагонального антиферромагнетика возможна реализация одной из двух равновесных магнитных конфигураций: легкоосной ( $\mathbf{l} \parallel OZ$ ) и легкоплоскостной ( $\mathbf{l} \perp OZ$ ), и включение внешнего электрического поля  $\mathbf{E} \parallel OZ$  или  $\mathbf{E} \perp OZ$  не изменяет равновесную магнитную конфигурацию по сравнению со случаем  $|\mathbf{E}| = 0$  (при  $\beta > 0$ ,  $\mathbf{l} \parallel OZ$ ).

Если ограничиться случаем, когда волновой вектор распространяющихся электромагнитных колебаний  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $YZ$ , а  $\mathbf{l} \parallel OZ$ , то, как следует из [18,19], как при  $\mathbf{E} \parallel OZ$ , так и при  $\mathbf{E} \parallel OY$  в рассматриваемом неограниченном антиферромагнетике имеет место независимое распространение поляритонов  $TM$ - и  $TE$ -типа, обладающих одной частотой и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Соответствующие материальные соотношения как в том, так и в другом случае могут быть представлены в следующем виде. Если  $\mathbf{E} \parallel OZ$ , то

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx} H_x + \alpha_{xy} E_y, & D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \alpha_{xy} H_y, \\ B_y &= \mu_{yy} H_y + \alpha_{yx} E_x, & D_y &= \varepsilon_{yy} E_y + \alpha_{yx} H_x, \\ B_z &= \mu_{zz} H_z, & D_z &= \varepsilon_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\mu_{ik}$ ,  $\varepsilon_{ik}$ ,  $\alpha_{ik}$  — тензоры магнитной, диэлектрической и магнитоэлектрической проницаемостей. При этом для рассматриваемой геометрии

$$\mu_{xx}(\omega, \mathbf{k}) = \mu_{yy}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega_\mu^2 - \omega^2}{\Delta},$$

$$\varepsilon_{xx}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{yy}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_\perp \frac{\omega_\varepsilon^2 - \omega^2}{\Delta},$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_\parallel^{(0)} + [\lambda_1 + \lambda_3], \quad \mu_{zz} = 1,$$

$$\alpha_{yx}(\omega, \mathbf{k}) = -\alpha_{xy}(\omega, \mathbf{k}) \equiv i \cdot \gamma(\omega, \mathbf{k}),$$

$$\gamma(\omega, \mathbf{k}) = \frac{A\omega}{\Delta}, \quad A = 4\pi\omega_s \lambda_*, \quad \omega_s = gM_0,$$

$$\varepsilon_\perp = \varepsilon_\perp^{(0)} + [\lambda_2 + \lambda_4],$$

$$\lambda_* = \frac{\lambda_5 E_z / M_0}{8\pi}, \quad \Delta \equiv \omega_0^2 + s^2 \mathbf{k}^2 - \omega^2,$$

$$\omega_0^2 \equiv 0.25\omega_s^2 \delta [\beta + \lambda_3 E_z^2 / (4\pi M_0^2)],$$

$$\omega_\mu^2 = (\omega_0^2 + s^2 \mathbf{k}^2) \left( 1 + \frac{16\pi}{\delta} \right),$$

$$\omega_\varepsilon^2 = \omega_0^2 + s^2 \mathbf{k}^2 + \frac{\delta}{16\pi} \frac{A^2}{\varepsilon_\perp}, \quad (10)$$

где  $\omega_0$  отвечает частоте однородного АФМ-резонанса в неограниченном коллинеарном антиферромагнетике при наличии постоянного электрического поля, коллинеарного легкой оси,  $E_z$  — величина проекции постоянного внешнего электрического поля на ось  $OZ$ ,  $\lambda_1 - \lambda_8$  — линейные комбинации компонент тензора магнитооптических коэффициентов  $\lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$  для тетрагонального антиферромагнетика, введенные в работе [15].

Если же  $\mathbf{E} \parallel OY$ , то

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx} H_x + \alpha_{xz} E_z, & D_x &= \varepsilon_{xx} E_x, \\ B_y &= \mu_{yy} H_y, & D_y &= \varepsilon_{yy} E_y, \\ B_z &= \mu_{zz} H_z, & D_z &= \varepsilon_{zz} E_z + \alpha_{zx} H_x, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{xx}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{\omega_{\mu x}^2 - \omega^2}{\Delta}, \\ \mu_{yy}(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{\omega_{\mu y}^2 - \omega^2}{\omega_{0y}^2 + s^2 \mathbf{k}^2 - \omega^2}, \quad \mu_{zz} = 1, \\ \varepsilon_{zz}(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_{\parallel} \frac{\omega_{\varepsilon x}^2 - \omega^2}{\Delta}, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}^{(0)} + [\lambda_2 + \lambda_4], \\ \alpha_{zx}(\omega, \mathbf{k}) &= -\alpha_{xz}(\omega, \mathbf{k}) \equiv i\gamma(\omega, \mathbf{k}), \\ \gamma(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{A\omega}{\Delta}, \quad \Delta = \omega_{0x}^2 + s^2 \mathbf{k}^2 - \omega^2, \\ A &= 4\pi\omega_s \lambda_*, \quad \omega_s = gM_0, \\ \omega_{\mu x}^2 &= \left(1 + \frac{16\pi}{\delta}\right)(\omega_{0x}^2 + s^2 \mathbf{k}^2), \\ \omega_{\mu y}^2 &= \left(1 + \frac{16\pi}{\delta}\right)(\omega_{0y}^2 + s^2 \mathbf{k}^2), \\ \omega_{\varepsilon x}^2 &= \omega_{0x}^2 + s^2 \mathbf{k}^2 + \frac{\delta}{16\pi} \frac{A^2}{\varepsilon_{\parallel}}, \\ \lambda_* &= \frac{\lambda_5 E_y / M_0}{8\pi}, \quad \omega_{0y}^2 \equiv \omega_{0x}^2 + 0.5\omega_s^2 \delta [\lambda_8 E_y^2 / (4\pi M_0^2)], \\ \omega_{0x}^2 &= 0.25\omega_s^2 \delta [\beta + (\lambda_4 - \lambda_8) E_y^2 / (4\pi M_0^2)], \\ \varepsilon_{\parallel} &= \varepsilon_{\parallel}^{(0)} + [\lambda_1 + \lambda_3]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\omega_{0x}, \omega_{0y}$  отвечают частотам однородного АФМ-резонанса в неограниченном коллинеарном антиферромагнетике при наличии постоянного электрического поля, перпендикулярного легкой оси,  $E_y$  — величина проекции постоянного внешнего электрического поля на ось  $OY$ .

Поскольку, как следует из (9)–(12), уже в кулоновском пределе наиболее существенные изменения по сравнению со случаем  $|\mathbf{E}| = 0$  претерпевает спектр поляритонов  $TM$ -типа, в дальнейшем ограничимся анализом именно этой поляризации электромагнитных возбуждений рассматриваемой магнитной среды. Как говорилось выше, в случае пластины ему отвечает магнон  $E$ -типа.

Так как в настоящей работе нас интересует спиновая динамика АФМ-пластины с учетом эффектов пространственной дисперсии (за счет неоднородного обменного взаимодействия), указанную систему динамических уравнений (7), (8) необходимо дополнить соответствующими граничными условиями.

Для простоты и наглядности расчетов будем полагать, что АФМ-пластина толщиной  $2d$ , помещенная в изотропную немагнитную среду с электрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon_0, \mu_0$ , представляет собой бесконечную полосу  $-d < \eta < d$  (где  $\eta$  — координата вдоль нормали к границе раздела магнитной и немагнитной сред  $\mathbf{n}$ ). Пусть на обеих поверхностях АФМ-пластины

магнетика ( $\eta = \pm d$ ) выполнены стандартные электродинамические и дополнительные граничные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{E}_\tau = (\mathbf{E}_0)_\tau, \quad \eta = \pm d, \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} &= \mu_0 \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}_\tau = (\mathbf{H}_0)_\tau, \quad \eta = \pm d, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{l}}}{\partial \eta} \mp b \tilde{\mathbf{l}} = 0, \quad \eta = \pm d. \quad (14)$$

Здесь  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$  — тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей в магнетике,  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  — электрическое и магнитное поля в немагнитной среде,  $(\mathbf{E}_0)_\tau$  и  $(\mathbf{H}_0)_\tau$  — тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей в немагнитной среде,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  — индукции электрического и магнитного полей в магнетике,  $\tilde{\mathbf{l}}$  описывает малые колебания вектора антиферромагнетизма  $\mathbf{l}$  около равновесной ориентации,  $b$  — поверхностная магнитная анизотропия.

Анализ влияния постоянного внешнего электрического поля на условия формирования и дисперсионные свойства распространяющихся вдоль АФМ-пластины объемных электродипольно-активных магнонов начнем с пренебрежения эффектами пространственной дисперсии в магнитной среде, т.е. в безобменном приближении (в (9)–(12)  $\alpha \rightarrow 0$ ). Кроме того, воспользуемся также тем обстоятельством, что спектр объемных дипольно-активных магнонов в ограниченной среде представляет собой, как известно, кулоновский предел ( $\omega/c \rightarrow 0$ ) спектра соответствующих волноводных магнитных поляритонов.

### 3. Влияние постоянного электрического поля на спектр волноводных магнитных $TM$ -поляритонов, бегущих вдоль пластины антиферромагнетика

Стандартная процедура расчета показывает, что для  $\mathbf{l} \parallel \mathbf{n} \parallel OZ, \mathbf{k} \in YZ$  с учетом только электродинамических граничных условий (13) коэффициент отражения объемной  $TM$ -волны, падающей извне на поверхность рассматриваемой АФМ-пластины толщиной  $2d$  (среда 2), помещенной в изотропную немагнитную среду 1 с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon_0 = \text{const}$  и  $\mu_0 = \text{const}$ , может быть представлен в виде  $(k_{1z}, k_{2z}, k_{\perp} \equiv k_y$  — проекции волнового вектора магнитной и немагнитной сред на оси системы координат)

$$R = \frac{R_{12}(1 - \exp(4ik_{2z}d))}{1 - R_{12}^2 \exp(4ik_{2z}d)}, \quad (15)$$

где при  $\mathbf{E} \parallel OZ$

$$R_{12} = \frac{(k_{1z}/\varepsilon_0) - ((k_{2z} - i\gamma\omega/c)/\varepsilon_{yy})}{(k_{1z}/\varepsilon_0) + ((k_{2z} - i\gamma\omega/c)/\varepsilon_{yy})}, \quad (16)$$

$$k_{2z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{yy}\mu_{xx} - \gamma^2) - k_{\perp}^2 \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}} > 0, \quad (17)$$

$$k_{1z}^2 = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2 > 0; \quad (18)$$

при  $\mathbf{E} \parallel OY$

$$R_{12} = \frac{(k_{1z}/\varepsilon_0) - (k_{2z}/\varepsilon_{yy})}{(k_{1z}/\varepsilon_0) + (k_{2z}/\varepsilon_{yy})}, \quad (19)$$

$$k_{2z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \varepsilon_{yy}\mu_{xx} - \frac{\gamma^2}{\varepsilon_{zz}} \right) - k_{\perp}^2 \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}} > 0. \quad (20)$$

Здесь, следуя принятой в [20] схеме обозначений,  $R_{ij}$  отвечает коэффициенту отражения  $TM$ -волны, падающей из среды  $i$  в среду  $j$ . В используемом в данном разделе безобъемном приближении входящие в (15)–(20) компоненты тензоров  $\mu_{ik}$ ,  $\varepsilon_{ik}$ ,  $\alpha_{ik}$  для  $\mathbf{E} \parallel OZ$  и для  $\mathbf{E} \parallel OY$  определяются из (9), (10) и (11), (12) соответственно с учетом  $\alpha \rightarrow 0$ . Рассмотрим сечение поверхности волновых векторов нормальной  $TM$ -волны плоскостью падения  $YZ$  на границе раздела немагнитной и магнитной сред (рис. 1, 2). Форма сечения указанной поверхности в немагнитной среде определяется из (18), а в магнитной среде — из (17) (в случае  $\mathbf{E} \parallel OZ$ ) или (20) (в случае  $\mathbf{E} \parallel OY$ ) условием  $\omega = \text{const}$ . Совместный анализ (17) и (20) показывает, что в случаях, когда частота падающей на поверхность антиферромагнетика  $TM$ -волны удовлетворяет одному из следующих неравенств

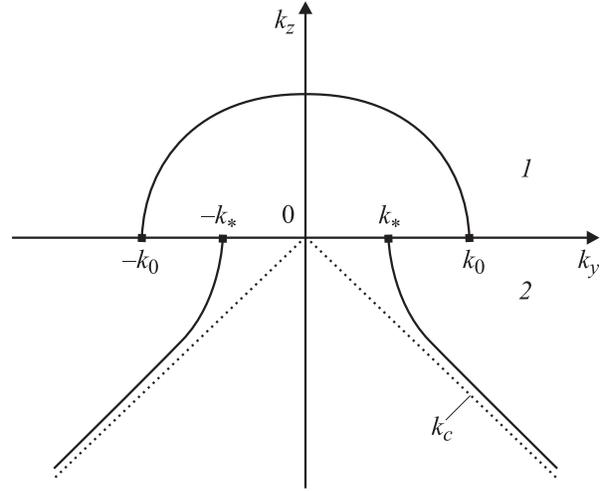
$$\varepsilon_{yy}(\omega) < 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{E} \parallel OZ, \quad (21)$$

$$\varepsilon_{zz}(\omega) < 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{E} \parallel OY, \quad (22)$$

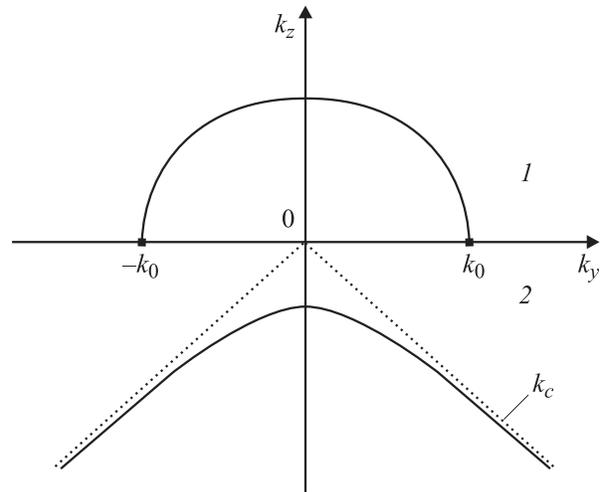
постоянное внешнее электрическое поле  $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$  приводит к формированию эффекта отрицательной рефракции для объемной  $TM$ -волны с  $\mathbf{k} \in YZ$ , падающей извне на поверхность рассматриваемого легкоосного антиферромагнетика. Другими словами, в данном случае проекции на границу раздела векторов групповых скоростей падающей и преломленной волн  $TM$ -типа имеют противоположные знаки.

Если же при выполнении (21), (22) постоянное внешнее электрическое поле  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$ , то из (17) и (20) следует, что в этом случае для падающей извне на поверхность АФМ-объемной  $TM$ -волны с  $\mathbf{k} \in YZ$  реализуется эффект аномальной рефракции (проекции фазовых скоростей на нормаль  $\mathbf{n}$  к границе раздела сред имеют разные знаки). Следует отметить, что оба указанных эффекта индуцированы обменно-усиленным в АФМ-среде квадратичным магнитооптическим взаимодействием (4) и невозможны при  $|\mathbf{E}| = 0$ .

Как известно [20,21], в пластине спектр волноводных поляритонов заданной поляризации представляет собой результат многократного отражения от поверхностей пластины соответствующего типа плоской волны. При этом коэффициент отражения объемной  $TM$ -волны с  $\mathbf{k} \in YZ$ , падающей из глубины магнетика на поверхность



**Рис. 1.** Сечения поверхностей волновых векторов нормального магнитного  $TM$ -поляритона плоскостью с  $k_y k_z$  для структуры немагнитный диэлектрик (1)–антиферромагнетик (2) в случае (21) —  $\mathbf{E} \parallel OZ$ ,  $k_0 = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\omega/c$ ,  $k_* = \sqrt{(\omega^2/c^2)(\varepsilon_{zz}\mu_{xx} - \gamma^2\varepsilon_{zz}/\varepsilon_{yy})}$ . Пунктир отвечает соотношению (17) в кулоновском пределе.



**Рис. 2.** Сечения поверхностей волновых векторов нормального магнитного  $TM$ -поляритона плоскостью с  $k_y k_z$  для структуры немагнитный диэлектрик (1)–антиферромагнетик (2) в случае (22) —  $\mathbf{E} \parallel OY$ . Пунктир отвечает соотношению (20) в кулоновском пределе.

его раздела с немагнитной средой  $\mathbf{n} \parallel OZ$ , для заданной ориентации внешнего постоянного электрического поля ( $\mathbf{E} \parallel OZ$  или  $\mathbf{E} \parallel OY$ ) будет отличаться от (16), (19) только знаком. Таким образом, можно ожидать, что отмеченные выше аномалии в рефракции  $TM$ -волны на границе раздела магнитной и немагнитной сред приведут к существенной перестройке по сравнению со случаем  $|\mathbf{E}| = 0$  также и спектра волноводных  $TM$ -поляритонов с  $\mathbf{k} \in YZ$ , распространяющихся вдоль АФМ-пластины с  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$ , помещенной во внешнее электрическое

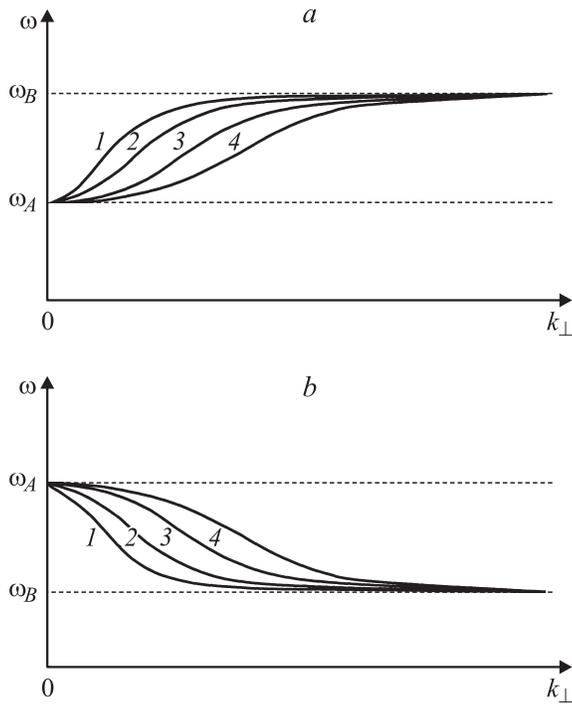


Рис. 3. Спектр электростатических объемных спиновых волн (23), (24). *a* — для  $\mathbf{E} \parallel OZ$ , *b* — для  $\mathbf{E} \parallel OY$ .

поле  $\mathbf{E} \parallel OZ$  или  $\mathbf{E} \parallel OY$  (рис. 3, *a, b*). Из (15)–(20) при условии  $R = \infty$  [21] следует, что в безобменном приближении спектр волноводных объемных кулоновских *TM*-поляритонов (объемных магнонов *E*-типа) в пластине легкоосного антиферромагнетика (2)–(4) в зависимости от относительной ориентации векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{n}$  может быть представлен в виде ( $\bar{\epsilon}_{ik} \equiv \epsilon_{ik}(|\mathbf{E}| \rightarrow 0)$ ,  $k_{\perp} \equiv k_y$ ;  $\omega_{\lambda}^2 = 0.25\delta\lambda_{*}^2\omega_s^2$ ;  $\rho_{\nu} = \pi\nu/d$ ,  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\Omega_{\nu}^2(k_{\perp}) = \omega_0^2 + \frac{4\pi\omega_{\lambda}^2 k_{\perp}^2}{\bar{\epsilon}_{yy}k_{\perp}^2 + \bar{\epsilon}_{zz}\rho_{\nu}^2}, \quad \mathbf{E} \parallel OZ, \quad (23)$$

$$\Omega_{\nu}^2(k_{\perp}) = \omega_{0x}^2 + \frac{4\pi\omega_{\lambda}^2 \rho_{\nu}^2}{\bar{\epsilon}_{yy}k_{\perp}^2 + \bar{\epsilon}_{zz}\rho_{\nu}^2}, \quad \mathbf{E} \parallel OY. \quad (24)$$

Анализ (23), (24) показывает, что в обеих геометриях вследствие квадратичного магнитооптического взаимодействия (4) вдоль АФМ-пластины, помещенной в постоянное внешнее электрическое поле  $\mathbf{E}$ , распространяются безобменные объемные спиновые волны, дисперсионные свойства которых формируются косвенным спин-спиновым взаимодействием через дальнедействующее электростатическое поле (объемные электростатические спиновые волны). При этом соответствующий вклад в энергии активации объемных электродипольно-активных магнонов оказывается обменно-усиленным и существенно зависящим как от величины внешнего электрического поля  $\mathbf{E}$ , так и от его ориентации по отношению к плоскостям пластины ( $\mathbf{n} \parallel OZ$ ). В обоих случаях спектр возбуждений (23), (24) (рис. 3, *a, b*) обладает как длинно-

так коротковолновыми точками сгущения:  $\omega_A$  и  $\omega_B$  (для  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{l} \parallel \mathbf{n} \parallel OZ$  —  $\omega_A \equiv \omega_0$ ,  $\omega_B \equiv \sqrt{\omega_0^2 + 4\pi\omega_{\lambda}^2/\bar{\epsilon}_{yy}}$ , а для  $\mathbf{E} \parallel OY$ ,  $\mathbf{l} \parallel \mathbf{n} \parallel OZ$  —  $\omega_A \equiv \sqrt{\omega_{0x}^2 + 4\pi\omega_{\lambda}^2/\bar{\epsilon}_{zz}}$ ,  $\omega_B \equiv \omega_{0x}$ ). При этом в случае  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{l} \parallel \mathbf{n} \parallel OZ$ ,  $\mathbf{k} \in YZ$  независимо от номера моды  $\nu$  дисперсионные кривые всех ветвей спектра отвечают волнам прямого типа  $k_{\perp} \partial\Omega_{\nu}/\partial k_{\perp} > 0$  (рис. 3, *a*), тогда как в геометрии  $\mathbf{E} \parallel OY$ ,  $\mathbf{l} \parallel \mathbf{n} \parallel OZ$ ,  $\mathbf{k} \in YZ$  распространяются только обратные объемные электростатические спиновые волны  $k_{\perp} \partial\Omega_{\nu}/\partial k_{\perp} < 0$  (рис. 3, *b*). Из сравнения (17), (18), (20) с учетом (21), (22) и дисперсионных соотношений (23), (24) следует, что условиям отрицательной рефракции отвечает в АФМ-пластине формирование распространяющихся объемных ЭСВ обратного типа, а аномальной рефракции — формирование объемных ЭСВ прямого типа.

Рассмотрим теперь, как повлияет наличие пространственной дисперсии (неоднородного обменного взаимодействия) на условия распространения объемной *TM*-волны, падающей из немагнитной среды 1 на поверхность рассматриваемой АФМ-пластины.

#### 4. Эффекты пространственной дисперсии (неоднородного обмена) в спектре распространяющихся объемных кулоновских *TM*-поляритонов

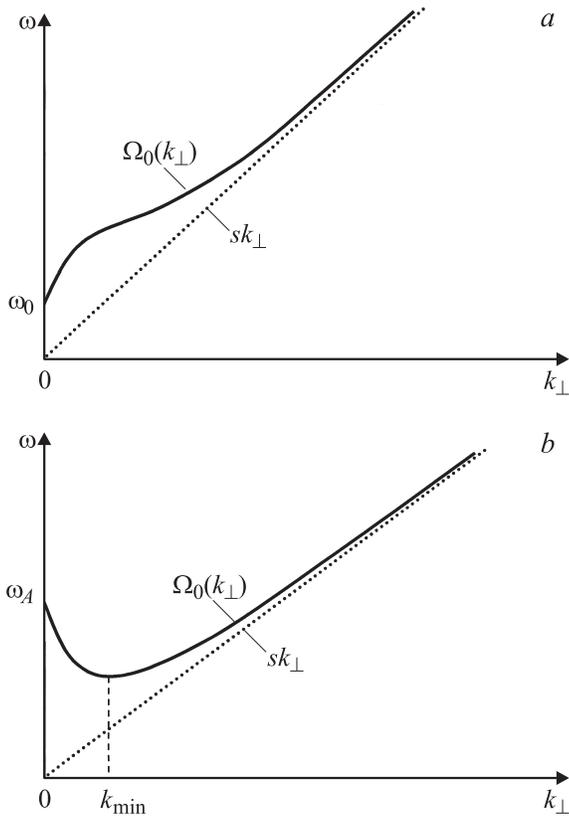
Анализ влияния эффекта пространственной дисперсии (неоднородного обменного взаимодействия) на спектр рассматриваемых объемных магнонов *E*-типа начнем с частного случая тонкой магнитной пластины толщиной  $2d$  [22]:

$$2d \ll 1/k_{\perp} \quad (25)$$

в предположении, что спины на обеих поверхностях АФМ-пластины полностью свободны (для этого в (14) следует положить  $b = 0$ ).

В этом случае можно считать, что дополнительные граничные условия (14) выполнены по всей толщине АФМ-пластины. При этом полученные выше выражения для коэффициента отражения *TM*-волны с  $\mathbf{k} \in YZ$ , падающей извне на поверхность АФМ-пластины с  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$ , погруженной в среду 1, как при  $\mathbf{E} \parallel OZ$ , так и при  $\mathbf{E} \parallel OY$ , по-прежнему принимают вид (15)–(20), однако теперь в соотношениях (9)–(12) следует произвести замену  $s^2\mathbf{k}^2 \rightarrow s^2k_{\perp}^2$ .

В данном случае дисперсионное соотношение для квазиоднородной по толщине АФМ-пластины моды спектра волноводных *TM*-поляритонов по-прежнему определяется из (15)–(20) условием  $R = \infty$  и в кулоновском пределе в зависимости от ориентации внешнего элек-



**Рис. 4.** Спектр объемного  $E$ -магнона в ультратонкой антиферромагнитной пластине (26), (27).  $a$  — для  $\mathbf{E} \parallel OZ$ ,  $b$  — для  $\mathbf{E} \parallel OY$ .

трического поля принимает вид

$$\Omega_0^2(k_\perp) = \omega_0^2 + s^2 k_\perp^2 + \frac{4\pi\omega_\lambda^2}{\bar{\epsilon}_{yy}} (1 - 2\epsilon_0 V_\sigma^-), \quad \mathbf{E} \parallel OZ, \quad (26)$$

$$\Omega_0^2(k_\perp) = \omega_{0x}^2 + s^2 k_\perp^2 + 8\pi\omega_\lambda^2 \sqrt{\bar{\epsilon}_{yy}/\bar{\epsilon}_{zz}} V_\sigma^+, \quad \mathbf{E} \parallel OY, \quad (27)$$

где

$$V_\sigma^\pm = \frac{(1 - e^{-\sigma})\sigma^{-1}}{(\sqrt{\bar{\epsilon}_{zz}\bar{\epsilon}_{yy}} + \epsilon_0) \pm (\sqrt{\bar{\epsilon}_{zz}\bar{\epsilon}_{yy}} - \epsilon_0)e^{-\sigma}};$$

$$\sigma = 2k_\perp d \sqrt{\bar{\epsilon}_{yy}/\bar{\epsilon}_{zz}}.$$

Таким образом, поскольку энергия активации рассматриваемой моды спектра объемных магнонов  $E$ -типа при  $k_\perp \rightarrow 0$  не содержит слагаемого, пропорционального  $1/d$ , ее спектр при малых  $k_\perp d$  и  $|\mathbf{E}| \neq 0$  формируется прежде всего под влиянием рассматриваемого в настоящей работе электродипольного механизма косвенного спин-спинового взаимодействия. При этом по-прежнему, как и в рассмотренном выше безобменном пределе (23), (24), сохраняется возможность изменения типа  $TM$ -волны с прямого на обратный и наоборот (рис. 4,  $a, b$ ) за счет изменения направления постоянного внешнего электрического поля в

плоскости  $YZ$  относительно заданных  $\mathbf{n} \parallel OZ$  и  $\mathbf{l} \parallel OZ$  ( $\mathbf{k} \in YZ$ ). Отметим, что в отличие от ЭСВ в безобменном пределе (24) в случае  $s \neq 0$   $\partial\Omega_0(k_\perp)/\partial k_\perp < 0$  только при  $k_\perp \ll 2(\omega_\lambda/s)\sqrt{\pi/\bar{\epsilon}_{zz}}$ , тогда как при  $k_\perp \gg 2(\omega_\lambda/s)\sqrt{\pi/\bar{\epsilon}_{zz}}$  выполнено  $\partial\Omega_0(k_\perp)/\partial k_\perp > 0$ , т.е. спектр рассматриваемой объемной спиновой волны имеет минимум (рис. 4,  $b$ ). Указанная особенность волновых  $TM$ -поляритонов проявляется лишь при учете неоднородного обменного взаимодействия.

Рассмотрим теперь, как влияет на спектр рассматриваемого типа объемных электродипольно-активных магнонов учет неоднородного обменного взаимодействия в случае АФМ-пластины произвольной толщины.

В кулоновском пределе ( $\omega/c \rightarrow 0$ ) электродинамические граничные условия (13) с учетом (10), (12) могут быть представлены в виде

$$\psi + \xi \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0, \quad \eta = \pm d \quad \text{при} \quad \mathbf{E} \parallel OZ,$$

$$\psi + \xi \left( \frac{\partial\psi}{\partial\eta} - \frac{4\pi\lambda_*}{\bar{\epsilon}_{zz}} l_y \right) = 0, \quad \eta = \pm d \quad \text{при} \quad \mathbf{E} \parallel OY. \quad (28)$$

Здесь  $\psi$  — электростатический потенциал в магнитной среде ( $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ ),  $\xi = \bar{\epsilon}_{zz}/\epsilon_0 k_\perp$  — параметр, характеризующий электродинамические свойства немагнитной среды, окружающей рассматриваемую магнитную пластину (в частности,  $\xi = 0$  отвечает случаю границы раздела магнетик-идеальный металл ( $\epsilon_0 \rightarrow \infty$ )).

Для расчета спектра объемных  $E$ -магнонов, распространяющихся вдоль пластины антиферромагнетика (2)–(8), с граничными условиями (14), (28) на основе одновременного учета электродипольного и неоднородного обменного взаимодействия можно воспользоваться подходом, подобным ранее развитому в работах [23–25] для анализа влияния магнитодипольного взаимодействия на спектр объемных обменных магнонов в ферромагнитной пленке. С этой целью при  $\mathbf{k} \in YZ$  ( $\mathbf{n} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$ ) и полностью закрепленных магнитных моментах (т.е. в (14)  $b \rightarrow \infty$ ) введем функцию Грина

$$G(\theta, z) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(ak_\perp(\theta-d-\xi)) \text{sh}(ak_\perp(z+d-\xi))}{\Delta_a}, & -d \leq z \leq \theta, \\ \frac{\text{sh}(ak_\perp(\theta+d-\xi)) \text{sh}(ak_\perp(z-d-\xi))}{\Delta_a}, & \theta \leq z \leq d. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь  $\Delta_a = ak_\perp \text{sh}(2ak_\perp d)$ ,  $\xi = \frac{\text{arcth}(\xi ak_\perp)}{ak_\perp}$ ,  $\alpha = \sqrt{\bar{\epsilon}_{yy}/\bar{\epsilon}_{zz}}$ .

С ее помощью можно из уравнений электростатики ( $\omega/c \rightarrow 0$ ) с граничным условием (28) получить связь между амплитудой электростатического потенциала  $\psi$  и амплитудой колебания  $y$ -компоненты вектора антиферромагнетизма  $\mathbf{l}$ , считая пространственное распределение последней вдоль нормали к поверхности пленки  $\mathbf{n}$  заданной функцией. Это дает возможность, используя (28), исключить из рассмотрения в уравнениях движения (7), (8) при  $\omega/c \rightarrow 0$  переменные, связанные с электростатическим взаимодействием. Таким образом, в этом случае необходимо решать соответствующую краевую задачу

только с обменными граничными условиями (14) при  $b \rightarrow \infty$ . Следуя методике, развитой в работе [23–25], решение данной граничной задачи мы будем искать в виде ряда по собственным функциям обменной краевой задачи:

$$l_y = \sum_v A_v \sin(\rho_v z) \exp i(k_{\perp} y - \omega t), \quad v = 1, 2, \dots \quad (30)$$

В результате соответствующее дисперсионное уравнение, описывающее при  $\mathbf{k} \in YZ$ ,  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$  в электростатическом приближении спектр объемных магнонов рассматриваемой пленки антиферромагнетика, помещенной во внешнее электрическое поле  $\mathbf{E} \parallel OZ$  или  $\mathbf{E} \parallel OY$ , при условии полного закрепления ( $b \rightarrow \infty$ ) с учетом (10) и (12) может быть представлено в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд  $A_v$

$$A_v(W_{vv} - \omega^2) - W_{v\tau}A_{\tau} = 0, \quad (31)$$

$$W_{vv} = (\omega_j^2 + s^2\rho_v^2 + s^2k_{\perp}^2) - G_{vv},$$

$$W_{v\tau} = G_{v\tau} \quad \text{при } v \neq \tau, \quad (32)$$

где

$$G_{v\tau} = \frac{4\pi\omega_{\lambda}^2}{\varepsilon_{zz}d} \chi^2 \int_{-d}^d d\theta' \sin(\rho_{\tau}(\theta' + d)) \times \int_{-d}^d d\theta G(\theta, \theta') \sin(\rho_v(\theta + d)).$$

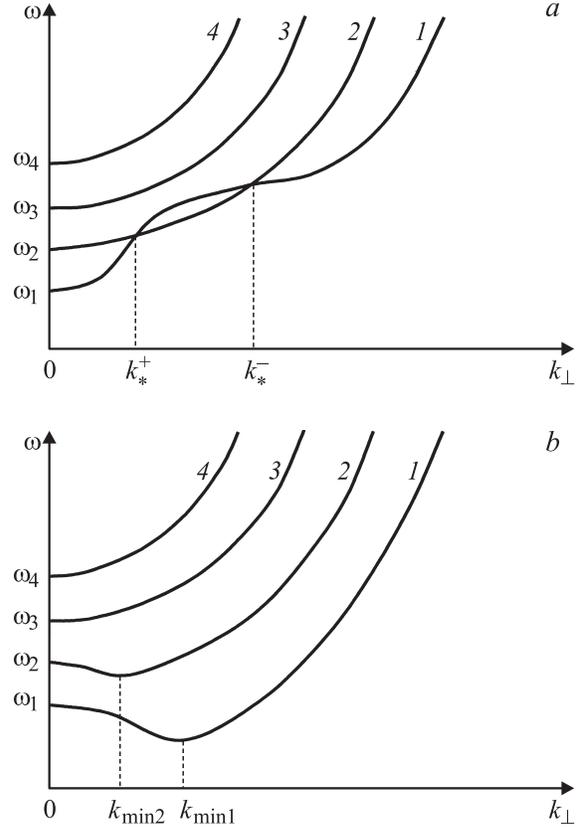
Здесь  $\chi \equiv k_{\perp}$ ,  $\omega_j \equiv \omega_0$  при  $\mathbf{E} \parallel OZ$ ;  $\chi \equiv \rho_v$ ,  $\omega_j \equiv \omega_{0x}$  при  $\mathbf{E} \parallel OY$ .

Анализ показывает, что если в (14) при  $\mathbf{k} \in YZ$  и  $\mathbf{n} \parallel OZ$  положить  $b \rightarrow \infty$ , а в (28) —  $\xi = 0$  ( $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$ ) при  $\eta = \pm d$ , что отвечает пластине с двусторонней металлизацией и полностью закрепленными магнитными моментами при  $z = \pm d$ , то из (31), (32) следует, что  $W_{v\tau}(k_{\perp}) = 0$ ,  $W_{vv}(k_{\perp}) = \Omega_v^2(k_{\perp})$ . Таким образом, в этом частном случае рассматриваемая граничная задача допускает точное решение в явном виде. Если же в той же геометрии  $\xi \neq 0$ , то недиагональные элементы бесконечной матрицы  $W_{v\tau}(k_{\perp})$  в (32) можно рассматривать как возмущение по отношению к нулевому приближению, определяемому диагональными элементами бесконечной матрицы  $W_{v\tau}(k_{\perp})$ :

$$\omega^2 = W_{vv}(k_{\perp}). \quad (33)$$

Если в нулевом приближении моды с номерами  $v$  и  $\tau$  при заданном  $k_{\perp}$  оказываются вырожденными ( $W_{vv}(k_{\perp}) = W_{\tau\tau}(k_{\perp})$ ), т.е. имеет место точка кроссовера, то тогда структуру спектра в окрестности конкретной точки кроссовера во втором порядке теории возмущений для двукратно вырожденного уровня можно представить следующим образом:

$$(W_{vv} - \omega^2)(W_{\tau\tau} - \omega^2) - W_{v\tau}W_{\tau v} \cong 0 \quad (v \neq \tau). \quad (34)$$



**Рис. 5.** Спектр дипольно-обменных объемных магнонов  $E$ -типа (35), (36).  $a$  — для  $\mathbf{E} \parallel OZ$  ( $\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 + (\pi v/d)^2}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ ),  $b$  — для  $\mathbf{E} \parallel OY$  ( $\omega_v = \sqrt{\omega_{0x}^2 + (\pi v/d)^2}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ ).

Таким образом, из (32), (33) следует, что в нулевом приближении по параметру  $\xi \ll 1$  структура спектра и дисперсионные свойства объемных магнонов  $E$ -типа, распространяющихся вдоль пластины антиферромагнетика (2)–(8), для заданной относительной ориентации векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{l}$  существенно модифицируются (рис. 5,  $a, b$ ) как по сравнению с безобменным пределом (23), (24), так и по сравнению со случаем ультратонкой АФМ-пластины (26), (27). В частности, при  $\mathbf{n} \parallel OZ$  и  $\mathbf{k} \in YZ$

$$\Omega_v^2(k_{\perp}) = \omega_0^2 + s^2\rho_v^2 + s^2k_{\perp}^2 + \frac{4\pi\omega_{\lambda}^2 k_{\perp}^2}{\bar{\varepsilon}_{yy}k_{\perp}^2 + \bar{\varepsilon}_{zz}\rho_v^2}, \quad \mathbf{E} \parallel OZ, \quad (35)$$

$$\Omega_v^2(k_{\perp}) = \omega_{0x}^2 + s^2\rho_v^2 + s^2k_{\perp}^2 + \frac{4\pi\omega_{\lambda}^2 \rho_v^2}{\bar{\varepsilon}_{yy}k_{\perp}^2 + \bar{\varepsilon}_{zz}\rho_v^2}, \quad \mathbf{E} \parallel OY. \quad (36)$$

Из сопоставления (23), (24) и (35), (36) следует, что в обеих геометриях уже при бесконечно малой величине константы неоднородного обменного взаимодействия  $\alpha \neq 0$  имеет место исчезновение обеих точек сгущения  $\omega_{A,B}$  в спектре распространяющихся объемных магнонов  $E$ -типа.

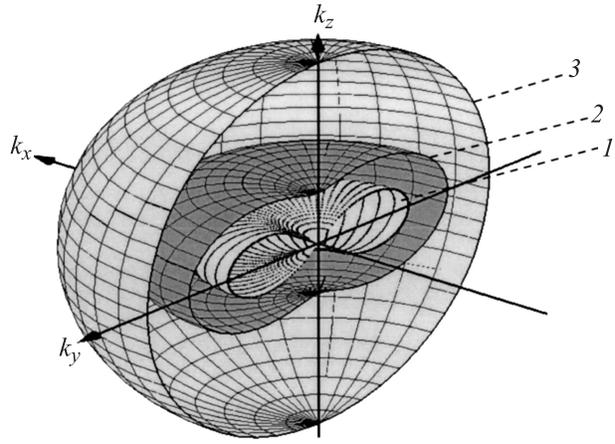
Кроме того, при  $\alpha \neq 0$  существенно изменяется и общая структура спектра распространяющихся объемных спин-волновых возбуждений (по сравнению с безобменным пределом (23), (24)). В частности, при  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{l} \parallel \mathbf{n} \parallel OZ$  становится возможным формирование при  $k_{\perp} \neq 0$  двух точек пересечения  $k_{*}^{-}$  и  $k_{*}^{+}$  для дисперсионных кривых мод с заданными номерами  $\nu$  и  $\tau$  (рис. 5, а). Из (35) следует, что обе эти точки кроссовера в спектре электродипольно-активных объемных спин-волновых возбуждений центросимметричного антиферромагнетика имеют место только при  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$  и одновременном учете как электродипольного, так и неоднородного обменного механизма спин-спинового взаимодействия (т.е. при  $\hat{\lambda} \neq 0$  и  $\alpha \neq 0$ ). Если же  $\mathbf{E} \perp \mathbf{l} \parallel \mathbf{n}$ , то, как следует из (36), совместный учет электродипольного и гейзенберговского механизмов спин-спинового обмена при выполнении условия

$$E_y > 4 \sqrt{\frac{\pi\alpha}{\bar{\epsilon}_{yy}}} \frac{\nu \bar{\epsilon}_{zz} M_0}{\lambda_5 d} \quad (37)$$

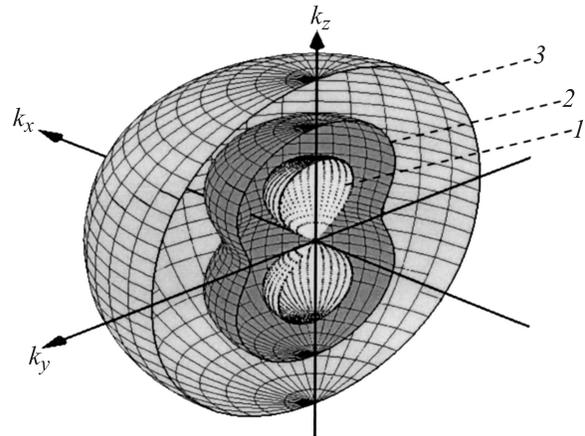
может приводить к формированию при  $k_{\perp} \neq 0$  минимума  $k_{\min \nu}^2 = \pi^2 \left( (\nu \omega_{\lambda} / ds \sqrt{\pi \bar{\epsilon}_{yy}}) - (\nu^2 \sqrt{\bar{\epsilon}_{zz}} / d^2 \sqrt{\bar{\epsilon}_{yy}}) \right)$  (рис. 5, б) на дисперсионной кривой моды с номером  $\nu$ , принадлежащей спектру дипольно-обменных спин-волновых возбуждений  $E$ -типа рассматриваемой АФМ-пластины. Таким образом, по сравнению с (24) в случае (36) волна является обратной лишь в ограниченном интервале волновых чисел  $k_{\perp} < k_{\min \nu}$ . При этом ширину указанного интервала для заданного номера моды  $\nu$  и фиксированного  $\alpha$  можно изменять путем изменения величины постоянного внешнего электрического поля  $\mathbf{E} \parallel OY$ .

Одним из важных моментов, связанных с влиянием неоднородного обменного взаимодействия на спектр объемной магнной моды с номером  $\nu \neq 0$  в пластине толщиной  $2d$  (35), (36), является пропорциональный величине  $(s\nu/2d)$  вклад в энергию активации этого типа спин-волновых возбуждений. Это приводит к тому, что для достаточно больших номеров моды  $\nu$  и фиксированной толщине магнитной пластины  $2d$  и величине постоянного внешнего электрического поля  $\mathbf{E}$  вклад неоднородного обменного взаимодействия в формирование дисперсионных свойств рассматриваемого типа спин-волновых возбуждений будет подавлять эффекты, связанные с косвенным спин-спиновым взаимодействием через дальнедействующее электростатическое поле. Аналогичный эффект будет иметь место и в случае, когда номер магнной моды  $\nu$  и  $|\mathbf{E}|$  фиксированы ( $\nu \geq 1$ ), а толщина магнитной пластины  $2d$  уменьшается (при условии, что (25) не выполнено). В результате для обоих вариантов дисперсионная кривая  $\Omega_{\nu}(k_{\perp})$ , описываемая соотношениями (35), (36), при любой величине волнового числа  $k_{\perp}$  будет волной прямого типа ( $k_{\perp} \partial \Omega_{\nu} / \partial k_{\perp} > 0$ ), не имеющей ни точек экстремума, ни точек кроссовера как при  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$ , так и при  $\mathbf{E} \perp \mathbf{l} \parallel \mathbf{n} \parallel OZ$ .

Следуя [26,27], проанализируем влияние электрического поля  $\mathbf{E}$  на форму поверхности рефракции нормаль-



**Рис. 6.** Влияние пространственной дисперсии на структуру поверхностей волновых векторов кулоновских  $TM$ -поляритонов (38) для  $\mathbf{E} \parallel OY$ ,  $\mathbf{l} \parallel OZ$ . 1 —  $\omega^2 < \omega_A^2$ ,  $|\vartheta| \leq \arctg \sqrt{(4\pi\omega_{\lambda}^2 / (\omega^2 - \omega_{0x}^2) - \bar{\epsilon}_{zz}) / \bar{\epsilon}_{yy}}$ ; 2 —  $\omega_A^2 < \omega^2 < \omega_{\Lambda}^2 + 4\pi\omega_{\lambda}^2 \bar{\epsilon}_{yy} / \bar{\epsilon}_{zz}^2$ ; 3 —  $\omega^2 > \omega_{\Lambda}^2 + 4\pi\omega_{\lambda}^2 \bar{\epsilon}_{yy} / \bar{\epsilon}_{zz}^2$ .



**Рис. 7.** Влияние пространственной дисперсии на структуру поверхностей волновых векторов кулоновских  $TM$ -поляритонов (39) для  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$ . 1 —  $\omega^2 < \omega_B^2$ ,  $|\vartheta| \leq \text{arccotg} \sqrt{(4\pi\omega_{\lambda}^2 / (\omega^2 - \omega_0^2) - \bar{\epsilon}_{yy}) / \bar{\epsilon}_{zz}}$ ; 2 —  $\omega_B^2 < \omega^2 < \omega_B^2 + 4\pi\omega_{\lambda}^2 \bar{\epsilon}_{zz} / \bar{\epsilon}_{yy}^2$ ; 3 —  $\omega^2 > \omega_B^2 + 4\pi\omega_{\lambda}^2 \bar{\epsilon}_{zz} / \bar{\epsilon}_{yy}^2$ .

ных объемных спин-волновых колебаний  $E$ -типа, рассчитанную на основе одновременного учета квадратичного магнитооптического и неоднородного обменного взаимодействия в неограниченном антиферромагнетике, и на связь ее локальной геометрии с найденными выше аномалиями спектра объемных электродипольно-активных магнонов в пластине рассматриваемого антиферромагнетика.

Поскольку волновой вектор рассматриваемой волны в соотношениях (35), (36) лежит в плоскости  $YZ$ , для решения поставленной задачи необходимо с помощью уравнений (7), (8) изучить в  $\mathbf{k}$ -пространстве форму сечения изочастотной поверхности рассматриваемого типа магнонов плоскостью  $k_y k_z$  (рис. 6, 7). Соответ-

ствующее выражение может быть представлено в виде ( $\operatorname{tg} \vartheta = k_y/k_z$ ,  $\mathbf{k}^2 = k_y^2 + k_z^2$ ):

$$\omega^2 - \omega_{0x}^2 - \frac{4\pi\omega_\lambda^2}{\bar{\varepsilon}_{zz} + \bar{\varepsilon}_{yy} \operatorname{tg}^2 \vartheta} = s^2 \mathbf{k}^2, \quad \mathbf{E} \parallel OY, \quad (38)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{4\pi\omega_\lambda^2}{\bar{\varepsilon}_{yy} + \bar{\varepsilon}_{zz} \operatorname{ctg}^2 \vartheta} = s^2 \mathbf{k}^2, \quad \mathbf{E} \parallel OZ. \quad (39)$$

Для  $\mathbf{E} \parallel OY$ ,  $\mathbf{I} \parallel OZ$  анализ экстремальных точек сечения поверхности рефракции (38) и их сопоставление с результатами проведенного выше анализа формы дисперсионной кривой (36) показывают, что наличие при  $k_\perp \neq 0$  локального минимума на дисперсионной кривой исследуемого волноводного  $E$ -магнона (рис. 5, б) связано с формированием в неограниченном кристалле на соответствующем сечении поверхности рефракции ( $\mathbf{k} \in YZ$ ) нормальной спиновой волны той же поляризации (38) участка с максимальной отрицательной гауссовой кривизной (рис. 6). Его положение на кривой (38) в  $\mathbf{k}$ -пространстве определяется условием  $\partial \mathbf{k} / \partial \vartheta = 0$  и однозначно связано с частотой  $\omega$ , номером моды  $\nu$ , толщиной пленки  $2d$  и волновым числом  $k_\perp$  исследуемого волноводного магнона (36). Если же на (38) имеется участок с локальным максимумом отрицательной гауссовой кривизны (при  $\partial \mathbf{k} / \partial \vartheta = 0$ ), то, как показывает анализ, на дисперсионной кривой объемной электродипольно-активной спиновой волны (36) это приводит к формированию локального минимума для соответствующих  $\omega$ ,  $\nu$ ,  $d$  и  $k_\perp$ .

Если рассмотреть сечения (38), (39) прямыми, определяемыми условием  $k_y = \operatorname{const}$ ,  $k_z = \operatorname{const}$ , то анализ общих точек такой прямой и сечения поверхности рефракции позволяет получить дополнительную информацию о структуре спектра соответствующего волноводного магнона  $E$ -типа для заданного волнового числа  $k_\perp$ , частоты  $\omega$ , а также номера моды  $\nu$  (в данном случае кривых (35), (36)). В частности, если направление нормали к поверхности пленки  $\mathbf{n}$  в плоскости волновых векторов  $k_y k_z$  совпадает с легкой осью и направлением постоянного внешнего электрического поля ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{I} \parallel OZ$ ), то число общих точек прямой  $k_y = k_\perp$  и кривой (39) (рис. 7) определяет номера мод спектра объемных спин-волновых колебаний электродипольного типа, которые могут распространяться вдоль оси  $OY$  исследуемой АФМ-пластины толщиной  $2d$  с одинаковым волновым числом  $k_\perp$  и частотой  $\omega$  (т.е. точки кроссовера). В этой же геометрии наличие общих точек кривой (39) и прямой  $k_z = \rho_\nu$  позволяет определить, с какими волновыми числами  $k_\perp$  может распространяться вдоль тонкой пленки толщиной  $2d$  исследуемого легкоосного антиферромагнетика данный тип волноводного магнона  $E$ -типа с фиксированным номером моды  $\nu$  и частотой  $\omega$ .

Поскольку внешняя нормаль к поверхности рефракции совпадает с направлением групповой скорости волны [26,27], то, как следует из совместного анализа (35), (36), исследование локальной геометрии сечения изочастотной поверхности (38), (39) позволяет судить о

том, к какому типу волны (прямоуго или обратному) относится соответствующий участок дисперсионной кривой волноводного магнона, определяемый из (35), (36) заданными  $\omega$ ,  $\rho_\nu$  и  $k_\perp$ . В частности, в рассматриваемом случае  $\mathbf{k} \in YZ$  распространяющаяся вдоль пленки ( $\mathbf{n} \parallel \mathbf{I} \parallel OZ$ ) объемная спиновая волна (35), (36) будет волной обратного типа, если проекция внешней нормали к поверхности рефракции на ось  $OY$  в точке пересечения этой поверхности с прямой  $k_z = \rho_\nu$  имеет отрицательный знак; если же проекция положительна, то соответствующая волна при заданных  $k_\perp$ ,  $\omega$  и  $\rho_\nu$  будет волной прямого типа. Если при некотором  $k_\perp \neq 0$  эта проекция на ось  $OY$  равна нулю, то такая ситуация имеет место в случае, когда на дисперсионной кривой моды с номером  $\nu$  объемных колебаний, бегущих вдоль поверхности пленки толщиной  $2d$ , при частоте  $\omega$  имеется экстремум для этого значения волнового числа  $k_\perp$ . Будет эта точка максимумом или минимумом, определяется знаком локальной гауссовой кривизны кривой (38) или (39) (при  $\mathbf{E} \parallel OY$  или  $\mathbf{E} \parallel OZ$ ) в этой точке.

## 5. Заключение

Таким образом, в работе с учетом квадратичного магнитооптического взаимодействия исследовано влияние внешнего электрического поля на спин-волновую динамику пластины антиферромагнетика с центром симметрии (т.е. не обладающего линейным магнитоэлектрическим эффектом). В частности, показано следующее.

1) Для объемной  $TM$ -волны, падающей на границу раздела немагнитная среда–центросимметричный легкоосный антиферромагнетик во внешнем электрическом поле, уже в безобменном пределе при  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{I} \parallel \mathbf{n}$  может наблюдаться аномальная рефракция, а при  $\mathbf{E} \perp \mathbf{I} \parallel \mathbf{n}$  — отрицательная рефракция.

2) В пластине рассматриваемого центросимметричного антиферромагнетика во внешнем постоянном электрическом поле формируется электродипольно-активная спиновая волна (магнон  $E$ -типа) даже без учета неоднородного обменного взаимодействия.

3) Для заданных ориентаций нормали к поверхности пленки, равновесного вектора антиферромагнетизма и направления распространения объемной спиновой волны можно за счет изменения направления электрического поля изменять тип волны с прямого на обратный и наоборот, т.е. целенаправленно влиять на направление потока энергии, переносимого распространяющейся объемной спиновой волной  $E$ -типа.

4) В случае одновременного учета наряду с электродипольным механизмом косвенного спин-спинового взаимодействия, также неоднородного обмена, постоянное электрическое поле может приводить к формированию при  $k_\perp \neq 0$  точки минимума на дисперсионной кривой объемной магнонной моды  $E$ -типа с заданным номером  $\nu$  или к кроссоверу дисперсионных кривых объемных электродипольно-активных спин-волновых мод с

разными номерами. Найдено взаимно однозначное соответствие между локальной геометрией поверхности рефракции нормальных кулоновских  $TM$ -поляритонов в неограниченном антиферромагнетике и структурой спектра этого типа волноводных колебаний в АФМ-пластине.

В настоящей работе рассматривались особенно распространения нормальных магнитных  $TM$ -поляритонов только в геометриях  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$  и  $\mathbf{E} \parallel OY$ ,  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$ . Однако расчет показывает, что аналогичные обсуждаемым выше эффекты в условиях распространения и дисперсионных свойствах бегущих  $TM$ -поляритонов существуют также в других геометриях. В частности, аномалии, подобные случаю  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$ , могут иметь место также и при  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n} \parallel OY$ ,  $\mathbf{l} \parallel OZ$ , тогда как в случае  $\mathbf{n} \parallel OY$ ,  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$  особенности динамики объемных магнитных поляритонов  $p$ -типа аналогичны рассмотренным выше при  $\mathbf{E} \parallel OY$ ,  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{l} \parallel OZ$ .

Пользуясь приведенными выше соотношениями, проведем оценку параметров centrosymmetric легкого антиферромагнетика, при которых в нем в постоянном внешнем электрическом поле становится возможным существование нового типа безобменных объемных ЭСВ, рассматриваемых в настоящей работе. Исходя из соотношений (10), (12) и (23), (24) ((26), (27)) несложно показать, что относительная ширина области частот, в которой возможно существование обсуждаемых ЭСВ, по порядку величины имеет вид

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{\lambda_3^2 E^2}{32\pi\epsilon\beta M_0^2}, \quad (40)$$

что для  $M_0 \sim 10^3$  Ое и  $\epsilon \sim 1$  дает  $\Delta\omega/\omega_0 \approx \frac{\lambda_3^2 E^2}{\beta} \cdot 10^{-16}$ . Для сравнения приведем величину относительного частотного интервала, в котором при  $|\mathbf{E}| = 0$  для легкого антиферромагнетика  $MnF_2$  имеет место формирование объемной магнитодипольно-активной спиновой волны:  $\Delta\omega/\omega_0 \propto 10^{-3}$  [28].

Таким образом, требуемый АФМ-кристалл должен 1) быть слабоанизотропным (это возможно для кубических или легкоплоскостных антиферромагнетиков или в окрестности ориентационного фазового перехода второго рода); 2) обладать достаточно высокими значениями констант квадратичного магнитооптического взаимодействия; 3) находиться в достаточно сильном постоянном внешнем электрическом поле (но ниже поля электрического пробоя).

К сожалению, нам не удалось найти в литературе все необходимые параметры для одного и того же АФМ-кристалла. Однако известно, что для большинства диэлектриков поле электрического пробоя составляет порядка  $10^7 - 10^8$  В/м, величина константы магнитной анизотропии для АФМ-гранатов, таких как  $FeGeG$  или  $CrGeG$ , —  $\beta \propto 10^{-2}$  [29] (в  $MnF_2$   $\beta \propto 10$  [28]), а в ортоферритах типа  $TmFeO_3$ ,  $HoFeO_3$  или  $DyFeO_3$  константа квадратичного магнитооптического взаимодействия  $\lambda_i \sim 10^{-2}$  [30] (в  $MnF_2$   $\lambda_i \propto 10^{-3}$  [15]). Таким образом, если в АФМ-кристалле одновременно  $\lambda_i \sim 10^{-2}$

и  $\beta \propto 10^{-2}$ , то из (42) следует, что для предельно допустимых значений постоянного внешнего электрического поля  $E \propto 10^7 - 10^8$  В/м относительный частотный диапазон существования объемных ЭСВ составляет  $\Delta\omega/\omega_0 \propto 10^{-4} - 10^{-2}$ .

Кроме того, учитывая, что механизмом, обеспечивающим существенное увеличение эффектов квадратичного магнитооптического взаимодействия, может быть магнитоупругость [30], можно ожидать значительного (особенно в области электромеханического резонанса) увеличения эффектов квадратичного магнитооптического взаимодействия в акустически сплошной структуре типа „слабоанизотропный антиферромагнетик–диэлектрик с высокими значениями констант упругооптического взаимодействия“, помещенной в постоянное внешнее электрическое поле. Подобным путем в работах [31,32] для акустически сплошной структуры типа феррит–пьезоэлектрик была продемонстрирована возможность значительного увеличения значения магнитоэлектрического коэффициента. Более подробному анализу поляритонной динамики структуры типа „слабоанизотропный антиферромагнетик–диэлектрик с высокими значениями констант упругооптического взаимодействия“, помещенной в постоянное внешнее электрическое поле, авторы намерены посвятить отдельную работу.

Следует также отметить, что по аналогии с объемными магнитоэлектрическими волнами [25] расчет спектра объемных кулоновских магнитных  $p$ -поляритонов (35), (36) был выполнен без учета процессов диссипации. В этой связи несомненный интерес представляет ответ на вопрос: при каких условиях подобное приближение справедливо для реальных магнитных пленок? Чтобы в рамках используемого в настоящей работе феноменологического подхода учесть влияние процессов диссипации, можно, следуя стандартной процедуре (см., например, [14,25]), в материальных соотношениях (9)–(12) выполнить замену  $\omega \rightarrow \omega + ig\Delta H$  (где  $\Delta H$  — ширина линии АФМ-резонанса при постоянной частоте). Так как из [33] следует, что для АФМ-резонанса в  $MnF_2$  примерно  $\Delta H \sim 1$  Ое, с помощью (35), (36) получаем, что для успешной регистрации волновых мод  $\Omega_v, \Omega_{v+1}$  вдали от точек кроссовера необходимо, чтобы толщина пластины  $2d$  удовлетворяла соотношению  $d < \pi sv / (4g\Delta H) \sim 0.1$  мм (фазовая скорость спиновой волны  $s \sim 10^5$  см/с [14]). Таким образом, для АФМ-пленок, удовлетворяющих данному критерию, проведенный выше анализ условий отражения и распространения объемных магнитных  $TM$ -поляритонов в пренебрежении процессами диссипации является корректным.

## Список литературы

- [1] R.V. Pisarev. *Ferroelectrics* **162**, 191 (1994).
- [2] В.Н. Криворучко, Д.А. Яблонский. *ЖЭТФ* **94**, 268 (1988).
- [3] В.Н. Криворучко, Т.Н. Соловьева, Д.А. Яблонский. *Опт. и спектр.* **68**, 942 (1990).
- [4] В.Н. Криворучко, Т.Е. Примак. *ФТТ* **33**, 3205 (1991).

- [5] В.Н. Криворучко, Т.Е. Примак. *Опт. и спектр.* **88**, 62 (2000).
- [6] В.Д. Бучельников, В.Г. Шавров. *ЖЭТФ* **109**, 706 (1996).
- [7] V.D. Buchelnikov, V.S. Romanov, V.G. Shavrov. *Ferroelectrics* **204**, 247 (1997).
- [8] В.Д. Бучельников, В.С. Романов, В.Г. Шавров. *РЭ* **43**, 85 (1998).
- [9] С.В. Тарасенко. *ФНТ* **27**, 52 (2001).
- [10] С.В. Тарасенко. *ФНТ* **27**, 178 (2001).
- [11] С.В. Тарасенко. *ФТТ* **41**, 104 (1999).
- [12] С.В. Тарасенко. *ФТТ* **43**, 857 (2001).
- [13] С.В. Тарасенко. *ФТТ* **44**, 872 (2002).
- [14] Е.А. Туров, А.В. Колчанов, В.В. Меньшенин, И.Ф. Мирсаев, В.В. Николаев. Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков. *Физматлит, М.* (2001). 559 с.
- [15] А.С. Боровик-Романов, Н.М. Крейнс, А.А. Панков, М.А. Талалаев. *ЖЭТФ* **64**, 1762 (1973).
- [16] Г.С. Кринчик. *Физика магнитных явлений.* МГУ, М. (1985). 336 с.
- [17] В.В. Еременко, Н.Ф. Харченко, Ю.Г. Литовченко, В.М. Науменко. *Магнитооптика и спектроскопия антиферромагнетиков.* Наук. думка, Киев (1989). 262 с.
- [18] А.С. Савченко, С.В. Тарасенко, Т.Н. Тарасенко. *ФТТ* **49**, 267 (2007).
- [19] А.С. Савченко, С.В. Тарасенко. *Опт. и спектр.* **98**, 431 (2005).
- [20] Л.М. Бреховских. *Волны в слоистых средах.* Наука, М. (1973). 343 с.
- [21] В.В. Филиппов. *Кристаллография* **28**, 234 (1983).
- [22] В.П. Лукомский, А.В. Кузько. *ФТТ* **11**, 2951 (1969).
- [23] Б.А. Калиникос. *Изв. вузов. Физика* **24**, 42 (1981).
- [24] В.А. Kalinikos, A.N. Slavin. *Physica C* **19**, 7013 (1986).
- [25] А.Г. Гуревич, Г.А. Мелков. *Магнитные колебания и волны.* Физматлит, М. (1994). 464 с.
- [26] Ю.И. Сиротин, М.П. Шаскольская. *Основы кристаллофизики.* Наука, М. (1979). 639 с.
- [27] М.К. Балакирев, И.А. Гишинский. *Волны в пьезокристаллах.* Наука, Новосибирск (1982). 239 с.
- [28] R.L. Stamps, R.E. Camley. *J. Appl. Phys.* **56**, 3497 (1984).
- [29] В.И. Соколов, О.И. Шевалеевский. *ЖЭТФ* **72**, 2367 (1977).
- [30] Е.А. Ганьшина, А.В. Зенков, Г.С. Кринчик, А.С. Москвин, А.Ю. Трифонов. *ЖЭТФ* **99**, 274 (1991).
- [31] G. Srinivasan, E.T. Rasmussen, J. Gallegos, R. Srinivasan, Yu.I. Bokhan, V.M. Laletin. *Phys. Rev. B* **64**, 214408 (2001).
- [32] Д.А. Филиппов. *ФТТ* **47**, 1082 (2005).
- [33] *Таблицы физических величин / Под ред. И.К. Кикоина.* Атомиздат, М. (1976). 1008 с.