

## Каскады резонансов Фано в рассеянии Ми

© М.В. Рыбин<sup>1,2</sup>, И.С. Синева<sup>1,2</sup>, К.Б. Самусев<sup>1,2</sup>, М.Ф. Лимонов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН,  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики,  
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: m.gybin@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 19 августа 2013 г.)

Продемонстрирована интерференционная природа резонансного рассеяния Ми, которая описывается в рамках модели Фано. Интерференция обусловлена взаимодействием падающей электромагнитной волны с переизлученными волнами, которые соответствуют собственным модам рассеивающей частицы. В результате интерференции рассеяние Ми проявляется в виде каскадов резонансных линий различной формы, каждая из которых описывается классической формулой Фано. Эффект наблюдается при резонансном рассеянии света на произвольном теле вращения и подробно обсуждается на примере рассеяния на однородном бесконечном диэлектрическом цилиндре.

Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 11-02-00865 и 13-02-00186).

### 1. Введение

Рассеяние Ми [1–3] малыми частицами — фундаментальное оптическое явление, которое сопровождает нас в повседневной жизни, а также определяет физические свойства различных структур и элементов современных приборов. В частности, голубым цветом неба мы обязаны рассеянию Ми, которое также играет ключевую роль в формировании фотонных стоп-зон в целом ряде периодических структур [4], определяет транспортные и оптические свойства фотонных стекол [4–6], случайных лазеров (random lasers) [7,8], метаматериалов [9–12], наноматериалов [13–15].

Аналитическое решение задачи о рассеянии электромагнитной волны на однородной сфере произвольного радиуса и с произвольной диэлектрической проницаемостью было получено независимо в ряде работ, основными из которых являются работы Лоренца [16], Лава [17], Ми [18] и Дебая [19]. В настоящее время теорию, которая описывает это рассеяние, принято называть теорией Лоренца–Ми. Эта теория позволяет найти точное аналитическое решение для задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на однородном, изотропном шаре радиуса  $r$  с известным относительным комплексным показателем преломления  $n$  в виде бесконечных рядов для компонент внутреннего и рассеянного полей. Первоначально под рассеянием Ми подразумевалось рассеяние электромагнитных волн на однородной сфере в 3D-пространстве, однако в настоящее время круг рассеивающих объектов расширен и в него обычно включают различные тела вращения, в том числе эллипсоиды и цилиндры [1]. В последнем случае речь идет о рассеянии в 2D-плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.

Характерной особенностью рассеяния Ми является его резонансный характер в определенной области спек-

тра, когда целое число длин волн совпадает с оптической „толщиной“  $nr$  рассеивающей частицы. Резонансы наблюдаются, когда частота падающей волны  $\omega$  совпадает с одной из собственных частот частицы  $\omega_0$  (имеются в виду частоты, соответствующие квазистационарным состояниям [20]). Это приводит к излучению частицей электромагнитных волн на той же частоте  $\omega_0$  и интерференции между падающей волной и колебаниями, излученными частицей. Возникает вопрос: какие интерференционные эффекты могут при этом наблюдаться?

Определяющим фактором в данном случае является спектральная узость собственных возбуждений частицы и соответственно узость излучаемых резонансных полос. В том случае, если относительно узкая полоса расположена на широком фоновом контуре и интерферирует с ним, можно ожидать эффекты, которые описываются в рамках резонанса Фано [21]. Резонанс Фано наблюдается в том случае, когда некий волновой процесс достигает конечного состояния по двум различным каналам рассеяния. Первый канал соответствует формированию узкой полосы, на ширине которой фаза волны меняется на  $\sim \pi$ . Второй канал соответствует широкой полосе, у которой амплитуда и фаза меняются незначительно в области узкой полосы. Из-за интерференции симметричный лоренцевский контур узкой линии трансформируется в общем случае в несимметричный контур, форма которого описывается в рамках теории Фано [21,22]. Резонанс может приводить к полному пропаданию рассеяния на некоторой частоте, либо вдоль некоторого направления.

Резонанс Фано — явление, которое наблюдается в самых разных физических экспериментах, в том числе при изучении магнитных свойств [23] и электронной поляризуемости [24], в оптических исследованиях полупроводников [25,26], высокотемпературных сверхпровод-

ников [27–29], плазмонных структур [30–42], фотонных кристаллов [43–38] и при анализе транспортных явлений в неупорядоченных одномерных фотонных структурах [49]. Отдельно отметим интерференцию Фано с участием нерезонансного рассеяния Ми в фотонных кристаллах на основе синтетических опалов [50–56]. Как было продемонстрировано экспериментально [47,48], резонанс Фано приводит к перевороту брэгговской линии в спектрах пропускания опалов, т.е. к трансформации брэгговской стоп-зоны в зону пропускания.

В последнее время интерес к изучению резонанса Фано заметно возрастает, о чем свидетельствует, в частности, появление ряда фундаментальных обзоров в ведущих физических журналах [30–32]. Возвращаясь к случаю резонансного рассеяния Ми, следует отметить, что для этого типа рассеяния резонанс Фано уже рассматривался в литературе. В частности, в рамках модели Фано рассматривалась интерференция между различными Ми-модами, а также между резонансным и нерезонансным рассеянием на частице [40,57]. В то же время наиболее очевидный случай интерференции, а именно интерференция между падающей на частицу волной и волной, переизлученной на частоте резонанса Ми, в литературе, насколько нам известно, до сих пор не рассматривался.

В настоящей работе мы занимаемся этой проблемой, а именно аналитическим решением задачи об интерференции падающей волны с каскадом переизлученных волн, обусловленных резонансами Ми различного порядка и различной симметрии. В качестве рассеивающей частицы мы выбрали бесконечный однородный цилиндр. Такой выбор обусловлен рядом причин. Во-первых, цилиндры являются структурными элементами 2D-фотонных кристаллов, которые используются на практике. Во-вторых, задачу о рассеянии света на цилиндре можно свести к 2D-случаю, если рассматривать падающий луч в плоскости, перпендикулярной его оси. При этом вид уравнений заметно упрощается, а основные выводы имеют общий характер и применимы к любому телу вращения, включая сферу. Главный вывод работы состоит в том, что резонансное рассеяние Ми в пространстве, окружающем рассеивающую частицу, представляет собой каскад резонансов Фано, причем каждая полоса, соответствующая определенному резонансу, описывается по классической формуле Фано.

## 2. Обобщенная формула Фано

Начнем изложение результатов с обобщения классической формулы Фано [21,22] на случай многокомпонентного фонового рассеяния. Как было продемонстрировано в различных оптических экспериментах [27,28,47,48], фоновое рассеяние, наблюдаемое в области узкой полосы, состоит, как минимум, из двух компонент. Одна из компонент когерентна узкой полосе, интерферирует с ней и определяет форму ее контура. Вторая компонента имеет другую природу (например,

связана с рассеянием на дефектах структуры), не интерферирует с узкой полосой, однако должна учитываться в формулах, описывающих рассеяние света в системе с резонансом Фано.

Рассмотрим задачу об интерференции двух волн, одна из которых соответствует спектрально широкой полосе, а вторая — резонансной спектрально узкой полосе с амплитудой, пропорциональной функции Лоренца

$$L(\omega) = \frac{\Gamma}{\omega - \omega_0 + i\Gamma}, \quad (1)$$

где  $\omega_0$  и  $\Gamma$  — положение и ширина резонанса соответственно. Введем безразмерную частоту  $\Omega = (\omega - \omega_0)/\Gamma$  и запишем выражение (1) в виде

$$L(\omega) = \frac{1}{\Omega + i}. \quad (2)$$

Итак, мы рассматриваем две волны, одна из которых имеет вид  $A(\omega)e^{i\varphi_A(\omega)}L(\omega)$ , а другая —  $B(\omega)e^{i\varphi_B(\omega)}$ . Будем считать, что  $A(\omega)$ ,  $B(\omega)$ ,  $\varphi_A(\omega)$  и  $\varphi_B(\omega)$  являются вещественными функциями с частотной зависимостью, которой можно пренебречь по сравнению с частотной зависимостью функции Лоренца  $L(\omega)$ . Нас интересует результирующая волна, интенсивность которой имеет вид

$$I(\omega) = \left| \frac{Ae^{i\Delta} + B(\Omega + i)}{\Omega + i} \right|^2. \quad (3)$$

Здесь  $\Delta(\omega) = \varphi_A(\omega) - \varphi_B(\omega)$  — разность фаз двух волн на частоте  $\omega$ . Запишем формулу, описывающую интерференцию Фано, с учетом дополнительного фонового не взаимодействующего рассеяния в виде

$$I(\omega) = \left( \frac{(q + \Omega)^2}{1 + \Omega^2} \eta + (1 - \eta) \right) I_{bg}, \quad (4)$$

где  $q$  — параметр Фано [21],  $I_{bg}$  — полная интенсивность фонового рассеяния, не взаимодействующая компонента которого описывается коэффициентом  $\eta \in [0 \dots 1]$ . Приравняв выражения (3) и (4) для интенсивности  $I(\omega)$ , можно выразить  $q$ ,  $\eta$  и  $I_{bg}$  через параметры  $F = A/B$ ,  $B$  и  $\Delta$

$$q = \frac{F + 2 \sin \Delta + \sqrt{F^2 + 4F \sin \Delta + 4}}{2 \cos \Delta}, \quad (5a)$$

$$\eta = \frac{2F \cos^2 \Delta}{F + 2 \sin \Delta + \sqrt{F^2 + 4F \sin \Delta + 4}}, \quad (5b)$$

$$I_{bg} = B^2. \quad (5c)$$

При  $\eta = 1$  (не взаимодействующее фоновое рассеяние отсутствует) и  $A = 1$  получаем классическую формулу Фано [21,22] для интенсивности узкой линии в единицах сечения рассеяния фоновой компоненты

$$I(\omega) = \frac{(q + \Omega)^2}{1 + \Omega^2} \sin^2 \Delta, \quad (6)$$

при этом выполняются следующие соотношения:

$$q = \cot \Delta, \quad B = \sin \Delta. \quad (7)$$

Формулу Фано часто приводят в виде выражения (6), деленного на коэффициент  $(q^2 + 1)$ , который нормирует резонансную часть амплитуды рассеяния на сечение рассеяния фоновой компоненты:

$$I(\omega) = \frac{1}{q^2 + 1} \frac{(q + \Omega)^2}{1 + \Omega^2}. \quad (8)$$

Выражение (8), описывающее интерференцию Фано, позволяет легко проанализировать форму узкой резонансной линии. В зависимости от знака и величины параметра  $q$  контур узкой линии принимает четыре характерные формы. Две из них соответствуют симметричной линии Лоренца: при  $q \rightarrow \pm\infty$  имеем обращенную вверх в шкале интенсивности линию  $I(\omega) = 1/(1 + \Omega^2)$  (пик на фоновой компоненте), а при  $q = 0$  линия  $I(\omega) = \Omega^2/(1 + \Omega^2)$  обращена вниз, т.е. в спектре фонового рассеяния наблюдается провал. Отметим, что при  $q = 0$  на резонансной частоте  $\omega = \omega_0$  получаем  $\Omega = 0$  и соответственно  $I(\omega) = 0$ . Следовательно, в отсутствие невзаимодействующей компоненты ( $\eta = 1$ ) интенсивность рассеяния на частоте  $\omega_0$  обращается в нуль. При промежуточных значениях параметра Фано  $-\infty < q < 0$  и  $0 < q < +\infty$  узкая линия имеет асимметричную форму, которая меняет свою асимметрию на зеркальную при прохождении параметра Фано через особые точки  $q = 0$  и  $q \rightarrow \pm\infty$ .

Следует также отметить, что абсолютная величина параметра Фано  $q$  определяет относительную величину интенсивностей резонансной и нерезонансной компонент: отношение вероятности рассеяния по резонансному и нерезонансному каналу составляет  $(\pi/2)q^2$  [21].

### 3. Рассеяние Ми на бесконечном цилиндре

Аналитическая теория Ми и обобщенная теория Лоренца–Ми, в которой рассматривается дифракция произвольного векторного пучка на рассеивающей частице, позволяют найти строгое решение для задачи рассеяния плоской монохроматической электромагнитной волны на бесконечном изотропном цилиндре радиуса  $r$  с вещественной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ . Будем считать, что цилиндр находится в воздушной среде с  $\varepsilon_2 = 1$ . Решения получаются в виде бесконечных рядов для компонент рассеянного поля и поля внутри цилиндра и описываются цилиндрическими коэффициентами Лоренца–Ми  $a_n$  и  $b_n$ , соответствующими электрическому и магнитному моменту [1].

В настоящей работе в качестве примера рассмотрим ТЕ-поляризацию, в которой вектор электрического поля  $\mathbf{E}$  перпендикулярен оси цилиндра  $z$  и от нуля отличны компоненты электромагнитного поля ( $E_x, H_y,$

$H_z$ ). Из дальнейших рассуждений станет ясно, что выбор определенного рассеивателя (цилиндра) и определенной поляризации (ТЕ) не накладывает никаких ограничений на наши выводы, справедливые для рассеяния Ми на любом теле вращения и в любой поляризации. В поляризации ТЕ рассеяние определяется одним цилиндрическим коэффициентом Лоренца–Ми  $a_n$  ( $b_n = 0$ ).

Коэффициенты Лоренца–Ми находятся из условий непрерывности тангенциальных составляющих поля (векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ) на границе раздела между цилиндром и окружающей средой. После определения коэффициентов Лоренца–Ми электромагнитное поле может быть вычислено в любой точке пространства. Условия непрерывности для ТЕ-поляризации и тангенциальных составляющих компонент поля  $H$  и  $E$  имеют следующий вид:

$$cE_n J_n(x\sqrt{\varepsilon_2}) + A_n H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2}) = D_n J_n(x\sqrt{\varepsilon_1}), \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 E_n \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\varepsilon_2}) + \varepsilon_1 A_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2}) \\ = \varepsilon_2 D_n \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\varepsilon_1}). \end{aligned} \quad (9b)$$

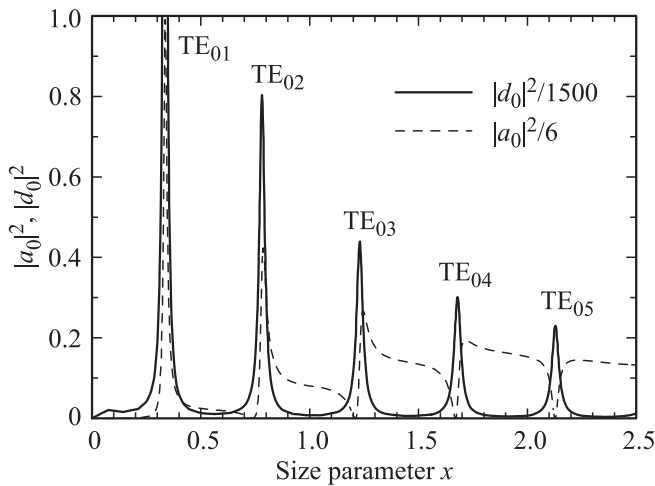
В этих выражениях справа стоит член, определяющий поле внутри цилиндра, а слева — два члена, один из которых задает компоненту плоской падающей волны, а второй определяет поле, рассеянное цилиндром. Параметр  $x = r\omega/c = 2\pi r/\lambda$  определяет безразмерную частоту, параметры  $E_n$ ,  $A_n$  и  $D_n$  задают цилиндрические гармоники амплитуд падающего, рассеянного и внутрицилиндрического магнитного поля соответственно. В выражения входят функции Бесселя  $J_n(\xi)$  и Ханкеля  $H_n^{(1)}(\xi)$ . Коэффициент Лоренца–Ми для рассеянного магнитного поля определяется как  $a_n = A_n/E_n$ . Дополнительно к каноническому коэффициенту  $a_n$  мы ввели новый коэффициент „типа Лоренца–Ми“  $d_n = D_n/E_n$ , характеризующий поле внутри цилиндра.

Используя систему уравнений (9), определяем коэффициенты Лоренца–Ми  $a_n$  и  $d_n$

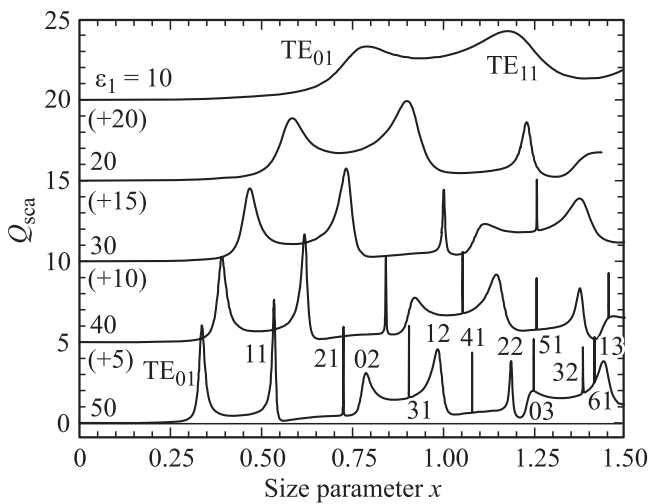
$$a_n = \frac{\varepsilon_2 J_n(x\sqrt{\varepsilon_2}) \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\varepsilon_1}) - \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\varepsilon_2}) J_n(x\sqrt{\varepsilon_1})}{\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial r} H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2}) J_n(x\sqrt{\varepsilon_1}) - \varepsilon_2 H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2}) \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\varepsilon_1})}, \quad (10a)$$

$$d_n = \frac{J_n(x\sqrt{\varepsilon_2}) \frac{\partial}{\partial r} H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2}) - H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2}) \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\varepsilon_2})}{J_n(x\sqrt{\varepsilon_1}) \frac{\partial}{\partial r} H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2}) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2}) \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\varepsilon_1})}. \quad (10b)$$

Резонансные моды цилиндра, возбуждаемые в поляризации ТЕ, будем обозначать как  $TE_{nk}$ . Индекс  $n = 0, 1, 2, \dots$  соответствует порядку мультиполя ( $n = 0$  — диполь,  $n = 1$  — квадруполь и т.д.), а индекс  $k = 1, 2, 3, \dots$  определяет порядок резонанса для каждого  $n$ . В качестве интегральной характеристики рассеяния рассматривают величину  $Q_{\text{sca}} = \frac{2}{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2$  [1]. Соответственно эффективность рассеяния на собственной моде цилиндра, отвечающей конкретному значению  $n$ ,



**Рис. 1.** Спектральная зависимость квадратов модулей коэффициентов Лоренца–Ми  $|a_0|^2$  (штриховая кривая) и  $|d_0|^2$  (сплошная кривая), нормированных на множитель  $2/x$ . Расчет проведен с параметрами  $\epsilon_1 = 50$  и  $\epsilon_2 = 1$ .  $x = r\omega/c = 2\pi r/\lambda$ .



**Рис. 2.** Спектры интегрального сечения  $Q_{sca}$  в ТЕ-поляризации при рассеянии Ми на бесконечном однородном цилиндре с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1 = 10, 20, 30, 40, 50$ , диэлектрическая проницаемость окружающей среды  $\epsilon_2 = 1$ . Спектры сдвинуты по вертикали на величину, приведенную в скобках под соответствующей кривой. Резонансы Ми  $TE_{nk}$  классифицированы для спектров при  $\epsilon_1 = 10$  и  $50$ .

определяется как  $Q_{sca,0} = \frac{2}{x} |a_0|^2$  и  $Q_{sca,n} = \frac{4}{x} |a_n|^2$  при  $n \neq 0$ . На рис. 1 представлены спектральные зависимости  $\frac{2}{x} |a_0|^2$  и  $\frac{2}{x} |d_0|^2$ , которые определяют рассеянное и внутреннее поле для собственной моды цилиндра с симметрией диполя ( $n = 0$ ), т.е. для резонансов Ми симметрии  $TE_{0k}$ . Расчет выполнен с использованием уравнений (10) для случая высокого контраста ( $\epsilon_1 = 50$ ), когда резонансы становятся достаточно узкими. Как видно из рисунка, спектральные зависимости коэффициентов  $a_n$  и  $d_n$  существенно различаются. В частности, коэффициент  $|d_0|^2$ , описывающий поле внутри цилиндра, имеет

классический резонансный характер с симметричными лоренцевскими полосами, соответствующими резонансам Ми  $TE_{0k}$ . Квазипериодический характер функций Бесселя и Ханкеля определяет квазипериодическую последовательность резонансов Ми в частотной шкале. В отличие от спектральной зависимости  $|d_0|^2$  спектр рассеянного цилиндром поля  $|a_0|^2$  характеризуется последовательностью асимметричных контуров, расположенных на тех же частотах, что и Ми-моды цилиндра  $TE_{0k}$ . Причина такой формы линий, связанная с интерференцией Фано между падающим и рассеянным полем, подробно проанализирована в следующем разделе.

На рис. 2 представлена спектральная зависимость коэффициентов Лоренца–Ми в низкочастотной области спектра, где наблюдаются компоненты  $TE_{nk}$  до мультиполей шестого порядка. Видно, что в исследованном диапазоне мультипольные моды порядка  $n \geq 2$  имеют очень малую ширину. Расчетные спектры приведены для пяти значений диэлектрической проницаемости цилиндра:  $\epsilon_1 = 10, 20, 30, 40$  и  $50$ . Видно, что с увеличением  $\epsilon_1$  резонансы существенно сужаются и смещаются в низкочастотную область спектра.

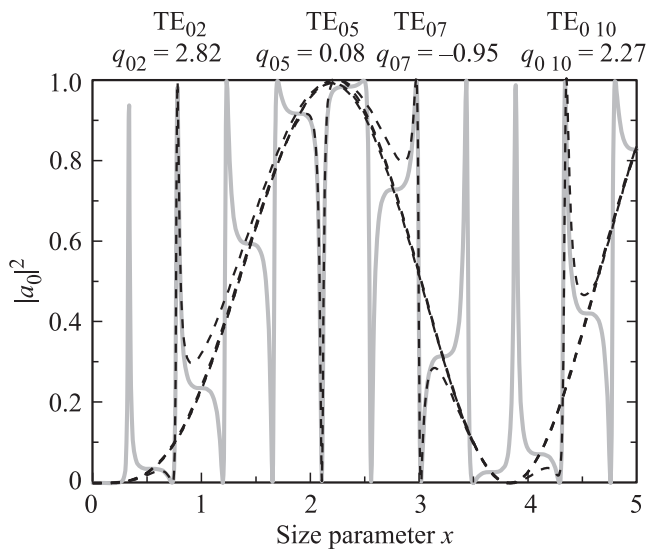
#### 4. Рассеяние Ми как результат интерференции Фано

Приступим теперь к изложению основного результата настоящей работы, а именно продемонстрируем интерференционную природу классического рассеяния Ми, которая описывается в рамках резонанса Фано. С этой целью запишем совместно два соотношения.

$$\epsilon_1 a_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^{(1)}(x\sqrt{\epsilon_2}) = \epsilon_2 d_n \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\epsilon_1}) + \left[ -\epsilon_1 E_n \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\epsilon_2}) \right], \quad (11a)$$

$$\frac{(q + \Omega)^2}{1 + \Omega^2} \sin^2 \Delta = A(\omega) e^{i\varphi_A(\omega)} \frac{1}{\Omega + i} + B(\omega) e^{i\varphi_B(\omega)}. \quad (11b)$$

Первое из них — выражение для рассеянного цилиндром электромагнитного поля, которое определяется коэффициентом Лоренца–Ми  $a_n$ ; второе — аналитическое выражение, описывающее возникновение резонанса Фано при интерференции узкой полосы (симметричный лоренциан) и медленно меняющегося фонового рассеяния (плоская волна). Из соотношений (11) следует прямая аналогия между рассеянием Ми и резонансом Фано. Действительно, анализируя правую часть соотношения (11a), мы можем идентифицировать два члена, один из которых описывает узкие полосы резонансов Ми  $\epsilon_2 d_n \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\epsilon_1})$  с формой линий, соответствующей симметричному лоренциану (рис. 1), а второй член  $\left[ -\epsilon_1 E_n \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\epsilon_2}) \right]$  изменяется существенно медленнее по сравнению с первым при выполнении соотношения



**Рис. 3.** Квадрат модуля коэффициента Лоренца-Ми  $|a_0|^2$  для цилиндра с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1 = 50$ , диэлектрическая проницаемость окружающей среды  $\varepsilon_2 = 1$ . Штриховые линии — результаты фитирования мод  $TE_{02}$ ,  $TE_{05}$ ,  $TE_{07}$ ,  $TE_{010}$ ;  $q$  — соответствующие значения параметра Фано.

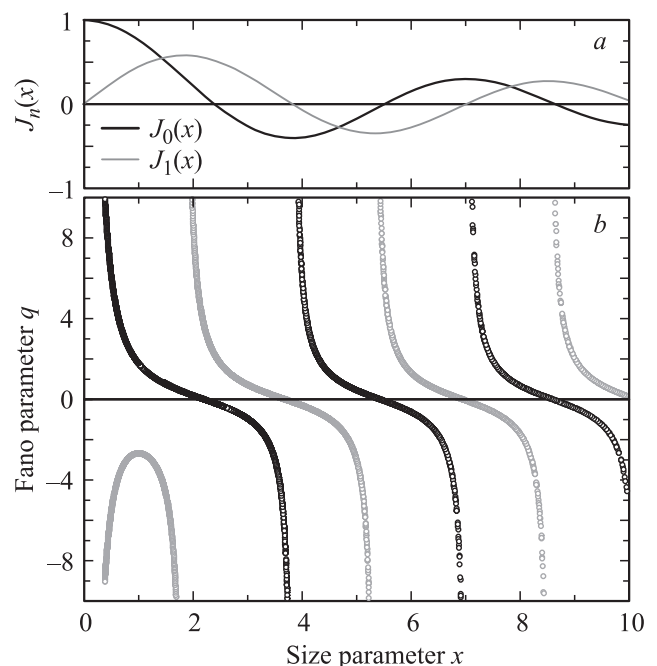
$\sqrt{\varepsilon_1} \gg \sqrt{\varepsilon_2}$ . Таким образом, рассеяние Ми, определяемое компонентой  $\varepsilon_1 a_n \frac{\partial}{\partial r} H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2})$ , является результатом интерференции Фано между широкополосной падающей волной и узкими линиями, которые излучает цилиндр на резонансных частотах.

Чтобы проверить этот принципиальный вывод, мы, во-первых, произвели фитирование контуров резонансных линий  $TE_{nk}$  по формуле (6), чтобы удостовериться в том, что спектр функции  $|a_0|^2$  действительно состоит из каскада резонансов Фано. Во-вторых, для каждого обработанного контура был определен параметр Фано  $q$ , благодаря чему была построена результирующая спектральная зависимость  $q(x)$ .

Задача фитирования спектральных зависимостей  $|a_0|^2$  была решена следующим образом. Наш оригинальный подход основан на том, что при интерференции узкого резонанса  $L(\omega)$  с плоской волной  $Ve^{i\varphi(\omega)}$  не происходит изменения собственной резонансной частоты  $\omega_0$  и ширины линии  $\Gamma$ . При интерференции меняется лишь форма линии, которая характеризуется параметром Фано  $q$  и амплитудой линии в спектре. Используя этот факт, мы провели расчет электромагнитного поля внутри цилиндра  $|d_0|^2$  и определили точные значения  $\omega_0$  и  $\Gamma$  для лоренцевских контуров, а затем, используя эти параметры, произвели фитирование спектра  $|a_0|^2$  для определения параметра  $q$ . На рис. 3 представлены результаты фитирования спектра  $TE_{0k}$  при значении диэлектрической проницаемости цилиндра  $\varepsilon_1 = 50$ . Были обработаны все линии, а на рисунке представлены наиболее характерные примеры. Видно, что спектры  $|a_0|^2$  демонстрируют все характерные черты резонанса Фано, включая трансформацию резонансной полосы Ми от

симметричного пика к симметричному провалу, а также наличие зеркальной симметрии контуров Ми относительно особых точек  $q = 0$  и  $q \rightarrow \pm\infty$ . В частности, для цилиндра с высокой диэлектрической проницаемостью ( $\varepsilon_1 = 50$ ) на малых частотах  $x < 1$  первый резонанс Ми  $TE_{01}$  имеет профиль, близкий к симметричному лоренциану ( $q \rightarrow \infty$ ). С увеличением  $x$  резонансный профиль сначала становится асимметричным ( $q_{02} = 2.82$  для  $TE_{02}$ ), а затем переворачивается ( $TE_{05}$ ,  $q_{05} = 0.08$ ). При дальнейшем увеличении  $x$  резонансная линия демонстрирует зеркальную асимметрию ( $q_{07} = -0.95$  для  $TE_{07}$ ), а затем вновь приобретает форму симметричного пика ( $TE_{09}$ ,  $q_{09} = 18.63$ ). Отметим, что все контуры линий Фано касаются нуля, что свидетельствует о том, что рассеянная цилиндром волна взаимодействует со всей падающей волной, т.е. невзаимодействующая компонента фонового рассеяния отсутствует:  $\eta = 0$ .

Результаты расчета спектральной зависимости параметра Фано  $q$  для резонансных линий, соответствующих дипольной моде  $TE_{0k}$  и квадрупольной моде  $TE_{1k}$  однородного бесконечного диэлектрического цилиндра, представлены на рис. 4. При расчетах использовались профили большого числа резонансов ( $1 \leq k \leq 9$ ) в широком диапазоне диэлектрической проницаемости цилиндров  $\varepsilon_1 = 1-100$ . Благодаря этому были получены наборы расчетных значений  $q$ , которые фактически образуют непрерывные кривые и дают полное представление о поведении резонансов Ми. Зависимость  $q(x) \sim -\cot(x)$ , установленная для дипольной моды  $TE_{0k}$  во всем диапазоне частот и начиная с некоторых значений частоты



**Рис. 4.** Функции Бесселя  $J_n(x)$  порядка  $n = 0, 1$  (a) и зависимость параметра Фано  $q$  от безразмерной частоты  $x = r\omega/c$  для дипольной моды  $TE_{0k}$  (черные кружки) и квадрупольной моды  $TE_{1k}$  (серые кружки) (b).

для мультипольной моды  $TE_{1k}$ , напоминает классическую зависимость параметра Фано от разности фаз  $q(\Delta) = -\cot\Delta$  [22]. Эта зависимость демонстрирует связь формы узкого резонанса с разностью фаз между резонансной модой и фоном для определенной частоты  $\omega$ . Аналогичная котангенциальная зависимость параметра Фано  $q$  была получена нами ранее при изучении рассеяния Фабри–Перо на 1D-фотонной структуре, состоящей из последовательности плоскопараллельных пластин с неупорядоченностью по диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  [49].

Обсудим теперь различие в поведении параметра Фано  $q(x)$ , которое наблюдается для дипольной моды  $TE_{0k}$  и квадрупольной моды  $TE_{1k}$  при малых значениях безразмерной частоты  $x < 1$  (рис. 4). Отметим, что с возрастанием  $x$  зависимости  $q(x)$  для дипольной и квадрупольной моды совпадают. Причина различия кроется в поведении функций Бесселя  $J_n(x)$  для  $n = 0$  и  $n \neq 0$  при малых значениях параметра  $x$ . Из рис. 4 видно, что различие в поведении  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  прямо коррелирует с различием в поведении  $q(x)$  (функции Бесселя высших порядков также равны нулю в начале координат). При этом основная зависимость, характеризующая резонанс Фано,  $q(\Delta) = -\cot\Delta$  выполняется при всех значениях  $x$  и для всех мод  $TE_{nk}$ .

## 5. Заключение

В работе теоретически рассматривается резонансное рассеяние электромагнитных волн на однородном бесконечном диэлектрическом цилиндре. Интенсивность рассеянного света определяется разложением в бесконечный ряд по цилиндрическим гармоникам и описывается коэффициентами Лоренца–Ми. При анализе спектральной зависимости коэффициента Лоренца–Ми  $a_0$  обращает на себя внимание необычная форма резонансных линий, которая в общем случае не имеет ничего общего с симметричными лоренцевскими линиями, соответствующими собственным модам Ми внутри цилиндра.

Проведенный нами анализ показал, что такая форма линий связана с интерференцией падающей плоской волны с волнами, переизлученными цилиндром на частотах собственных мод Ми. Падающая и переизлученные волны когерентны, а их природа такова, что полуширины существенно различаются. В результате возникают условия, необходимые и достаточные для того, чтобы интерференция соответствовала модели резонанса Фано. Выполненный нами детальный анализ однозначно подтвердил эту гипотезу. Следует отметить, что наши выводы не ограничиваются рассеянием электромагнитных волн на цилиндре. Они основаны на прямой аналогии между механизмом рассеяния Ми и механизмом возникновения резонанса Фано. Таким образом, наши выводы справедливы для любой поляризации и любого тела вращения, поддерживающего резонансы Ми.

Авторы благодарят А.А. Каплянскою, Ю.С. Кившаря и П.А. Белова за обсуждение и всестороннюю поддержку

работы, Г.Б. Семушкина и Е.А. Семушкину за обсуждение результатов работы.

## Список литературы

- [1] C.F. Bohren, D.R. Huffman. Absorption and scattering of light by small particles. Wiley–VCH, (1998). 544 p.
- [2] H.C. van de Hulst, Light scattering by small particles. Dover Publ. (1957). 470 p.
- [3] J.A. Stratton. Electromagnetic theory. V.33. Wiley (2007). 640 p.
- [4] Optical properties of photonic structures: interplay of order and disorder / Eds M.F. Limonov, R. De La Rue. CRC Press, Taylor & Francis Group (2012). 566 p.
- [5] M.P. van Albada, B.A. van Tiggelen, A. Lagendijk, A. Tip. Phys. Rev. Lett. **66**, 3132 (1991).
- [6] P.D. García, R. Sapienza, C. López. Adv. Mater. **22**, 12 (2010).
- [7] S. Gottardo, R. Sapienza, P.D. Garcia, A. Blanco, D.S. Wiersma, C. López. Nature Photon. **2**, 429 (2008).
- [8] M.Noginov. Solid-state random lasers. V. 105. Springer (2005). 238 p.
- [9] S. O'Brien, J.B. Pendry. J. Phys.: Cond. Matter **14**, 4035 (2002).
- [10] K. Vynck, D. Felbacq, E. Centeno, A. Căbuz, D. Cassagne, B. Guizal. Phys. Rev. Lett. **102**, 133 901 (2009).
- [11] E. Kallos, I. Chremmos, V. Yannopoulos. Phys. Rev. B **86**, 245 108 (2012).
- [12] Q. Zhao, J. Zhou, F. Zhang, D. Lippens. Mater. Today **12**, 60 (2009).
- [13] D.S. Filonov, A.E. Krasnok, A.P. Slobozhanyuk, P.V. Kapitanova, E.A. Nenasheva, Y.S. Kivshar, P.A. Belov. Appl. Phys. Lett. **100**, 201 113 (2012).
- [14] Y.H. Fu, A.I. Kuznetsov, A.E. Miroshnichenko, Y.F. Yu, B. Luk'yanchuk. Nature Commun. **4**, 1527 (2013).
- [15] B.Rolly, B. Stout, N. Bonod. Opt. Express **20**, 20 376 (2012).
- [16] L. Lorenz. Vidensk. Selsk. Skrifter **6**, 1 (1890).
- [17] A. Love. Proc. London Math. Soc. **1**, 308 (1898).
- [18] G. Mie. Ann. Phys. **330**, 377 (1908).
- [19] P. Debye. Ann. Phys. **335**, 57 (1909).
- [20] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. 6-е изд. Физматлит, М. (2004). 800 с.
- [21] U. Fano. Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
- [22] J.-P. Connerade, A.M. Lane. Rep. Prog. Phys. **51**, 1439 (1988).
- [23] V. Madhavan, W. Chen, T. Jamneala, M.F. Crommie, N.S. Wingreen. Science **280**, 567 (1998).
- [24] N.M. Kabachnik, I.P. Sazhina. J. Phys. B **9**, 1681 (1976).
- [25] F. Cerdeira, T.A. Fjeldly, M. Cardona. Phys. Rev. B **8**, 4734 (1973).
- [26] J.J. Hopfield, P.J. Dean, D.G. Thomas. Phys. Rev. **158**, 748 (1967).
- [27] M.F. Limonov, A.I. Rykov, S. Tajima, A. Yamanaka. Phys. Rev. Lett. **80**, 825 (1998).
- [28] M. Limonov, S. Lee, S. Tajima, A. Yamanaka. Phys. Rev. B **66**, 054 509 (2002).
- [29] B. Friedl, C. Thomsen, M. Cardona. Phys. Rev. Lett. **65**, 915 (1990).
- [30] Y. Francescato, V. Giannini, S.A. Maier. ACS Nano **6**, 1830 (2012).
- [31] A.E. Miroshnichenko, S. Flach, Y.S. Kivshar. Rev. Mod. Phys. **82**, 2257 (2010).

- [32] B. Luk'yanchuk, N.I. Zheludev, S.A. Maier, N.J. Halas, P. Nordlander, H. Giessen, C.T. Chong. *Nature Mater.* **9**, 707 (2010).
- [33] Y. Luo, D.Y. Lei, S.A. Maier, J.B. Pendry. *ACS Nano* **6**, 6492 (2012).
- [34] A.E. Cetin, H. Altug. *ACS Nano* **6**, 9989 (2012).
- [35] J.A. Fan, C. Wu, K. Bao, J. Bao, R. Bardhan, N.J. Halas, V.N. Manoharan, P. Nordlander, G. Shvets, F. Capasso. *Science* **328**, 1135 (2010).
- [36] Z. Fang, Y. Wang, Z. Liu, A. Schlather, P.M. Ajayan, F.H. Koppens, P. Nordlander, N.J. Halas. *ACS Nano* **6**, 10 222 (2012).
- [37] N. Verellen, Y. Sonnefraud, H. Sobhani, F. Hao, V.V. Moschchalkov, P.V. Dorpe, P. Nordlander, S.A. Maier. *Nano Lett.* **9**, 1663 (2009).
- [38] S.H. Mousavi, I. Kholmanov, K.B. Alici, D. Purtseladze, N. Arju, K. Tatar, D.Y. Fozdar, J.W. Suk, Y. Hao, A.B. Khanikaev, S. Ruoff, G. Shvets. *Nano Lett.* **13**, 1111 (2013).
- [39] A.E. Miroshnichenko, Y.S. Kivshar. *Nano Lett.* **12**, 6459 (2012).
- [40] M.I. Tribelsky, S. Flach, A.E. Miroshnichenko, A.V. Gorbach, Y.S. Kivshar. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 043 903 (2008).
- [41] K.A. Tetz, L. Pang, Y. Fainman. *Opt. Lett.* **31**, 1528 (2006).
- [42] A. Artar, A.A. Yanik, H. Altug. *Nano Lett.* **11**, 3694 (2011).
- [43] G. Levy-Yurista, A.A. Friesem. *Appl. Phys. Lett.* **77**, 1596 (2000).
- [44] C. Grillet, D. Freeman, B. Luther-Davies, S. Madden, R. McPhedran, D.J. Moss, M.J. Steel, B.J. Eggleton. *Opt. Express* **14**, 369 (2006).
- [45] S. Fan, J.D. Joannopoulos. *Phys. Rev. B* **65**, 235 112 (2002).
- [46] J. Song, R.P. Zaccaria, M.B. Yu, X.W. Sun. *Opt. Express* **14**, 8812 (2006).
- [47] M.V. Rybin, A.B. Khanikaev, M. Inoue, A.K. Samusev, M.J. Steel, G. Yushin, M.F. Limonov. *Photon. Nanostruct.* **8**, 86 (2010).
- [48] M.V. Rybin, A.B. Khanikaev, M. Inoue, K.B. Samusev, M.J. Steel, G. Yushin, M.F. Limonov. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 023 901 (2009).
- [49] A.N. Poddubny, M.V. Rybin, M.F. Limonov, Y.S. Kivshar. *Nature Commun.* **3**, 914 (2012).
- [50] V.N. Astratov, V.N. Bogomolov, A.A. Kaplyanskii, A.V. Prokofiev, L.A. Samoilovich, S.M. Samoilovich, Y.A. Vlasov. *Nuovo Cimento D* **17**, 1349 (1995).
- [51] A.B. Барышев, A.B. Анкудинов, A.A. Каплянский, В.А. Кособукин, М.Ф. Лимонов, К.Б. Самусев, Д.Е. Усвято. *ФТТ* **44**, 1573 (2002).
- [52] A.B. Барышев, A.A. Каплянский, В.А. Кособукин, М.Ф. Лимонов, А.П. Скворцов. *ФТТ* **46**, 1291 (2004).
- [53] М.В. Рыбин, К.Б. Самусев, М.Ф. Лимонов. *ФТТ* **49**, 2174 (2007).
- [54] M.V. Rybin, K.B. Samusev, M.F. Limonov. *Photon. Nanostruct.: Fundam. Applic.* **5**, 119 (2007).
- [55] M.V. Rybin, A.V. Baryshev, A.B. Khanikaev, M. Inoue, K.B. Samusev, A.V. Sel'kin, G. Yushin, M.F. Limonov. *Phys. Rev. B* **77**, 205 106 (2008).
- [56] К.Б. Самусев, Г.Н. Юшин, М.В. Рыбин, М.Ф. Лимонов. *ФТТ* **50**, 1230 (2008).
- [57] M. Tribelsky, A. Miroshnichenko, Y. Kivshar. *Europhys. Lett.* **97**, 44 005 (2012).