

# 01 Акустические волны в средах с гистерезисной нелинейностью и линейной дисперсией

© В.Е. Назаров, С.Б. Кияшко

Институт прикладной физики РАН,  
603950 Нижний Новгород, Россия  
e-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

(Поступило в редакцию 13 февраля 2013 г. В окончательной редакции 12 июля 2013 г.)

Предложено гистерезисное уравнение состояния поликристаллических твердых тел с насыщением нелинейных потерь. Проведены теоретическое и численное исследования эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения и генерации высших гармоник, возникающих при распространении гармонических акустических волн в стержнях из таких материалов.

## Введение

Амплитудно-зависимое внутреннее трение (АЗВТ), обусловленное движением одномерных дефектов кристаллических твердых тел — дислокаций, известно уже более 70 лет [1–11]. Изучение этого явления направлено на исследование дислокационной структуры твердых тел, определение плотности дислокаций, характера их взаимодействия с точечными дефектами — вакансиями, внедренными и примесными атомами и т.д. Для описания эффектов АЗВТ на основе струнной модели дислокации Келера [11], Гранато и Люкке была создана дислокационная теория амплитудно-зависимого поглощения [3,4]. В этой теории уравнение состояния поликристалла  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ , где  $\sigma$  — напряжение,  $\varepsilon$  — деформация, описывается гистерезисной функцией: площадь петли гистерезиса определяет амплитудно-зависимые (нелинейные) потери, а среднее (по периоду циклической деформации) значение производной  $\langle \sigma'_\varepsilon(0, \text{sign } \dot{\varepsilon}) - \sigma'_\varepsilon(\varepsilon_m, \text{sign } \dot{\varepsilon}) \rangle$  — дефект модуля упругости ( $\varepsilon_m$  — амплитуда деформации). В теории Гранато–Люкке гистерезис в зависимости  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  связывается с последовательным и лавинообразным отрывом дислокаций от внутренних точек закрепления (примесных атомов) при нагрузке и последующим одновременным их закреплением (на них же) при разгрузке, при этом разгрузочные ветви кривой  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  нелинейны, а разгрузочные — линейны. В диапазоне упругих деформаций ( $\varepsilon_m < \Gamma = \text{const}$ ) теория Гранато–Люкке предсказывает монотонно растущие, пропорционально  $(\Gamma/\varepsilon_m) \exp(-\Gamma/\varepsilon_m)$  зависимости нелинейных потерь и дефекта модуля упругости от амплитуды  $\varepsilon_m$ , что, вообще говоря, наблюдается не для всех поликристаллических твердых тел. Так, например, в меди наблюдались линейная [12], квадратичная [13] и экспоненциальная [14] зависимости нелинейных потерь от амплитуды деформации  $\varepsilon_m$ , что связано с большой чувствительностью АЗВТ к малому изменению концентрации примесей и плотности дислокаций [4–7]. Предложенная позднее несколько видоизмененная теория поглощения [15] предполагает, что движение дислокаций ограничивается не

только их линейным натяжением, но и полем упругих напряжений соседних примесных атомов. Такое ограничение приводит вначале к линейной зависимости нелинейных потерь от амплитуды  $\varepsilon_m$ , а затем к их насыщению, при этом разгрузочные ветви кривой  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  так же, как и нагрузочные, становятся нелинейными. Линейные зависимости гистерезисных потерь от амплитуды  $\varepsilon_m$  и их насыщение наблюдались в поликристаллических образцах отожженной меди [16] и цинке [17,18], при этом дефект модуля упругости был пропорционален  $\varepsilon_m^n$ , где для меди  $n = 1; 1/2$ , а для цинка  $n = 1$ . Насыщение гистерезисных потерь наблюдалось также в монокристалле меди [5] и в свинце [19], при этом в свинце дефект модуля упругости был пропорционален  $\varepsilon_m^2$  вначале и  $\varepsilon_m^{1/2}$  на стадии насыщения.

При распространении в поликристалле интенсивной гармонической акустической волны, гистерезисная нелинейность кроме эффектов АЗВТ приводит также к генерации высших гармоник [20]. Поведение гармоник при гистерезисной зависимости  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  качественно отличается от поведения гармоник при гладкой зависимости  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , определяемой пятиконстантной теорией упругости [21] и описывающей деформирование однородных твердых тел и тех же поликристаллов, но при малых напряжениях, недостаточных для отрыва дислокаций от примесных атомов. Гистерезисная зависимость  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ , следующая из теории Гранато–Люкке, не всегда правильно описывает наблюдающиеся в эксперименте с поликристаллами амплитудные зависимости эффектов АЗВТ и генерации гармоник, в видоизмененной же теории [15] аналитического выражения для гистерезисной зависимости  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  не получено. Заметим, однако, что именно уравнение состояния наиболее полно характеризует нелинейные свойства среды, поскольку именно уравнение состояния позволяет в полной мере исследовать нелинейные волновые процессы и описать не только эффекты АЗВТ — нелинейные потери и дефект модуля упругости, но и любые другие характеристики этих процессов. В связи с этим важно

также отметить, что для каждого конкретного материала гистерезисную зависимость  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  можно реконструировать на основе анализа экспериментально установленных для него амплитудных зависимостей эффектов АЗВТ и генерации высших гармоник (обратная задача), что дает возможность решать и прямую задачу о нелинейном распространении волн в таком материале.

В настоящей работе предложено феноменологическое гистерезисное уравнение состояния поликристаллических твердых тел с насыщением амплитудно-зависимых потерь и проведено теоретическое исследование нелинейных процессов, возникающих при распространении акустических волн в стержнях из таких материалов.

### Уравнение состояния поликристалла с насыщением гистерезисных потерь

Уравнение состояния поликристалла, аналогичное гистерезисному уравнению Гранато–Люкке [3,4], но учитывающее насыщение нелинейных потерь и нелинейность ветвей разгрузки [15], можно представить в виде

$$\sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - f_i(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})], \quad (1)$$

$$f_i(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2(1 + \gamma_0|\varepsilon|)} \times \begin{cases} \gamma_1\varepsilon^2, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} > 0, i = 1, \\ -\gamma_2\varepsilon^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\varepsilon_m\varepsilon, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} < 0, i = 2, \\ -\gamma_3\varepsilon^2, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} < 0, i = 3, \\ \gamma_4\varepsilon^2 + (\gamma_3 + \gamma_4)\varepsilon_m\varepsilon, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} > 0, i = 4, \end{cases} \quad (2)$$

где  $E$  — модуль упругости,  $f_i(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  — гистерезисная функция, ее индексы  $i$  соответствуют номеру ветви гистерезиса,  $|f_i(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \ll |\varepsilon|$ ,  $|f'_i(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \ll 1$ ,  $\gamma_0$  и  $\gamma_{1-4}$  — безразмерные параметры,  $\gamma_0 \geq 0$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 0$ ,  $\gamma_3 + \gamma_4 \geq 0$ ,  $|\gamma_i\varepsilon_m| \ll 1$ .

Отличие гистерезисного уравнения (2) от предложенного в работе [20] заключается в наличии множителя  $(1 + \gamma_0|\varepsilon|)^{-1}$ , ответственного за ограничение движения дислокаций и насыщение нелинейных потерь; этот множитель, однако, существенно влияет и на дефект модуля упругости, и на генерацию высших гармоник. Форма гистерезиса (2) изображена на рис. 1, из которого видно, что с ростом параметра  $\gamma_0$  форма гистерезиса изменяется, а его площадь и средний наклон уменьшаются. Из уравнения (2) можно получить выражение для

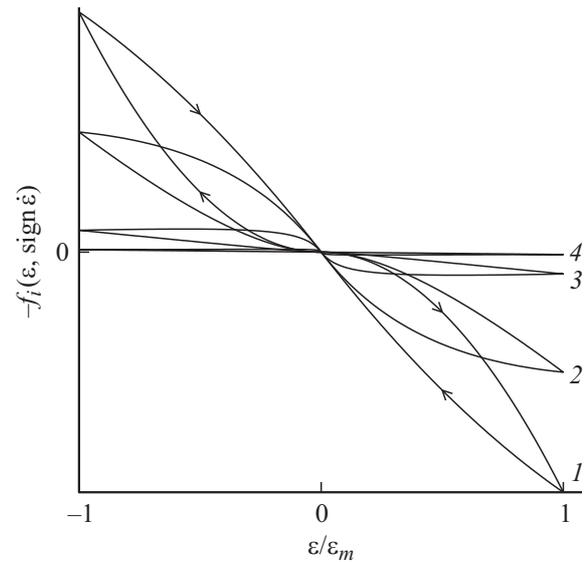


Рис. 1. Качественный вид гистерезисной функции  $f_i(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  при  $\varepsilon_m = 10^{-4}$  и различных параметрах  $\gamma_0$ : 1 — 0, 2 —  $10^4$ , 3 —  $10^5$ , 4 —  $10^6$ .

амплитудно-зависимого декремента

$$\begin{aligned} \delta_h(\varepsilon_m) &= \frac{1}{\varepsilon_m^2} \left[ \int_0^{\varepsilon_m} [f_2(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) - f_1(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})] d\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{-\varepsilon_m} [f_4(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) - f_3(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})] d\varepsilon \right] \\ &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{2\gamma_0^2\varepsilon_m} \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{\gamma_0\varepsilon_m}{2} - \frac{1 + \gamma_0\varepsilon_m}{\gamma_0\varepsilon_m} \ln(1 + \gamma_0\varepsilon_m) \right] > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из этого выражения следует, что при  $\gamma_0\varepsilon_m \ll 1$ ,  $\delta_h(\varepsilon_m) = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)\varepsilon_m/12 \propto \varepsilon_m$ , а при  $\gamma_0\varepsilon_m \gg 1$   $\delta_h(\varepsilon_m) = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/4\gamma_0 = \text{const}$ , что, действительно, соответствует результатам работ [5,15–19].

### Эффекты АЗВТ и генерация высших гармоник при распространении гармонической волны

Здесь мы учтем линейную дисперсию фазовой скорости, что соответствует распространению акустических волн в стержне радиуса  $R$ . Подставляя уравнение (1) в уравнение движения [21]  $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ ,  $U$  — смещение, и учитывая геометрическую дисперсию фазовой скорости в стержне [22,23], получим одномерное волновое уравнение для продольной деформации

$\varepsilon(x, t) = U_x(x, t)$ :

$$\varepsilon_{tt} - C_0^2 \varepsilon_{xx} = -C_0^2 [f_i(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})]_{xx} + \nu^2 r_0^2 [\varepsilon_{tt} - C_t^2 \varepsilon_{xx}]_{xx}, \quad (4)$$

где  $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$  — скорость низкочастотной продольной волны,  $C_t$  — скорость сдвиговой волны,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $r_0 = R/\sqrt{2}$ .

Граничное условие зададим в виде  $\varepsilon(x=0, t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ . Подставляя в линеаризованное уравнение (4)  $\varepsilon(x, t) \propto \exp[i(\omega t - k(\omega)x)]$  получаем дисперсионное соотношение и выражение для фазовой скорости низкочастотных продольных волн в стержне  $C(\omega)$ :

$$k(\omega) = \pm \left[ \frac{\omega}{C_0} + \beta \omega^3 \right], \quad C(\omega) = C_0 [1 - \beta C_0 \omega^2], \quad (5)$$

где

$$\beta = (\nu^2 r_0^2 / 2C_0^3) [1 - (C_t/C_0)^2] = \nu^2 R^2 / 8(1 - \nu) C_0^3, \\ \beta C_0 \omega^2 \ll 1.$$

Геометрическая (линейная) дисперсия фазовой скорости акустических волн не влияет на эффекты АЗВТ — декремент затухания и дефект модуля упругости, но уменьшает эффективность генерации высших гармоник в гистерезисной среде. Решение уравнения (4) будем искать методом возмущений, полагая, что

$$\varepsilon(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(x) \sin[n\theta + \psi_n(x)], \quad (6)$$

где  $\theta = \omega\tau + \Phi(x)$ ,  $\tau = t - x/C_0$ ,  $\varepsilon_n(x)$ ,  $\Phi(x)$  и  $\psi_n(x)$  — медленно меняющиеся функции координаты  $x$ ,  $\psi_1 = 0$ ,  $|\sum_{n=2}^{\infty} e_n(x, \theta)| \ll |e_1(x, \theta)|$ ,  $\varepsilon_m(x) \cong \varepsilon_1(x)$ . Конечно, в общем случае амплитуды  $\varepsilon_n(x)$  и фазы  $\Phi(x)$ ,  $\psi_n(x)$  гармоник нелинейной волны  $\varepsilon(x, \theta)$  зависят не только от координаты  $x$ , но и от начальной амплитуды  $\varepsilon_0$ .

Подставляя разложение (6) в уравнение (5) и оставляя в правой части этого уравнения слагаемое только на основной частоте, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d\varepsilon_n}{dx} \sin[n\theta + \psi_n] + \varepsilon_n \left( n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} \right) \cos[n\theta + \psi_n] \right] \\ = -\frac{1}{2C_0} \frac{d}{d\tau} \{f_i(e_1, \text{sign } \dot{e}_1)\} - \beta \omega^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \varepsilon_n \cos[n\theta + \psi_n]. \quad (7)$$

Разложим нелинейную функцию  $f_i(e_1, \text{sign } \dot{e}_1)$  в уравнении (7) в ряд Фурье

$$f_i(e_1, \text{sign } \dot{e}_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varepsilon_1) \cos n\theta + b_n(\varepsilon_1) \sin n\theta,$$

где

$$a_n(\varepsilon_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(e_1, \text{sign } \dot{e}_1) \cos n\theta d\theta,$$

$$b_n(\varepsilon_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_i(e_1, \text{sign } \dot{e}_1) \sin n\theta d\theta.$$

Выделяя в уравнении (7) слагаемые с одинаковыми частотами, получаем уравнения для амплитуд  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\varepsilon_{n \geq 2}(x)$  и фаз  $\Phi(x)$ ,  $\psi_{n \geq 2}(x)$

$$\frac{d\varepsilon_n}{dx} \cos \psi_n - \varepsilon_n \left( n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} + \beta \omega^3 n^3 \right) \sin \psi_n = \frac{a_n(\varepsilon_1) n \omega}{2C_0}, \quad (8)$$

$$\frac{d\varepsilon_n}{dx} \sin \psi_n + \varepsilon_n \left( n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} + \beta \omega^3 n^3 \right) \cos \psi_n = -\frac{b_n(\varepsilon_1) n \omega}{2C_0}. \quad (9)$$

Для амплитуд и фаз первых трех гармоник уравнения (8), (9) имеют следующий вид:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dz} = -\frac{1}{2\gamma_0^2} \left[ 1 + \frac{\gamma_0 \varepsilon_1}{2} - \frac{(1 + \gamma_0 \varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0 \varepsilon_1)}{\gamma_0 \varepsilon_1} \right], \quad (10)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{2\gamma_0^2 \varepsilon_1} \left[ \frac{\pi}{2} - \gamma_0 \varepsilon_1 - \frac{\ln[\gamma_0 \varepsilon_1 + \sqrt{\gamma_0^2 \varepsilon_1^2 - 1}]}{\sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}} \right] \\ \times \left[ 1 - \frac{b}{\gamma_0 \varepsilon_1} \right] - \frac{\pi b}{8\gamma_0} - m, \quad (11)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dz} \cos \psi_2 - \varepsilon_2 \left( 2 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz} + 8m \right) \sin \psi_2 \\ = -\frac{1}{3\gamma_0^2} \left\{ c\gamma_0 \varepsilon_1 - 6 \left[ d - \frac{c}{\gamma_0 \varepsilon_1} \right] \left[ 1 - \frac{\pi}{2\gamma_0 \varepsilon_1} \right] \right. \\ \left. + \frac{2 - (\gamma_0 \varepsilon_1)^2 \ln[\gamma_0 \varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}]}{2\gamma_0 \varepsilon_1 \sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}} \right\}, \quad (12)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dz} \sin \psi_2 + \varepsilon_2 \left( 2 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz} + 8m \right) \cos \psi_2 \\ = \frac{2d}{\gamma_0^2} \left[ \frac{\gamma_0 \varepsilon_1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma_0 \varepsilon_1} + \frac{(1 + \gamma_0 \varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0 \varepsilon_1)}{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2} \right], \quad (13)$$

$$\frac{d\varepsilon_3}{dz} \cos \psi_3 - \varepsilon_3 \left( 3 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz} + 27m \right) \sin \psi_3 \\ = -\frac{3}{\gamma_0^2} \left[ \frac{\gamma_0 \varepsilon_1}{12} + \frac{5}{6} - \frac{1}{\gamma_0 \varepsilon_1} - \frac{2}{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2} \right. \\ \left. - \frac{[(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 4](1 + \gamma_0 \varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0 \varepsilon_1)}{2(\gamma_0 \varepsilon_1)^3} \right], \quad (14)$$

$$\frac{d\varepsilon_3}{dz} \sin \psi_3 + \varepsilon_3 \left( 3 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz} + 27m \right) \cos \psi_3 \\ = \frac{3}{\gamma_0^2} \left[ 1 - \frac{b}{\gamma_0 \varepsilon_1} \right] \left[ \frac{[4 - 3(\gamma_0 \varepsilon_1)^2] \ln[\gamma_0 \varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}]}{2(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 \sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}} \right. \\ \left. - \frac{\pi}{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2} + \frac{2}{(\gamma_0 \varepsilon_1)} + \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_0 \varepsilon_1}{6} \right], \quad (15)$$

где

$$z = a\omega x/C_0, \quad a = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{2\pi},$$

$$b = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}, \quad c = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4},$$

$$d = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}, \quad m = \frac{\beta C_0 \omega^2}{a}.$$

Из уравнений (10), (11) можно определить локальные амплитудно-зависимые декремент затухания  $\alpha(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1^{-1}(z)[d\varepsilon_1(z)/dz]$  и относительное изменение фазовой скорости  $\eta(\varepsilon_1) = \Delta C(\varepsilon_1)/C_0 = [C(\varepsilon_1) - C_0]/C_0 = a[d\Phi(z)/dz] < 0$  волны основной частоты:

$$\alpha(\varepsilon_1) = \frac{1}{2\gamma_0^2 \varepsilon_1} \left[ 1 + \frac{\gamma_0 \varepsilon_1}{2} - \frac{(1 + \gamma_0 \varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0 \varepsilon_1)}{\gamma_0 \varepsilon_1} \right], \quad (16)$$

$$\frac{\eta(\varepsilon_1)}{a} + m = \frac{1}{2\gamma_0^2 \varepsilon_1} \left[ \frac{\pi}{2} - \gamma_0 \varepsilon_1 - \frac{\ln[\gamma_0 \varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}]}{\sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}} \right]$$

$$\times \left[ 1 - \frac{b}{\gamma_0 \varepsilon_1} \right] - \frac{b\pi}{8\gamma_0}. \quad (17)$$

На рис. 2 показаны графики зависимостей  $\alpha(\varepsilon_1)$  и  $[\eta(\varepsilon_1)/a] + m$ , а также их отношения  $r(\varepsilon_1) = \alpha(\varepsilon_1)/\{[\eta(\varepsilon_1)/a] + m\}$  от амплитуды  $\varepsilon_1$  при различных параметрах  $\gamma_0$  и при  $b = 1/2$ . Из рис. 2 видно, что с ростом  $\varepsilon_1$  коэффициенты  $\alpha(\varepsilon_1)$  и  $[\eta(\varepsilon_1)/a] + m$  также растут: при  $\gamma_0 \varepsilon_1 \ll 1$   $\alpha(\varepsilon_1) \sim |\eta(\varepsilon_1)|/a \propto \varepsilon_1$ , а при  $\gamma_0 \varepsilon_1 \gg 1$  они демонстрируют насыщение. При  $\gamma_0 = 0$  и  $\gamma_0 \varepsilon_1 \ll 1$   $r(\varepsilon_1) = \text{const}$ , а при  $\gamma_0 \varepsilon_1 > 10^{-1}$  отношение  $r(\varepsilon_1)$  начинает заметно расти и также стремится к насыщению.

В общем случае аналитических решений системы уравнений (10)–(15) получить не удастся, поэтому вначале рассмотрим простой частный случай, а затем приведем численное решение этих уравнений. На малых расстояниях (при  $\varepsilon_0 z \ll 1$  и  $\gamma_0 = 0$ ) получаем

$$\varepsilon_1(z) = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon_0 z}{12} \right), \quad \Phi_z(z) = -m - \bar{b}_1 \varepsilon_0,$$

$$\delta(\varepsilon_0) = \varepsilon_0/12, \quad \psi_{2z}(z) = -3m + \bar{b}_1 \varepsilon_0,$$

$$\psi_{3z}(z) = -12m + (3/2)\bar{b}_1 \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_2(z) = \varepsilon_0^2 \sqrt{\bar{a}_2^2 + \bar{b}_2^2} \frac{\sin[(3m - \bar{b}_1 \varepsilon_0)z]}{3m - \bar{b}_1 \varepsilon_0},$$

$$\varepsilon_3(z) = \varepsilon_0^2 \sqrt{\bar{a}_3^2 + \bar{b}_3^2} \frac{\sin[(12m - 3\bar{b}_1 \varepsilon_0/2)z]}{12m - 3\bar{b}_1 \varepsilon_0/2}, \quad (18)$$

где

$$\bar{b}_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{b}{3}, \quad \bar{a}_2 = -\frac{\pi c}{8} - \frac{d}{3}, \quad \bar{b}_2 = -\frac{d}{6},$$

$$\bar{a}_3 = \frac{1}{20}, \quad \bar{b}_3 = -\frac{b}{5}.$$

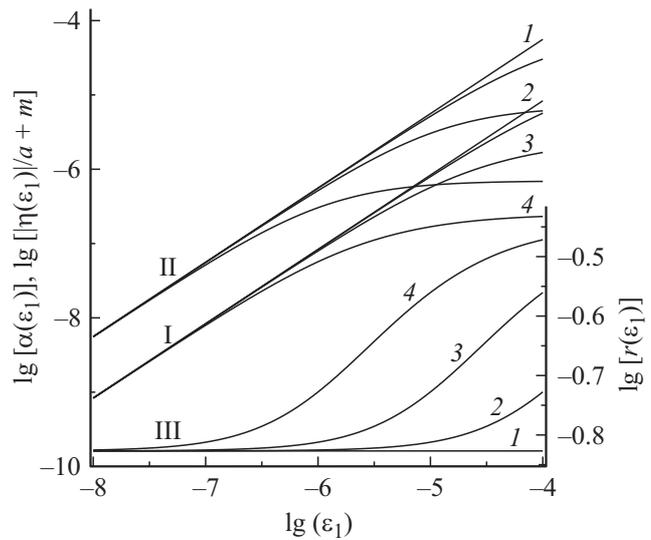


Рис. 2. Зависимость  $\alpha(\varepsilon_1) - I$ ,  $[\eta(\varepsilon_1)/a] + m - II$  и  $r(\varepsilon_1) - III$  от  $\varepsilon_1$  при различных параметрах  $\gamma_0$ : 1 — 0, 2 —  $10^4$ , 3 —  $10^5$ , 4 —  $10^6$  и  $b = 1/2$ .

Из этих выражений видно, что при  $m \gg \bar{b}_1 \varepsilon_0$  линейная дисперсия фазовой скорости препятствует генерации гармоник в гистерезисной среде — амплитуды  $\varepsilon_{2,3}(z)$  обратно пропорциональны дисперсионному параметру  $m$ , при этом с ростом  $z$  амплитуда  $\varepsilon_1(z)$  первой гармоники уменьшается (из-за гистерезисных потерь), а амплитуды высших гармоник  $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$  осциллируют из-за интерференции „вынужденной“ и собственной волн, бегущих с разными фазовыми скоростями  $C(\omega)$  и  $C(n\omega)$  [24]. Частоты пространственных осцилляций амплитуд  $\varepsilon_{2,3}(z)$  составляют соответственно  $3m - \bar{b}_1 \varepsilon_0$  и  $12m - 3\bar{b}_1 \varepsilon_0/2$ .

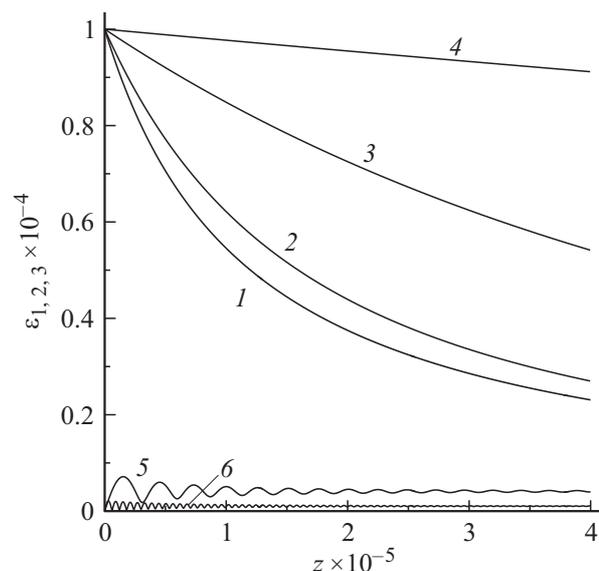


Рис. 3. Зависимости амплитуд  $\varepsilon_1(z)$  от  $z$  при  $\gamma_0 = 0 - I$ ,  $\gamma_0 = 10^4 - 2$ ,  $\gamma_0 = 10^5 - 3$ ,  $\gamma_0 = 10^6 - 4$  и амплитуд  $\varepsilon_{2,3}(z) - 5, 6$  от  $z$  при  $\gamma_0 = 0$ .

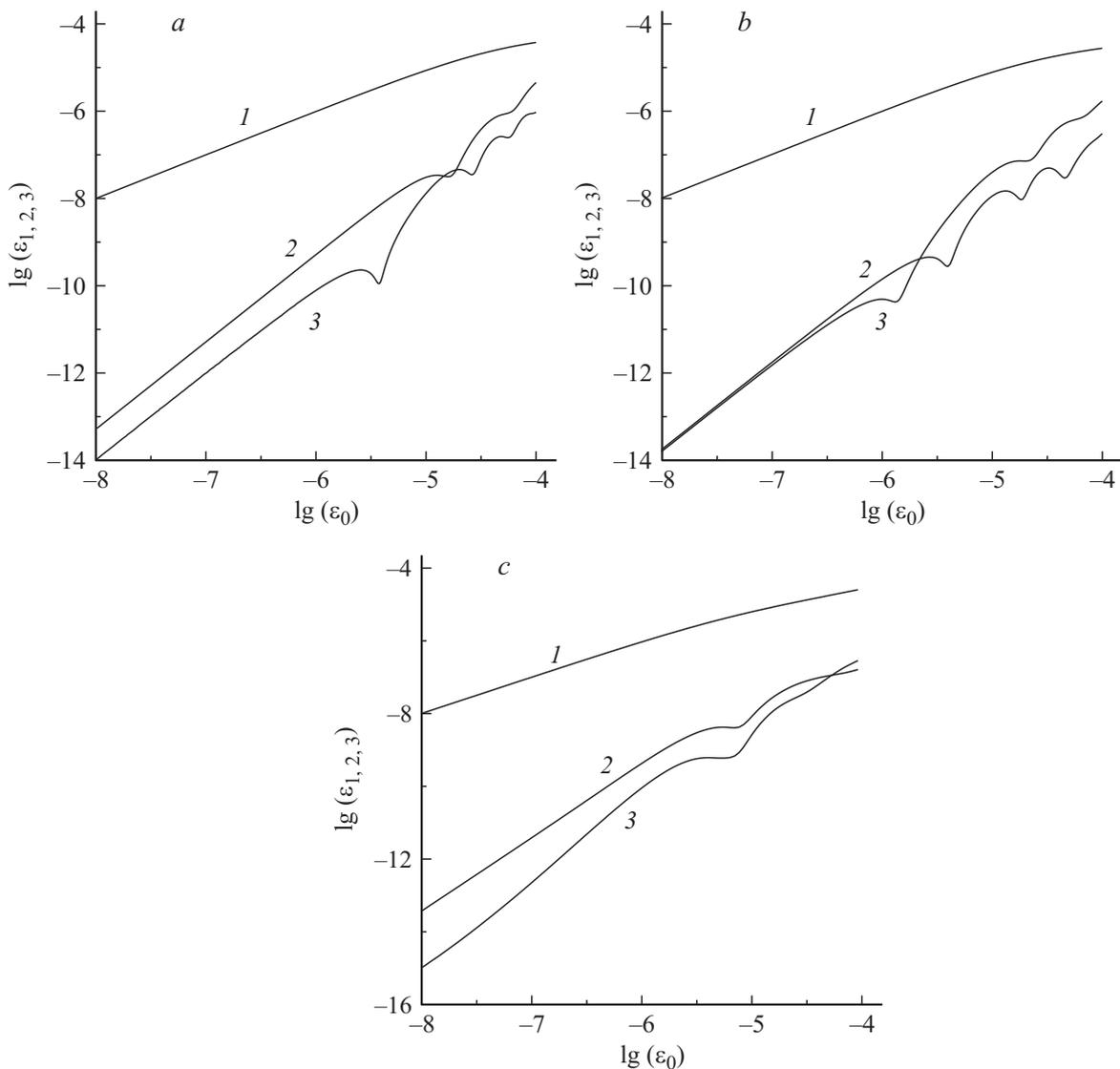


Рис. 4. Зависимости амплитуд  $\varepsilon_{1,2,3}(z)$  от  $\varepsilon_0$  при  $\gamma_0 = 0, z = 2 \cdot 10^5$  — *a*,  $\gamma_0 = 10^4, z = 4 \cdot 10^5$  — *b*,  $\gamma_0 = 10^5, z = 10^6$  — *c*.

Из выражений (18) также следует, что на малых расстояниях  $[(3m - \bar{b}_1 \varepsilon_0)z \ll \pi]$  при увеличении амплитуды  $\varepsilon_0$  волны основной частоты амплитуды высших гармоник  $\varepsilon_{n \geq 2}$  растут монотонно:  $\varepsilon_{n \geq 2} \propto \varepsilon_0^2$ .

### Результаты численного счета

Далее приведем результаты численного решения уравнений (10)–(15), полагая для упрощения расчетов  $d = 0$ , что соответствует случаю одинаковых гистерезисных потерь для синусоидальной волны в фазе сжатия и растяжения:  $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4$ . На рис. 3 приведены зависимости амплитуд  $\varepsilon_{1,2,3}(z)$  первых трех гармоник от расстояния  $z$  (при  $\varepsilon_0 = \text{const}$ ) при различных параметрах  $\gamma_0$  и фиксированных параметрах  $b, c$  и  $m$ :  $b = 1/2, c = 1/5, m = 5 \cdot 10^{-5}$ . Из рис. 3 видно, что с ростом  $z$  амплитуда  $\varepsilon_1$  первой гармоники монотонно

уменьшается из-за гистерезисных потерь, при этом с ростом параметра  $\gamma_0$  скорость уменьшения  $\varepsilon_1(z)$  падает. Амплитуды же  $\varepsilon_{2,3}(z)$  второй и третьей гармоник (при  $\gamma_0 = 0$ ) вначале испытывают пространственные осцилляции (биения), что связано с линейной дисперсией фазовой скорости: между „вынужденной“ и собственной волнами с частотой  $n\omega$  периодически по координате  $z$  возникает расфазировка, равная  $\pi q$  ( $q = 1, 2, \dots$ ), что и приводит к биениям амплитуд  $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$ . С ростом  $z$  амплитуды этих биений уменьшаются (опять же из-за гистерезисных потерь волны основной частоты) и  $\varepsilon_{2,3}(z)$  стремятся к постоянным значениям. На рис. 4 приведены зависимости амплитуд  $\varepsilon_{1,2,3}(z)$  первых трех гармоник от  $\varepsilon_0$  (при  $z = \text{const}$ ) при различных параметрах  $\gamma_0$ . Из рис. 4 видно, что при увеличении  $\varepsilon_0$  амплитуды  $\varepsilon_{1,2,3}(z)$  растут, причем вначале  $\varepsilon_1 \propto \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_{2,3} \propto \varepsilon_0^2$ , затем для амплитуды  $\varepsilon_1$  наблюдается отклонение от линейной зависимости из-за гистерезисных потерь, а амплитуды

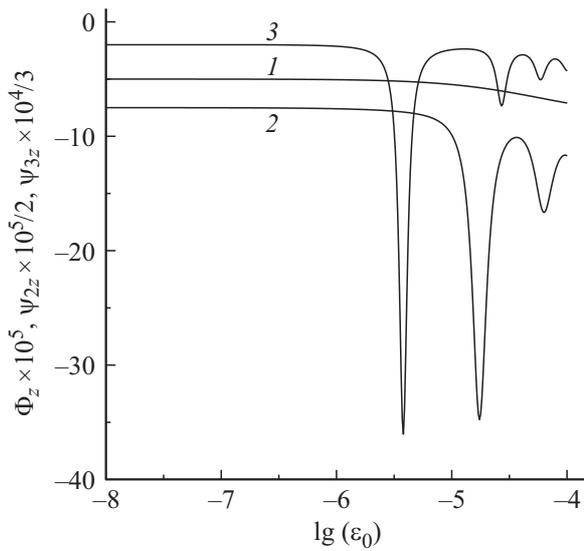


Рис. 5. Зависимости  $\Phi_z(z)$  — 1 и  $\psi_{nz}(z)/n$  — 2, 3 от  $\varepsilon_0$  при  $\gamma_0 = 0$ ,  $z = 2 \cdot 10^5$ .

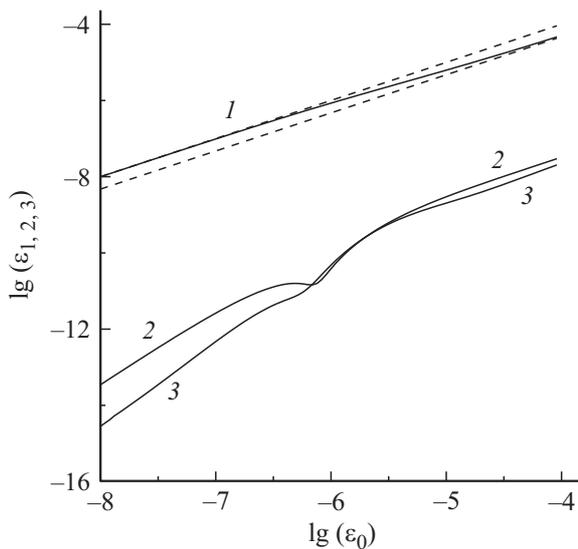


Рис. 6. Зависимости амплитуд  $\varepsilon_{1,2,3}(z)$  от  $\varepsilon_0$  при  $\gamma_0 = 10^6$ ,  $z = 3 \cdot 10^6$ . Штриховые линии соответствуют линейным зависимостям  $\varepsilon_1(z)$  от  $\varepsilon_0$ .

$\varepsilon_{2,3}(z)$  достигают некоторых локальных максимумов, уменьшаются, опять растут и так несколько раз, т. е. при увеличении  $\varepsilon_0$  амплитуды  $\varepsilon_{2,3}(z)$  испытывают осцилляции, при этом соотношения между амплитудами  $\varepsilon_{2,3}(z)$  могут меняться. Такие осцилляции связаны с проявлением нелинейной дисперсии гистерезисной среды: сильная волна накачки и ее слабые гармоники распространяются с фазовыми скоростями  $C_1(z)$  и  $C_{n \geq 2}(z)$  по-разному зависящими от амплитуды  $\varepsilon_1$  сильной волны (или от начальной амплитуды  $\varepsilon_0$ ). На достаточно большом расстоянии  $z$ , при увеличении  $\varepsilon_0$  между „вынужденной“ и собственной волнами с частотой  $n\omega$  возникает расфазировка, что и приводит к биениям амплитуд  $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$

высших гармоник — они также осциллируют из-за интерференции „вынужденной“ и собственной волн, бегущих с разными фазовыми скоростями  $C_1(z)$  и  $C_{n \geq 2}(z)$ . Зависимости скоростей  $C_1(z)$  и  $C_{n \geq 2}(z)$  от  $z$  и  $\varepsilon_0$  определяются производными фаз  $\Phi_z(z)$  и  $\psi_{nz}(z)$  (рис. 5):

$$\frac{\Delta C_1(z)}{C_0} = \frac{C_1(z) - C_0}{C_0} = a \frac{d\Phi(z)}{dz} \ll 1,$$

$$\frac{C_n(z) - C_1(z)}{C_0} = \frac{a}{n} \frac{d\psi_n(z)}{dz} \ll 1.$$

Из рис. 5 видно, что производная  $\Phi_z(z)$  монотонно изменяется при увеличении  $\varepsilon_0$ , а производные  $\psi_{2,3z}(z)$  немонотонны, они имеют несколько максимумов, при этом минимумы амплитуд  $\varepsilon_{2,3}(z)$  при изменении  $\varepsilon_0$  совпадают с максимумами производных  $\psi_{2,3z}(z)$ . Наконец, отметим, что при достаточно больших параметрах  $\gamma_0 = 10^6$  и  $z = 3 \cdot 10^6$  в зависимости  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_0)$  имеют место два линейных участка, где  $\varepsilon_1 \propto \varepsilon_0$ , что и свидетельствует о насыщении нелинейных потерь при больших значениях  $\gamma_0 \varepsilon_1$  (рис. 6). В этом случае при относительно больших амплитудах  $\varepsilon_0 \geq 3 \cdot 10^{-6}$  для амплитуд  $\varepsilon_{n \geq 2}(z)$  высших гармоник имеют место не квадратичные, а линейные зависимости от  $\varepsilon_0$ , что связано с изменением степени гистерезисной нелинейности (2) с 2 на 1:  $f_i(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) \propto (\gamma_i/\gamma_0)\varepsilon$ .

## Заключение

В настоящей работе на основе обобщения и объединения моделей и дислокационных механизмов гистерезисной нелинейности [3,4,15,20] предложено гистерезисное уравнение состояния поликристаллических твердых тел с насыщением амплитудно-зависимых потерь. Методом возмущений проведены теоретическое и численное исследование эффектов амплитудно-зависимых затухания и изменения скорости распространения волны основной частоты и генерации ее второй и третьей гармоник. Показано, что среды, описываемые гистерезисными уравнениями (2), обладают нелинейной дисперсией, приводящей к немонотонному росту амплитуд высших гармоник при увеличении амплитуды волны основной частоты. Этот момент необходимо учитывать при проведении экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов в средах с гистерезисной нелинейностью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ № 11-05-01003\_a.

## Список литературы

- [1] Давиденков Н.Н. // ЖТФ. 1938. Т. 8. Вып. 6. С. 483–499.
- [2] Read T.A. // Phys. Rev. 1940. Vol. 58. P. 371–380.
- [3] Granato A., Lucke K. // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27. N 5. P. 583–593.
- [4] Ультразвуковые методы исследования дислокаций. Сб. статей. Пер. с англ. и нем / Под ред. Л.Г. Меркулова. М.: ИИЛ, 1963. 376 с.

- [5] *Ниблетт Д., Уилкс Дж.* // УФН. 1963. Т. 80. Вып. 1. С. 125–187.
- [6] *Физическая акустика* / Под ред. У. Мезона. Т. 4, Ч. А. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. М.: Мир, 1969. 436 с.
- [7] *Физическая акустика* / Под ред. У. Мезона. Т. 3, Ч. А. Влияние дефектов на свойства твердых тел. М.: Мир, 1969. 578 с.
- [8] *Asano S.* // J. Phys. Soc. Jap. 1970. Vol. 29. N 4. P. 952–963.
- [9] *Лебедев А.Б.* // ФТТ. 1993. Т. 35. Вып. 9. С. 2304–2340.
- [10] *Лебедев А.Б.* // ФТТ. 1999. Т. 41. Вып. 7. С. 1214–1221.
- [11] *Koehler J.S.* Imperfections in nearly perfect crystals. NY: John Wiley and Sons, 1952. P. 197–216.
- [12] *Novick A.S.* // Phys. Rev. 1950. Vol. 80. N 2. P. 249–257.
- [13] *Takahachi S.* // J. Phys. Soc. Jap. 1956. Vol. 11. N 12. P. 1253–1261.
- [14] *Beshers D.N.* // J. Appl. Phys. 1959. Vol. 30. N 2. P. 252–258.
- [15] *Swartz J.C., Weertman J.* // J. Appl. Phys. 1961. Vol. 32. N 10. P. 1860–1865.
- [16] *Назаров В.Е.* // ФММ. 1991. Т. 37. Вып. 1. С. 150–156.
- [17] *Назаров В.Е.* // Акуст. журн. 2000. Т. 46. Вып. 2. С. 228–233.
- [18] *Nazarov V.E., Kolpakov A.B.* // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107. N 24. P. 1915–1921.
- [19] *Назаров В.Е.* // ФММ. 1999. Т. 88. Вып. 4. С. 82–90.
- [20] *Назаров В.Е., Сутин А.М.* // Акуст. журн. 1989. Т. 35. Вып. 4. С. 711–716.
- [21] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
- [22] *Samsonov A.M.* Strain Solution in Solids and how to construct them. Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton, London, NY, 2001.
- [23] *Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 5. С. 1–8.
- [24] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990.