

01

Феномен статистической устойчивости

© И.И. Горбань

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины,
03187 Киев, Украина
e-mail: igor.gorban@yahoo.com

(Поступило в Редакцию 17 июня 2013 г.)

Приведены результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости физических процессов, подтверждающие, что реальные процессы в целом статистически неустойчивы, но нарушение устойчивости, как правило, оказывается значимым лишь при больших интервалах наблюдения. Обобщены результаты, касающиеся взаимосвязи статистической устойчивости процесса и его спектра, а также специфики закона больших чисел теории вероятностей при нарушениях статистической устойчивости. Исследованы пути образования статистически неустойчивых процессов.

Введение

Особое место среди явлений окружающего мира занимает феномен статистической устойчивости, состоящий в том, что скрытые закономерности, не фиксируемые на уровне единичных наблюдений, проявляются при усреднении данных. На этот феномен впервые обратил внимание торговец сукном Дж. Граунд в 1662 г. [1]. Углубленное изучение этого удивительного явления привело к созданию современной теории вероятностей.

Хотя в настоящее время теория вероятностей обычно позиционируется математиками как чисто математическая теория [2], базирующаяся на системе абстрактных математических аксиом А.Н. Колмогорова [3], ее физические истоки не перестают играть основополагающую роль во всех физических, технических, социологических и прочих дисциплинах.

Поэтому на наш взгляд [4–6] теорию вероятностей со всеми ее многочисленными прикладными направлениями правильно было бы рассматривать как физико-математическую теорию, основанную не только на математических аксиомах, но и физических гипотезах (предположениях), основанных на результатах экспериментальных исследований.

В рамках теории вероятностей массовые физические явления описываются случайными (стохастическими) моделями, ключевую роль в которых играет вероятностная мера.

В основе построения таких моделей лежит физическая гипотеза идеальной статистической устойчивости частоты событий [4,5], означающая на математическом языке сходимости частоты к некоторой постоянной величине — вероятности. Эта гипотеза позволяет предположить наличие идеальной статистической устойчивости (сходимости) статистических оценок параметров и характеристик любых физических явлений — реальных событий, величин, процессов и полей.

Удостовериться в корректности таких предположений непросто, так как объем выборки всегда ограничен и поэтому доказать экспериментально сходимость невозможно. В пользу указанных предположений свидетельствует то обстоятельство, что уже при относительно

небольшом объеме выборки, как правило, прослеживается тенденция стабилизации значений усредненных величин.

Многие годы гипотеза идеальной статистической устойчивости считалась незыблемой, хотя многие видные ученые (такие как А.А. Марков, А.В. Скороход, Э. Борель, В.Н. Тутубалин и даже основоположник современной аксиоматической теории вероятностей А.Н. Колмогоров) понимали, что в реальном мире эта гипотеза справедлива лишь с определенными оговорками.

Многочисленные экспериментальные исследования разнообразных физических процессов на больших интервалах наблюдения показывают [4,7–10], что гипотеза идеальной статистической устойчивости не подтверждается: в отличие от небольших объемов выборки при больших ее объемах стабилизация значений усредненных величин не прослеживается. У разных типов процессов объем выборки (или интервал наблюдения), на котором начинают проявляться нарушения статистической устойчивости, и степень этих нарушений разные.

При пренебрежимо малых нарушениях статистической устойчивости корректное описание явлений обеспечивается в рамках классической теории вероятностей с помощью стохастических моделей. При более существенных нарушениях приходится пользоваться моделями других типов.

В большинстве случаев нарушение устойчивости фиксируются уже при расчете выборочного среднего, хотя встречаются процессы, в которых нарушения устойчивости обнаруживаются при анализе лишь выборочного среднеквадратического отклонения (СКО) или выборочных моментов более высокого порядка.

Долгое время оставались неясными причины, вызывающие нарушения статистической устойчивости. Положительные сдвиги в понимании наметились после установления связи между статистической устойчивостью процесса и его спектром [11]. Оказалось, что многие хорошо известные процессы, в частности фликкер-шум, неравновесные процессы и некоторые цветные шумы, статистически неустойчивы.

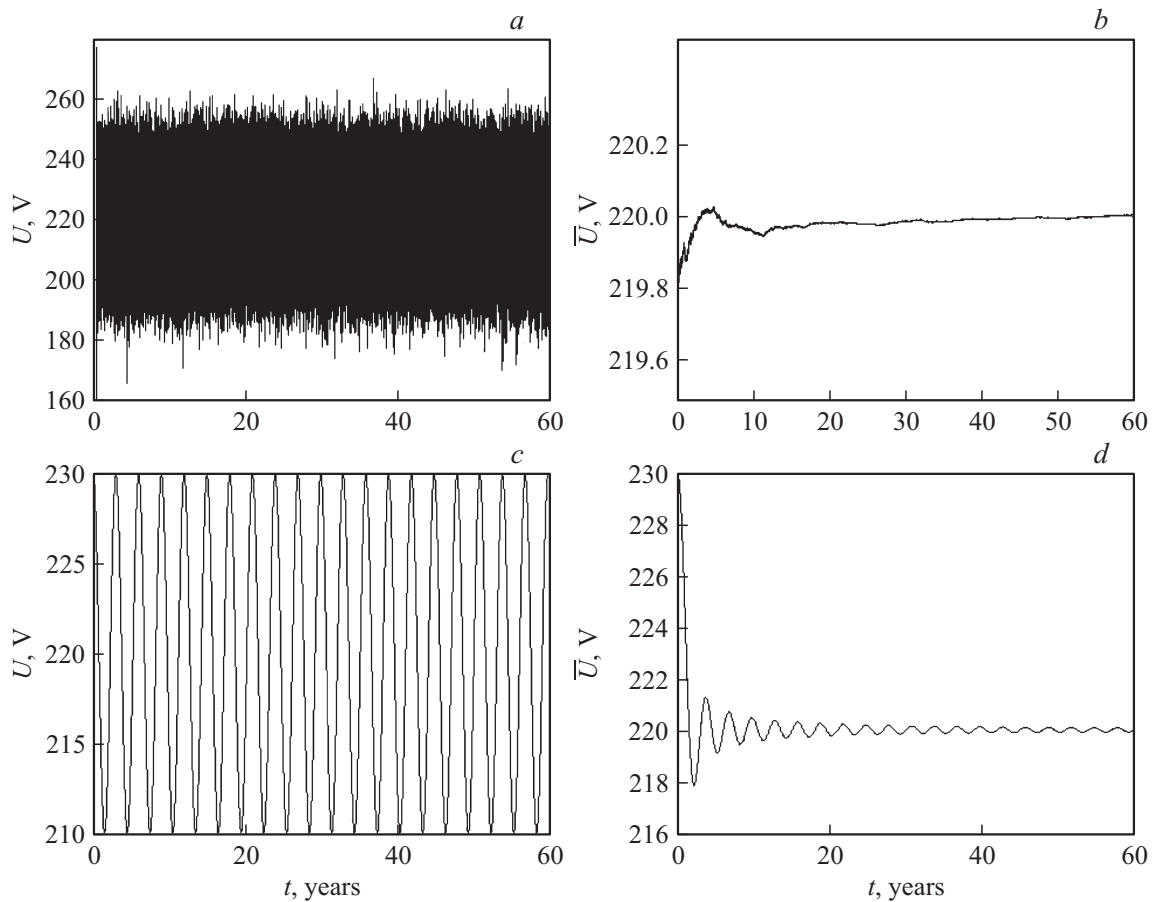


Рис. 1. Примеры статистически устойчивых процессов: *a* — реализация белого гауссовского шума (стационарный процесс), *c* — гармоническое колебание, *b* и *d* — соответствующие выборочные средние.

Изучению феномена статистической устойчивости посвящено много работ. Целью настоящей работы является обобщение методики оценки нарушений статистической устойчивости, представление известных и новых результатов экспериментальных исследований статистической устойчивости различных процессов, обобщение и представление новых материалов, касающихся связи статистической устойчивости процесса с его спектром, и выяснение путей образования статистически неустойчивых процессов.

1. Краткий экскурс в историю исследования статистической устойчивости

Сведений об исследованиях статистической устойчивости в период с конца XVII по конец XIX столетия не очень много [1], хотя сохранились данные об исследованиях, проводимых Дж. Граунтом, В. Пети, Э. Галлеем, Д. Венном, С.Д. Пуассоном, И.Ж. Бьенеме, О. Курно, А. Кетле, Я. Бернулли и др. Частоту выпадения определенной стороны монеты исследовали Лаплас, Бюффон, К. Пирсон и другие ученые.

Систематические исследования статистической устойчивости начались в конце XIX в. Немецкий статистик

В. Лексис в 1879 г. впервые попытался связать понятие статистической устойчивости с дисперсией случайной величины. На рубеже столетий и в начале XX в. исследованием статистической устойчивости занимались А.А. Чупров, В.И. Борткевич, А.А. Марков, Р. фон Мизес и др. [12,13]. В последующие годы интерес к таким исследованиям ослаб.

После более чем полувекового забвения интерес к исследованию статистической устойчивости появился в конце XX в. в связи с постановкой новых задач, требующих проведения высокоточных измерений и обработки больших массивов данных.

Как ни странно до недавнего времени понятие статистической устойчивости оставалось неформализованным. Его можно формализовать разными способами [4,7,14]. Один из них, представленный ниже, основан на анализе динамики изменения усредненных величин.

2. Статистически устойчивые и неустойчивые процессы

Характерной особенностью статистически устойчивых процессов (рис. 1) является то, что при увеличении интервала усреднения усредненные величины этих процессов проявляют тенденцию к стабилизации. Стати-

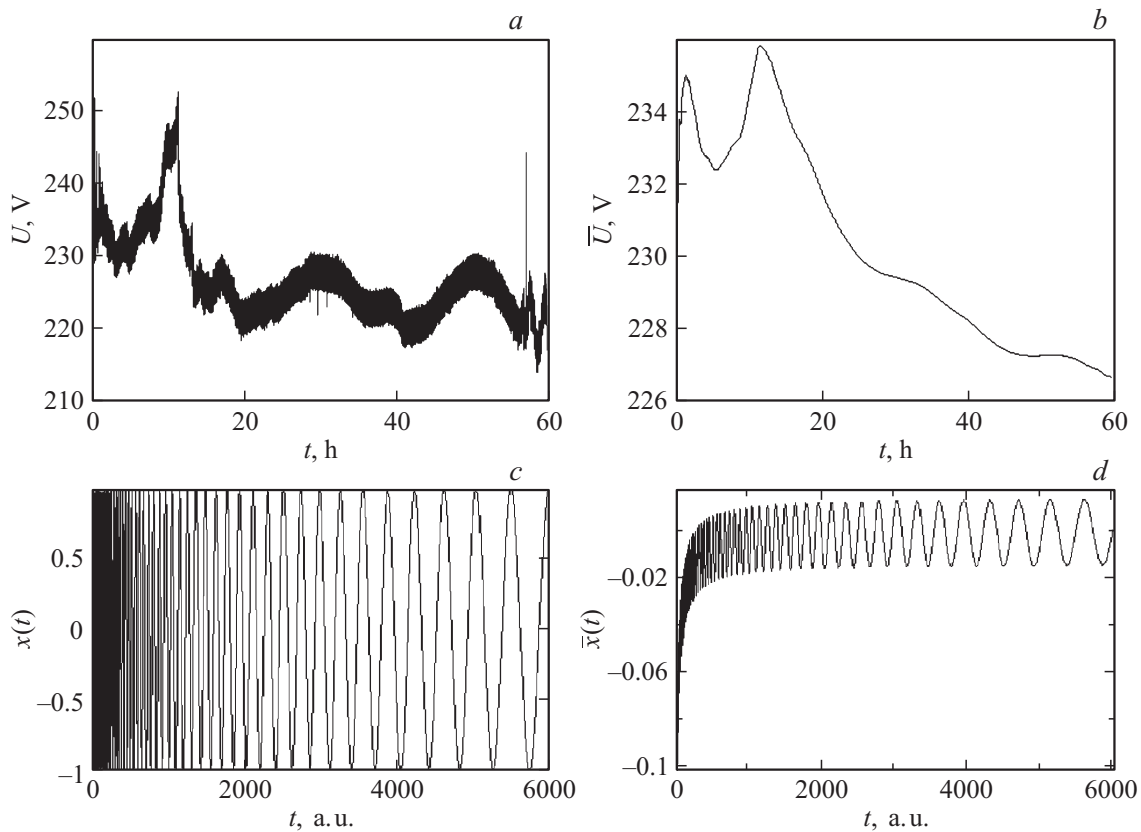


Рис. 2. Примеры статистически неустойчивых процессов: колебание напряжения в городской электросети на протяжении 60 h наблюдения (выраженный нестационарный процесс) (a), модель детерминированного колебания с нарастающим периодом (c) и соответствующие выборочные средние (b, d).

стически неустойчивые процессы таким свойством не обладают (рис. 2).

Приведенные примеры демонстрируют, что случайные и детерминированные процессы могут быть как статистически устойчивыми, так и неустойчивыми. Очевидно, что понятия нестационарности и статистической неустойчивости — разные понятия.

3. Методика оценки нарушений статистической устойчивости

Нарушения статистической устойчивости процесса $X(t)$, представленного случайной последовательностью X_1, X_2, \dots , могут быть зафиксированы путем анализа динамики изменения выборочных дисперсий флуктуаций выборочных усредненных величин, в частности выборочного среднего

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (n = \overline{1, N})$$

и выборочного СКО

$$Z_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_n)^2} \quad (n = \overline{2, N}).$$

Для уменьшения влияния колебаний дисперсии D_{x_n} анализируемого процесса обычно целесообразно анализировать не выборочные дисперсии, а величины, нормированные на усредненную дисперсию

$$\overline{D}_{x_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_{x_n}.$$

Следуя [4,7,14], случайный процесс $X(t)$ считается статистически устойчивым по отношению к выборочному среднему, если при устремлении объема выборки N к бесконечности параметр статистической неустойчивости

$$\gamma_N = M[\overline{D}_{Y_N}] / \overline{D}_{x_N}$$

стремится к нулю, и статистически устойчивым по отношению к СКО, если к нулю стремится параметр статистической неустойчивости

$$\Gamma_N = M[\overline{D}_{Z_N}] / \overline{D}_{x_N},$$

где $M[\cdot]$ — оператор математического ожидания, \overline{D}_{Y_N} — выборочная дисперсия флуктуации выборочного среднего Y_n , а \overline{D}_{Z_N} — выборочная дисперсия флуктуации выборочного СКО Z_n .

Процессы, не обладающие указанными свойствами, считаются статистически неустойчивыми соответственно по отношению к выборочному среднему и выборочному СКО.

При малых нарушениях устойчивости имеет смысл использовать параметры

$$\mu_N = \sqrt{\gamma_N(1 + \gamma_N)}, \quad h_N = \gamma_N/\gamma_{0N}$$

и

$$M_N = \sqrt{\Gamma_N/(1 + \Gamma_N)}, \quad H_N = \Gamma_N/\gamma_{0N},$$

обладающие повышенной чувствительностью, где γ_{0N} — величина, выступающая в роли единицы измерения статистической неустойчивости и представляющая собой параметр γ_N , рассчитанный для идеальной статистически устойчивой последовательности N некоррелированных отсчетов с постоянной дисперсией $D_{x_n} = D_x$ и нулевым математическим ожиданием.

При экспериментальных исследованиях на интервалах конечной длительности вместо параметров γ_N , μ_N , h_N и Γ_N , M_N , H_N приходится использовать их оценки γ_N^* , μ_N^* , h_N^* и Γ_N^* , M_N^* , H_N^* .

Факт принадлежности к статистически устойчивым процессам устанавливают по обнаружению на рассматриваемом интервале наблюдения тенденции стремления этих оценок к нулю.

4. Экспериментальные исследования статистической устойчивости физических величин и процессов

Для выяснения того, являются ли реальные процессы статистически устойчивыми или нет и, если в целом они неустойчивы, то на каком интервале наблюдения их можно считать устойчивыми, исследовались разнообразные физические процессы.

Изучались колебания напряжения в городской электросети, высоты и периода следования поверхностных волн, магнитного поля Земли, температуры воды в океане, температуры воздуха и количества осадков в разных городах, интенсивности рентгеновского излучения астрофизических объектов и др. Результаты некоторых из этих исследований приведены ниже.

Изменение магнитного поля Земли

Зависимость от времени параметра статистической неустойчивости μ_N^* для магнитного поля Земли [4] приведена на рис. 3. Исходные данные, по которым проводились расчеты, получены Институтом земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.

Из кривых на рисунке видно, что колебания магнитного поля носят статистически неустойчивый характер. На интервале времени, большем нескольких месяцев, статистический прогноз уровня магнитной индукции проблематичен, а на протяжении нескольких лет — практически невозможен.

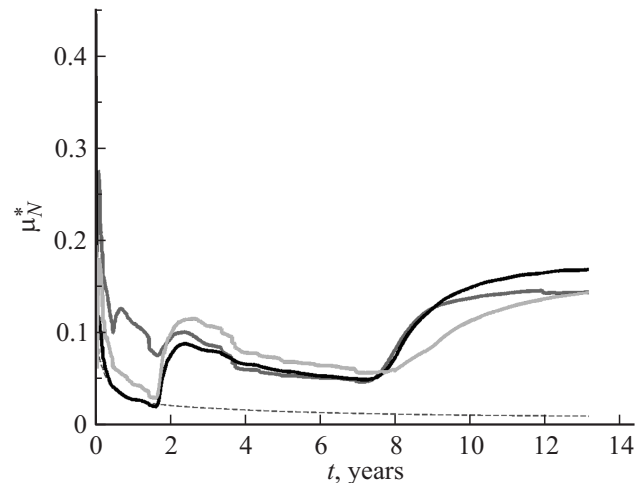


Рис. 3. Изменение за 13 лет наблюдения значений параметра μ_N^* для x , y , z , составляющих индукции в районе Москвы (непрерывные кривые). Для сравнения приведены результаты расчета этого же параметра для белого гауссовского шума (пунктирная кривая).

Волнение моря

Результаты расчета [15] параметра статистической неустойчивости μ_N^* по экспериментальным данным, полученным в Черном море с сентября 2001 г. по декабрь 2003 г. Институтом океанологии им. П.П. Ширшова РАН, приведены на рис. 4.

Из кривых на рисунке видно, что высота волн и период их следования носят статистически неустойчивый характер. Статистический прогноз на интервале времени, превышающем 10–12 h практически невозможен.

Колебания температуры воды в океане

Результаты расчета параметра статистической неустойчивости μ_N^* [16] по экспериментальным данным, полученным Тихоокеанским океанологическим институтом ДВО РАН в заливе Посыета Тихого океана с октября 2010 по май 2011 г., приведены на рис. 5. При расчете для устранения влияния сезонных изменений исходные данные подвергались предварительной низкочастотной фильтрации.

Из кривых видно, что колебания температуры носят выраженный статистически неустойчивый характер. Статистическая устойчивость теряется очень быстро.

Колебания температуры воздуха и количества осадков

Представление о статистической устойчивости колебаний температуры воздуха и количества осадков дают приведенные на рис. 6 кривые [8], полученные на основе данных наблюдения погоды в Москве с 1949 по 1992 г. и в Киеве с 1881 по 1992 г.

Из приведенных кривых следует, что колебания температуры воздуха носят выраженный статистически

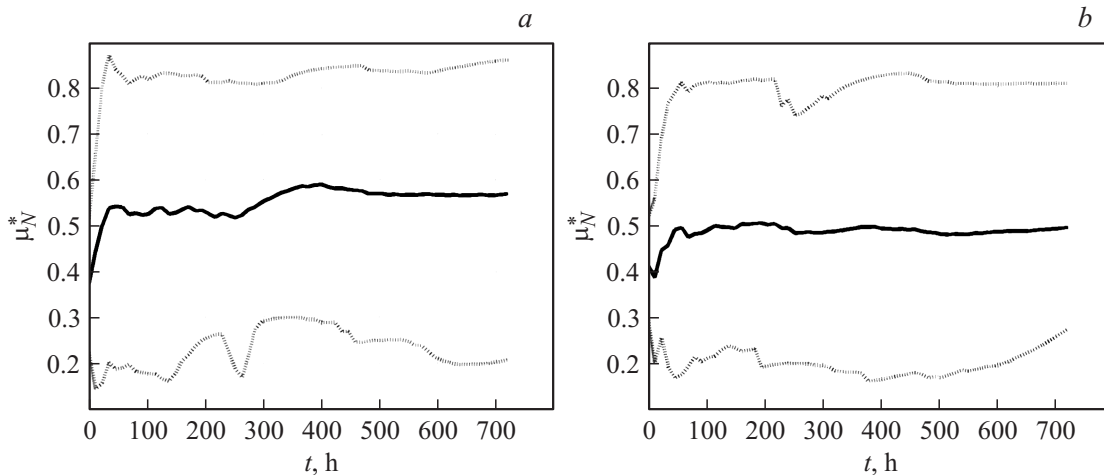


Рис. 4. Зависимость от времени усредненных за 15 месяцев значений параметров статистической неустойчивости μ_N^* (непрерывные кривые) и границ изменения этих параметров (точечные кривые): *a* — для высоты максимальных по амплитуде волн, *b* — для периода следования максимальных по амплитуде волн.

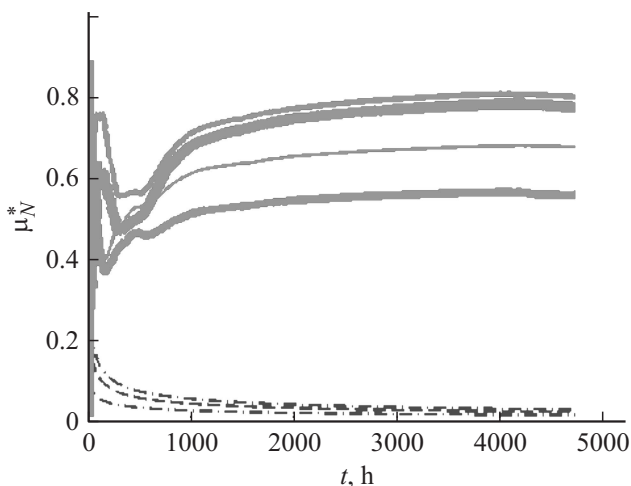


Рис. 5. Зависимость от времени параметра статистической неустойчивости μ_N^* для четырех датчиков температуры, расположенных на разных глубинах (непрерывные кривые) в четырех точках Тихого океана, а также для контрольного белого гауссовского шума (штриховая кривая) с его односигмовыми отклонениями (штрихпунктирные кривые).

неустойчивый характер. Заметные нарушения устойчивости начинались уже после нескольких недель наблюдений. Колебания же количества осадков существенно более стабильны. Они оставались практически устойчивыми на протяжении многих десятилетий.

Излучение астрофизических объектов

Представление о статистической устойчивости колебаний интенсивности астрофизических объектов дают результаты расчетов (рис. 7) по данным [17] для двух аккрецирующих источников рентгеновского излучения разного типа: GRS 1915 + 105 и PSRJ 1012 + 5307.

Из кривых следует, что колебания интенсивности источника GRS 1915 + 105 носят явно статистически неустойчивый характер, который начал проявляться на уровне выборочного среднего и выборочного СКО уже через месяц наблюдения. Колебания же интенсивности источника PSRJ 1012 + 5307 значительно более стабильны: на уровне выборочного среднего нарушения устойчивости не наблюдались даже на протяжении 13 лет, на уровне же выборочного СКО они проявились спустя несколько недель после начала наблюдения.

Обобщая приведенные и другие результаты экспериментальных исследований статистической устойчивости разнообразных физических процессов, следует отметить, что все исследованные реальные процессы оказались статистически неустойчивыми.

Это позволило выдвинуть гипотезу [4,5,10], что все реальные физические величины и процессы статистически неустойчивы. Исключение могут составлять, возможно, лишь мировые физические константы, такие как скорость света, гравитационная постоянная и пр.

5. Связь статистической устойчивости процесса с его спектром

В работе [11] было установлено, что при большом интервале наблюдения параметр статистической неустойчивости γ_N однозначно определяется его спектром:

$$\gamma_N = \frac{\sum_{k=2}^{N/2} \frac{1}{(k-1)^2} \left[\frac{\pi^2}{4} + (C + \ln(2\pi(k-1)))^2 \right] S_{x_N}(k)}{4\pi^2 \sum_{k=2}^{N/2} S_{x_N}(k)}, \quad (1)$$

где C — постоянная Эйлера–Маскерони ($C \approx 0.577216$), $S_{x_N}(k)$ — спектральная плотность мощности (СПМ), k — номер спектрального отсчета.

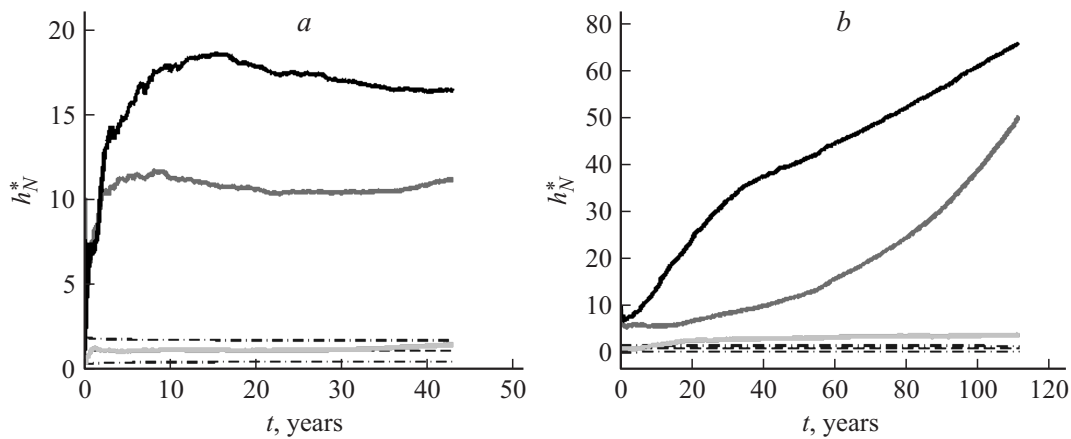


Рис. 6. Зависимость от времени параметра статистической неустойчивости h_N^* , соответствующего колебаниям максимальной суточной температуры (верхние непрерывные кривые), минимальной суточной температуры (средние непрерывные кривые), осадкам (нижние непрерывные кривые) для Москвы (a) и Киева (b). Для сравнения штриховыми линиями изображены эталонные прямые, соответствующие идеальной статистически устойчивой последовательности, а штрихпунктирными линиями — односигмовые отклонения от эталонной прямой.

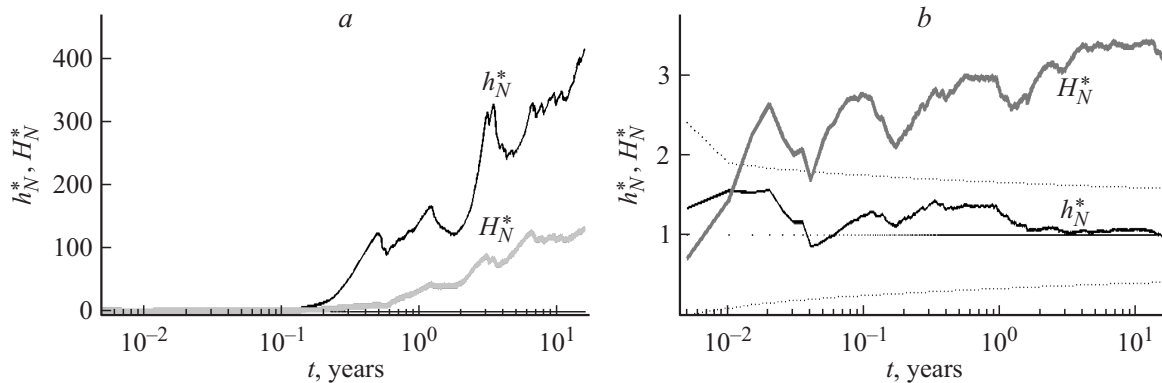


Рис. 7. Зависимости от времени параметров статистической неустойчивости h_N^* и H_N^* для источников излучения GRS 1915 + 105 (a) и PSR J1012 + 5307 (b). Для сравнения пунктирными линиями изображены эталонные прямые, соответствующие идеальной статистически устойчивой последовательности, а штрихпунктирными кривыми — односигмовые отклонения от эталонной прямой.

СПМ $S_x(f)$ многих процессов описывается степенной функцией вида $1/f^\beta$, где β — показатель формы. Такую СПМ, в частности, имеет равновесный фликкер-шум с параметром β , удовлетворяющим неравенству $0 < \beta < 1$, неравновесный фликкер-шум с параметром $\beta \geq 1$, цветные шумы (фиолетовый ($\beta = -2$), синий ($\beta = -1$), белый ($\beta = 0$), розовый ($\beta = 1$), коричневый ($\beta = 2$), черный ($\beta > 2$)), фрактальные (самоподобные) шумы с положительной (персистентные, $0 < \beta < 1$) и отрицательной (антиперсистентные, $-1 < \beta < 0$) корреляцией отсчетов и др.

Исследования выражения (1) для процессов со степенной СПМ показали [11], что процессы с параметром $\beta < 1$ статистически устойчивы, процессы же с параметром $\beta \geq 1$ — статистически неустойчивы (рис. 8).

Как известно, корреляционная функция (КФ) $K_x(\tau)$ стационарного процесса $X(t)$ и его СПМ $S_x(f)$ связаны между собой интегральным преобразованием Винера–Хинчина. Однако [11] существуют процессы со СПМ

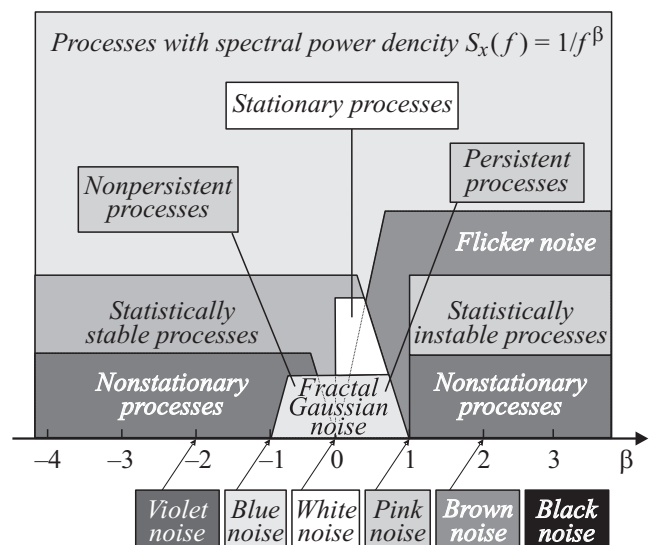


Рис. 8. Процессы со степенной СПМ.

$S_x(f)$, не имеющие определенной КФ $K_x(\tau)$, и, наоборот, существуют случайные процессы с КФ $K_x(\tau)$, не имеющие определенной СПМ $S_x(f)$.

Отсутствие КФ вида $K_x(\tau)$ или СПМ вида $S_x(f)$ означает, что рассматриваемый процесс нестационарен. Процесс со степенной СПМ имеет КФ вида $K_x(\tau)$ (а, следовательно, стационарен), когда параметр $\beta \in [0, 1]$. Процессы с параметром $\beta < 0$ и $\beta \geq 1$ — нестационарны.

Из сказанного следует, что статистически неустойчивые процессы со степенной СПМ (у которых параметр $\beta \geq 1$) относятся к классу нестационарных процессов.

Заметим, что к нестационарным относятся не только статистически неустойчивые процессы, но также и часть статистически устойчивых процессов, у которых параметр $\beta < 0$ (рис. 8).

6. Особенности закона больших чисел при нарушении статистической устойчивости

Отсутствие сходимости реальных процессов требует переосмысления некоторых положений теории вероятностей, в частности, закона больших чисел, открытый Я. Бернулли триста лет назад.

Применительно к последовательности X_1, \dots, X_N попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии и математические ожидания m_1, \dots, m_N , закон больших чисел может быть сформулирован следующим образом: при устремлении N к бесконечности выборочное среднее

$$m_{x_N}^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$$

стремится по вероятности к среднему

$$m_{x_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N m_n$$

математических ожиданий m_1, \dots, m_N (теорема Чебышева) [1].

До недавнего времени [18] оставалось без внимания важное обстоятельство: теорема Чебышева не утверждает наличие сходимости ни выборочного среднего $m_{x_N}^*$, ни среднего математических ожиданий m_{x_N} , а устанавливает факт сходимости этих величин друг к другу. Это означает, что при $N \rightarrow \infty$ выборочное среднее $m_{x_N}^*$ и среднее математических ожиданий m_{x_N} могут не иметь пределов. Они могут, например, флуктуировать вокруг константы, но при этом, согласно теореме, меняться синхронно так, что разность между ними стремится к нулю.

При наличии сходимости предел m_x среднего математических ожиданий m_{x_N} может быть описан функцией распределения в виде функции единичного скачка $F_{m_x}(x)$

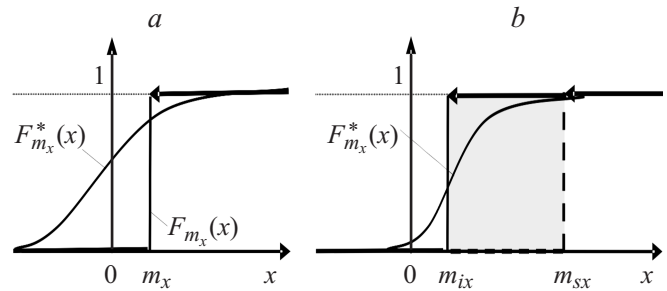


Рис. 9. Схемы формирования функции распределения выборочного среднего при $N \rightarrow \infty$: в случаях наличия (а) и отсутствия (б) сходимости.

в точке m_x . К ней стремится функция распределения $F_{m_{x_N}^*}(x)$ выборочного среднего $m_{x_N}^*$ при $N \rightarrow \infty$ (рис. 9, а).

При отсутствии сходимости выборочное среднее $m_{x_N}^*$ и среднее математических ожиданий m_{x_N} либо одновременно стремятся к плюс (или минус) бесконечности, либо флуктуируют в определенных интервалах, которые могут быть конечными или бесконечными. Если интервалы конечны, то существуют границы m_{ix}^* , m_{sx}^* выборочного среднего $m_{x_N}^*$ и границы m_{ix} , m_{sx} среднего математических ожиданий m_{x_N} . Эти границы можно описать функциями распределения в виде функций единичного скачка в точках m_{ix}^* , m_{sx}^* и m_{ix} , m_{sx} соответственно.

На основании закона больших чисел m_{ix}^* стремится к m_{ix} , а m_{sx}^* — к m_{sx} (рис. 9, б). Интервал $[m_{ix}, m_{sx}]$ — область, в которой флуктуирует выборочное среднее при $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, выборочное среднее случайных величин либо сходится к определенному числу, либо стремится к плюс (или минус) бесконечности, либо флуктуирует в определенном интервале. Первые два случая не согласуются с результатами экспериментальных исследований статистической устойчивости реальных физических процессов, а последний — согласуется с ними. Это позволяет утверждать, что выборочные средние реальных процессов не имеют пределов в обычном смысле, хотя имеют обобщенные пределы [19,20] в виде интервалов.

7. Образование статистически неустойчивых процессов

Одной из разновидностей статистически неустойчивых процессов является неравновесный фликкер-шум, СПМ которого описывается зависимостью $1/f^\beta$ с параметром $\beta \geq 1$. Это чрезвычайно распространенный шум. Он фиксируется в металлах, полуметаллах, полупроводниках, газах, жидкостях, электролитах, радиоэлектронных устройствах, однородных и неоднородных проводниках при высокой и низкой температурах, пленках и контактах, различных живых и неживых объектах и т.д.

Многие годы пытались выяснить причины возникновения неравновесного фликкер-шума. Его исследованию

посвящено множество работ, статей, монографий, специализированных научных конференций, десятки обзоров (см., например, [21]). Несмотря на масштабность проведенных исследований, до сих пор нет единого мнения по поводу того, что является источником этого шума. По-видимому, эти фликкер-шумы вызваны множеством различных факторов. Интересно, что фликкер-шум, как правило, наблюдается в открытых системах.

Приток в открытую систему извне вещества, энергии и (или) информации, служащий источником неравновесных процессов, — важный, но не единственный фактор, обуславливающий формирование статистически неустойчивых шумов. Неустойчивые шумы могут возникнуть в результате различных нелинейных преобразований. При детектировании, например, амплитудно-модулированного сигнала в его спектре появляются спектральные составляющие, соответствующие огибающей радиосигнала. Если СПМ огибающей описывается функцией типа $1/f^\beta$, где $\beta \geq 1$, то после подавления высокочастотной несущей процесс оказывается статистически неустойчивым.

Обратим особое внимание на то, что широкополосный статистически устойчивый шум при линейной низкочастотной фильтрации может стать статистически неустойчивым.

Характерный пример такой фильтрации — интегрирование. При интегрировании процесса $X(t)$ получается процесс $Y(t)$, СПМ $S_y(f)$ которого связана со СПМ $S_x(f)$ исходного процесса соотношением $S_y(f) = S_x(f)/(4\pi^2 f^2)$. Наличие такой зависимости приводит к тому, что широко распространенные стационарные статистически устойчивые шумы, соответствующие диапазону от белого включительно до розового, после интегрирования становятся нестационарными статистически неустойчивыми и располагаются в коричнево-черной области (см. рис. 8).

Заключение

Исследование феномена статистической устойчивости показывает, что гипотеза идеальной статистической устойчивости, лежащая в основе теории вероятностей, не находит экспериментального подтверждения. В реальном мире, по всей видимости, нет идеально статистически устойчивых явлений.

В большинстве случаев нарушение статистической устойчивости фиксируются уже на уровне выборочного среднего, хотя существуют процессы, нарушение устойчивости которых обнаруживается лишь при анализе выборочных моментов более высокого порядка.

Нарушения статистической устойчивости, часто, хотя и не всегда, оказываются значимыми лишь при больших интервалах наблюдения. Статистически устойчивыми могут быть как случайные, так и детерминированные процессы. Статистически неустойчивыми также могут быть оба типа процессов.

При большом объеме выборки параметры статистической неустойчивости процесса однозначно определяются

его спектром. Процессы со степенной спектральной плотностью мощности вида $1/f^\beta$ оказываются статистически неустойчивыми, если параметр формы $\beta \geq 1$. Такие процессы нестационарны.

Закон больших чисел теории вероятностей применим не только к статистически устойчивым, но и неустойчивым процессам. В случае отсутствия статистической устойчивости при неограниченном увеличении объема выборки выборочное среднее стремится к среднему математических ожиданий, однако при этом выборочное среднее и среднее математических ожиданий не имеют пределов. Такая ситуация согласуется с результатами экспериментальных исследований реальных процессов.

Существует множество факторов, способствующих образованию статистически неустойчивых процессов. Это приток в открытую систему извне вещества, энергии и (или) информации, питающий неравновесные процессы, различные нелинейные преобразования, линейная фильтрация и др. Существенно, что широкополосный стационарный статистически устойчивый шум в результате линейной низкочастотной фильтрации может трансформироваться в статистически неустойчивый нестационарный процесс.

Изучение феномена статистической устойчивости на больших интервалах наблюдения, позволившее установить отсутствие сходимости выборочных средних реальных физических процессов, осознание ограниченности статистической устойчивости реальных физических процессов, разработка математических моделей, учитывающих нарушения статистической устойчивости, и переосмысление базовых положений теории вероятностей привели к формированию основ двух новых теорий. Одна из них — физико-математическая теория гиперслучайных явлений [4,5,9,10], ориентированная на описание реальных физических процессов в условиях ограниченной статистической устойчивости, вторая — математический анализ расходящихся и многозначных функций [19,20].

Список литературы

- [1] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Физматлит, 1988. 448 с.
- [2] Проблемы Гильберта / Под общ. ред. П.С. Александрова. М.: Наука, 1969. 238 с.
- [3] Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей М.: ОНТИ, 1974. 120 с.
- [4] Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы. К.: Наукова думка, 2011. 320 с.
- [5] Gorban I.I. // Inform. Theor. Applicat. 2009. Vol. 16. N 1. P. 5–24.
- [6] Горбань И.И. // Математические машины и системы. 2013. № 1. С. 14–20.
- [7] Gorban I.I. Information Models of Knowledge. Kiev–Sofia: ITNEA, 2010. P. 398–410.
- [8] Gorban I.I. // Inform. Theor. Applicat. 2011. Vol. 18. N 4. P. 321–334.

- [9] *Gorban I.I.* // Informat. Theor. Applicat. 2008. Vol. 15. N 3. P. 203–211.
- [10] *Горбань И.И.* Теория гиперслучайных явлений. К.: НАН Украины, 2007. 181 с.
- [11] *Горбань И.И.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2012. Т. 55. № 3. С. 3–18.
- [12] *Чайковский Ю.В.* О природе случайности. М.: Центр системных исследований–Институт истории естествознания и техники РАН, 2004. 280 с.
- [13] *Шейнин О.Б.* Теория вероятностей. Исторический очерк. <http://www.sheyin.de>.
- [14] *Горбань И.И.* // Математические машины и системы. 2012. № 4. С. 106–114.
- [15] *Горбань И.И.* // Тр. X Всерос. конф. „Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики“. СПб.: Наука, 2010. С. 199–201.
- [16] *Горбань И.И., Горбань Н.И., Новотрясов В.В., Яроцук И.О.* // Матер. докл. VII Всерос. симп. „Физика геосфер“. Владивосток: Дальнаука, 2011. С. 542–547.
- [17] *All-Sky Monitor (ASM) team* at the Kavli Institute for Astrophysics and Space Research at the Massachusetts Institute of Technology. http://xte.mit.edu/ASM_lc.html.
- [18] *Горбань И.И.* // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2011. № 7. С. 31–42.
- [19] *Gorban I.I.* // Problems of Computer Intellectualization. Book 28. Kyiv–Sofia: ITNEA, 2012. P. 359–374.
- [20] *Горбань И.И.* // Математические машины и системы. 2012. № 3. С. 147–161.
- [21] *Коган Ш.М.* // УФН. 1985. Т. 145. Вып. 2. С. 285–325.