

11

## **Эффекты шумового воздействия на активную среду с периодическими граничными условиями**

© А.В. Слепнев, И.А. Шепелев, Т.Е. Вадивасова

Национальный исследовательский Саратовский  
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: a.v.slepnev@gmail.com

Поступило в Редакцию 9 июля 2013 г.

Исследуется модель активной среды с периодическими граничными условиями, элементарной ячейкой которой является осциллятор ФитцХью–Нагумо. В зависимости от значений параметров элемент среды может находиться как в автоколебательном, так и в возбужденном режиме. И в том и в другом случае в автономной среде без шума наблюдаются незатухающие колебания и явление мультистабильности. Предлагается метод диагностики характера среды с помощью шумового воздействия, рассматриваются особенности поведения среды вблизи точки перехода из возбужденного режима в автоколебательный, устанавливаются эффекты когерентного резонанса и индуцированных шумом переключений.

Исследование активных сред, пространственных структур, эффектов, связанных с синхронизацией и случайным возмущением в активных средах, остается одним из актуальных направлений в области нелинейной динамики. Особый интерес вызывают возбужденные распределенные системы и среды, которые часто встречаются в задачах биофизики [1–3]. При определенных условиях в возбужденных средах без внешних воздействий в ограниченной области пространства могут наблюдаться незатухающие колебания, которые трудно отличить от соответствующих режимов в автоколебательных средах. Речь идет о бегущих волнах в кольцевых системах, а также о спиральных волнах в двумерных средах [4,5]. В автоколебательной среде незатухающие колебания порождаются каждым элементом среды самим по себе, в то время как в возбужденной среде они являются следствием отклика элементов среды на волну возбуждения, постоянно циркулирующую в системе. Как показано в [6], характер среды может быть установлен

в результате анализа зависимости периода колебаний во времени от управляющих параметров. Такая зависимость существенно различается для автоколебательной и возбудимой сред. Кроме того, автоколебательная и возбудимая среды по-разному реагируют на шумовое воздействие. Менять параметры реальной среды в эксперименте не всегда возможно, в то время как исследование влияния внешнего шума во многих случаях практически реализуемо. Оно может служить инструментом для определения характера поведения элементов реальной активной среды, что важно для создания адекватной математической модели. Цель данной работы заключается в проведении численных экспериментов на модели среды с периодическими граничными условиями, направленных на установление особенностей в поведении среды при воздействии внешнего шума, позволяющих отличить автоколебательный и возбудимый характер элемента среды. Кроме того, анализируются возможности управления поведением среды с помощью шумового воздействия.

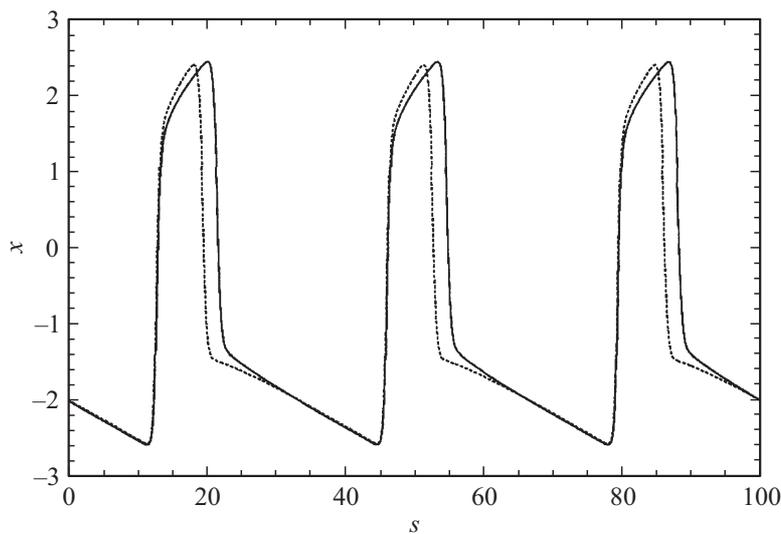
В работе исследуется модель активной среды с периодическими граничными условиями:

$$\varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} = x - y - \alpha x^3 + d \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma x - y + \beta + \sqrt{2D} \xi(s, t),$$

$$x(s + L, t) \equiv x(s, t), \quad y(s + L, t) \equiv y(s, t), \quad (1)$$

где  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$  — безразмерные вещественные динамические переменные,  $s \in [0, L]$  — безразмерная пространственная координата,  $t$  — безразмерное время,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  — управляющие параметры,  $d$  — коэффициент диффузии. На среду воздействует гауссов шум  $\sqrt{2D}\xi(s, t)$ , некоррелированный как во времени, так и в пространстве:  $\xi(s, t)$  — нормированный источник ( $\bar{\xi}(s, t) \equiv 0$ ,  $\langle \xi(s, t)\xi(s + \rho, t + \tau) \rangle = \delta(\rho)\delta(\tau)$ );  $D$  — константа, задающая интенсивность шума. Элементом среды (1) является осциллятор ФитцХью–Нагумо, представляющий собой упрощенную модель нейрона [7]. Уравнения непрерывной среды (1) можно получить из уравнений цепочки связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо в результате предельного перехода, устремив размер элемента к нулю.

В зависимости от значений управляющих параметров элемент среды может находиться либо в автоколебательном режиме, либо в возбудимом режиме. В последнем случае колебания в отдельно взятом



**Рис. 1.** Пространственные профили бегущих волн  $n = 3$  при  $d = 0.1$  в автоколебательном режиме (сплошная линия,  $\beta = 2.7$ ) и в возбужденном режиме (пунктирная линия,  $\beta = 3.3$ ).

элементе возможны только в результате внешнего регулярного или случайного возбуждения. В среде (1) при периодических граничных условиях незатухающие колебания возникают как при автоколебательном, так и при возбужденном характере поведения элементарных осцилляторов без внешнего воздействия на среду. Независимо от режима элементов наблюдается явление мультистабильности — в среде сосуществуют бегущие волны, отличающиеся друг от друга длиной и направлением распространения. Будем характеризовать различные моды числом  $n$ , равным количеству волн, укладывающихся на длине системы. В автоколебательном режиме существует также однородная колебательная мода  $n = 0$ , соответствующая синфазным колебаниям всех элементов среды. Колебания среды в автоколебательном и возбужденном режимах визуально неотличимы друг от друга, что затрудняет определение характера активной среды. Примеры пространственного профиля колебаний в двух указанных случаях приведены на рис. 1.

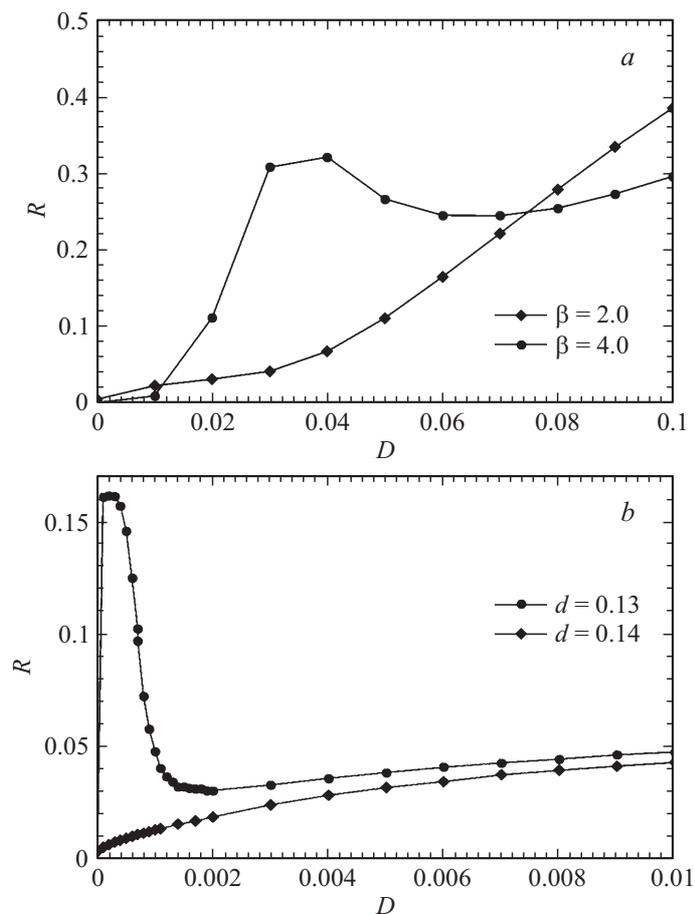
Зафиксируем параметры системы  $\alpha = 0.2$ ,  $\gamma = 3$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $L = 100$  и рассмотрим влияние шума на поведение активной среды в автоколеба-

тельном и возбудимом режимах. Характер элемента среды управляется параметром  $\beta$ : при  $\beta < \beta_0 \approx 3.0$  он является автоколебательным, а при  $\beta > \beta_0$  — возбудимым. В качестве характеристики степени беспорядка, вызванного в среде шумом, будем использовать нормированную девиацию интерспайковых интервалов:

$$R = \frac{\sqrt{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}}{\langle T \rangle}. \quad (2)$$

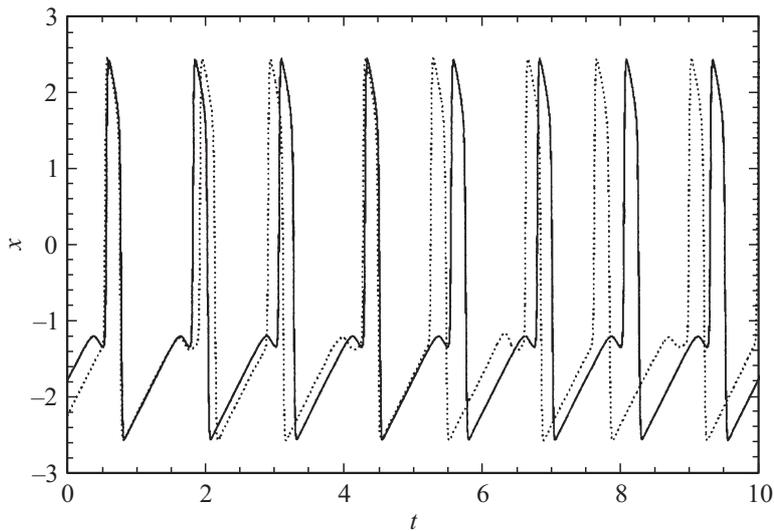
Термин „интерспайковый интервал“ взят из биофизики и означает время между последовательными состояниями возбуждения (спайками). Он рассчитывался как время  $T$  между достижениями переменной  $x(s, t)$  в фиксированной точке среды некоторого заданного уровня  $x_m$  (при расчетах полагалось  $x_m = 2$ ). Угловые скобки означают статистическое усреднение. При  $D = 0$ , в силу периодичности спайков,  $R = 0$ . С ростом нерегулярности поведения системы во времени в результате действия шума величина  $R$  растет.

Проведенные исследования показали, что влияние шума на характеристики колебаний среды в автоколебательном и возбудимом режимах существенно различается. В возбудимом режиме шум приводит к гораздо более заметному изменению среднего интерспайкового интервала, который быстро убывает с ростом  $D$ . Кроме того, зависимости нормированной девиации  $R$  от интенсивности шума  $D$ , полученные в автоколебательном и возбудимом режимах, имеют качественно разный характер (рис. 2, *a*). В автоколебательной среде  $R$  монотонно растет с ростом шума. В случае возбудимой среды у зависимости  $R(D)$  есть локальный минимум при некотором оптимальном  $D \neq 0$  (в случае, приведенном на рис. 2, *a*, вблизи  $D = 0.07$ ), т.е. имеет место эффект когерентного резонанса (КР) [8]. Когерентный резонанс наблюдался ранее в моделях возбудимых сред (например, в [9]), однако в среде с периодическими граничными условиями, где колебания возникают без шумового воздействия, существование КР не является очевидным и ранее не фиксировалось. Таким образом, по наличию когерентного резонанса в эксперименте можно судить о характере (автоколебательном или возбудимом) активной среды, уравнения которой неизвестны. Однако вблизи порога возникновения автоколебаний описанный метод диагностики может не работать, о чем свидетельствуют результаты, приводимые далее. Рассмотрим поведение моды  $n = 2$  при  $\beta = 3.05$ . Зафиксируем два значения коэффициента диффузии  $d = 0.13$  и  $d = 0.14$ .



**Рис. 2.** Зависимости нормированной девиации интерспайковых интервалов  $R$  от интенсивности шума  $D$  для моды  $n=1$  при  $d=0.1$  в автоколебательном ( $\beta=2$ ) и возбужденном ( $\beta=4$ ) режимах (а) и моды  $n=2$  вблизи границы автоколебательного режима при  $\beta=3.05$  и двух значениях коэффициента диффузии  $d=0.13$  и  $d=0.14$  (б).

В обоих случаях при выбранных значениях параметров отдельный осциллятор ФитцХью–Нагумо находится в возбужденном режиме, однако характер зависимости  $R(D)$  для значений  $d=0.13$  и  $d=0.14$



**Рис. 3.** Вид колебаний во времени при  $d = 0.13$  в случае  $D = 0$  (сплошная линия) и  $D = 0.0001$  (пунктирная линия).

качественно различен (рис. 2, *b*). При  $d = 0.13$  зависимость является немонотонной и демонстрирует локальный минимум вблизи значения  $D = 0.002$ , что характерно для возбудимой среды. При  $d = 0.14$  величина  $R$  монотонно растет с ростом интенсивности шума, как это имеет место в случае автоколебательного режима. Монотонный рост  $R$  с увеличением шума при  $d = 0.14$ , по-видимому, обусловлен близостью значения управляющего параметра к бифуркационному. Можно предположить, что за счет взаимодействия элементов среды и шумового возмущения происходит смещение бифуркации возникновения автоколебаний в элементах среды. Немонотонный характер зависимости  $R(D)$  при  $d = 0.13$  связан не с эффектом КР, а с вызванным шумом переключением на другой тип колебаний. Исходные колебания при  $D = 0$  и колебания, появившиеся в результате действия шума, показаны на рис. 3. На пунктирной зависимости можно видеть, что перед каждым вторым спайком появляется небольшой „горбик“, вследствие чего длина интерспайковых интервалов регулярно меняется. Данный тип колебаний наблюдается при слабом шуме и в отсутствие шума, по-видимому, сосуществует с колебаниями, представленными сплошной

линией. Величина  $R$  для этого режима уже при  $D = 0$  отлична от нуля и не является адекватным критерием степени неупорядоченности колебаний.

В результате проведенных исследований можно сделать вывод о том, что анализ влияния шума на активную среду, в которой в отсутствие внешних воздействий наблюдаются незатухающие колебания, дает возможность выявить характер этой среды: является она автоколебательной или возбудимой. Однако при этом значения параметров исследуемой среды не должны быть слишком близки к бифуркационным. Показано также, что шум оказывает существенное влияние на поведение возбудимой среды и может быть использован в качестве управляющего фактора, изменяющего статистические характеристики колебаний и вызывающего переключения между сосуществующими режимами.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ (2009–2013 годы) (контракт № 14.В37.21.0751).

Авторы благодарны В.С. Анищенко и А.Б. Нейману за обсуждение и полезные советы.

## Список литературы

- [1] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [2] Ermentrout B., Pinto D. // SIAM News. 2007. V. 40. N 2.
- [3] Lancaster J.L., Hellen E.H., Leise E.M. // American J. Physics. 2010. V. 78. N 1. P. 56–63.
- [4] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М.–Ижевск: НИЦ „РХВ“, Институт компьютерных исследований, 2007.
- [5] Alford J.G., Auchtuty G. // J. Math. Biol. 2006. V. 53. N 5. P. 797–819.
- [6] Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е. // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 497–505.
- [7] FitzHugh R.A. // Biophysical J. 1961. V. 1. P. 445–466.
- [8] Pikovsky A.S., Kurth J. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 755–778.
- [9] Neiman A., Schimansky-Geier L., Cornell-Bell A., Moss F. // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4896–4899.