01.3

Индуцированный шумом переход между стационарными состояниями осциллятора Ван дер Поля

© *В.П. Кощеев*

НИУ МАИ, филиал „Стрела“, Жуковский
E-mail: koshcheev1@yandex.ru

Поступило в Редакцию 3 октября 2013 г.

Показано, что индуцированный белым шумом переход между предельным циклом и состоянием покоя осциллятора Ван дер Поля носит пороговый характер. Величина порога прямо пропорциональна произведению характерной энергии автоколебаний и коэффициента трения. Показано, что в состоянии покоя исчезают не только автоколебания, но и внешний шум.

Известно, что уравнение Ван дер Поля является простейшим уравнением, с помощью которого можно моделировать самые разнообразные автоколебательные процессы. Теоретическое и экспериментальное изучение воздействия шума на осциллятор Ван дер Поля все еще остается актуальной физической задачей [1]. В данной работе исследуется воздействие дельта-коррелированной силы (белого шума) на осциллятор Ван дер Поля в рамках нового подхода к описанию эволюции энергии классических [2] и квазиклассических [3] динамических систем. Разрушение автоколебаний при воздействии внешнего шума, которое было исследовано в [1] теоретически и экспериментально, было интерпретировано как разрушение предельного цикла. Цель данной публикации состоит в том, чтобы объяснить эффект разрушения предельного цикла с помощью индуцированного белым шумом перехода между стационарными состояниями осциллятора Ван дер Поля.

Уравнение Ван дер Поля с внешним шумом рассмотрим на примере механической модели

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = \Delta F, \tag{1}$$

где $U = (\omega^2 m x^2)/2$; $\Delta F = -\frac{m}{\tau}\dot{x}(1 - \frac{x^2}{x_0^2}) + \delta f$; частица массы m совершает невозмущенные гармонические колебания с частотой ω; τ — время релаксации к равновесному состоянию; x_0 — характерная амплитуда автоколебаний; δf — дельта-коррелированная внешняя сила; величину m/τ будем называть коэффициентом трения.

Корреляционная функция имеет вид

$$\overline{\delta f(t)\delta f(t')} = D\delta(t - t'),$$

где D — интенсивность случайного источника.

Если энергию определить выражением

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x), \tag{2}$$

то уравнение эволюции энергии запишем в виде [2]

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{T}\int\limits_{x_1}^{x_2} \Delta F dx, \tag{3}$$

где x_1, x_2 — точки поворота классической траектории, которые определяются из выражения $U(x_{1,2}) = E$; $T = T(E)$ — период колебаний частицы в потенциале $U = U(x)$.

С помощью формул (1)–(3) получим уравнение эволюции энергии для осциллятора Ван дер Поля с внешним шумом

$$\frac{dE}{dt} = \pm\frac{E}{\tau}\left(1 - \frac{E}{E_0}\right) + \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}\delta f, \tag{4}$$

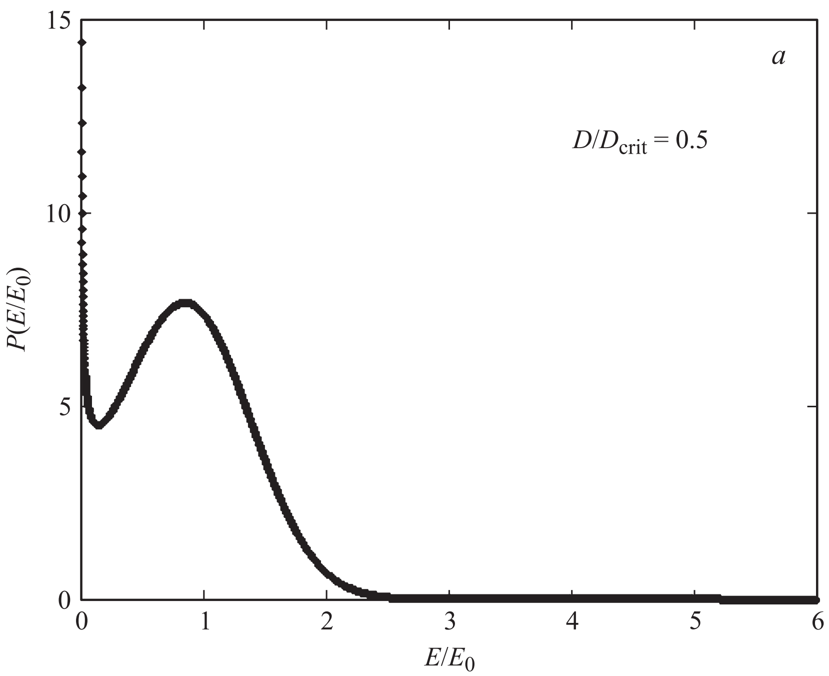
где $E_0 = 2m\omega^2 x_0^2$ — характерная энергия автоколебаний; знаки $\pm$ в формуле (4) появились потому, что скорость $\dot{x}$ выражается через энергию E с помощью формулы (2).

Если $\delta f = 0$, то уравнение (4) с точностью до численного множителя совпадает с укороченным уравнением Ван дер Поля

$$\frac{dE}{dt} = \pm\frac{E}{\tau}\left(1 - \frac{E}{E_0}\right), \tag{5}$$

которое имеет два стационарных решения $E_1 = E_0$ и $E_2 = 0$.

Знаки $+$ и $-$ отвечают за эволюцию нестационарных решений уравнения (5) к стационарным решениям $E_1 = E_0$ и $E_2 = 0$ соответственно,

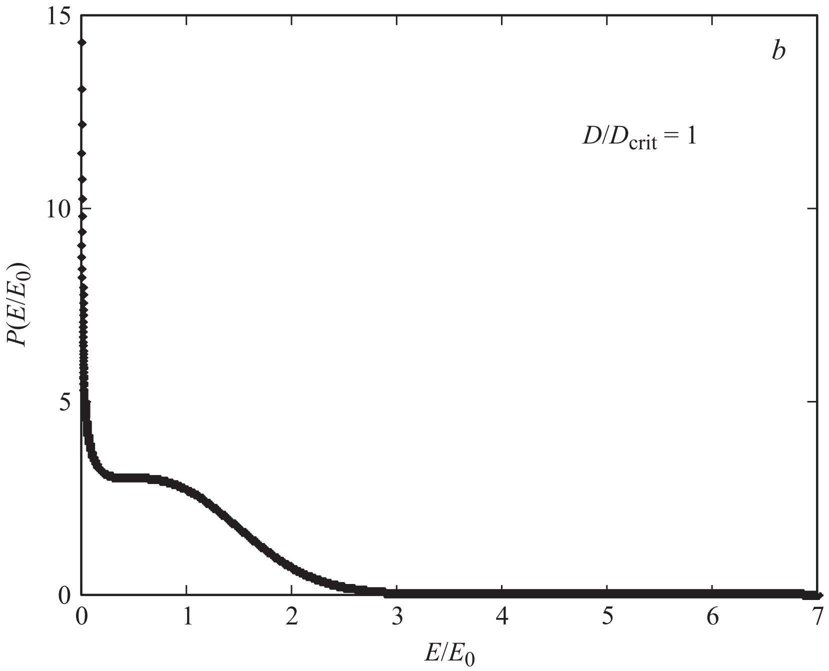


Нормированная плотность вероятности обнаружения динамической системы $P(E/E_0) = p_s(E)/N$ в зависимости от энергии E/E_0 при различных значениях отношения интенсивности внешнего шума к критическому значению коэффициента диффузии D/D_{crit}.

с одним и тем же временем релаксации τ. С помощью уравнения (4) может быть построено кинетическое уравнение Фоккера–Планка, стационарное решение которого имеет вид

$$p_s = \frac{N}{\sqrt{E/E_0}} \exp\left[\frac{D_{crit}}{D}\left(\frac{E}{E_0} - \frac{E^2}{2E_0^2}\right)\right], \tag{6}$$

где N — нормировочный множитель; $D_{crit} = \frac{\pi^2}{8}\frac{mE_0}{\tau}$ — критическое значение коэффициента диффузии; $p_s = p_s(E)$ — стационарная плотность вероятности обнаружения динамической системы в состоянии с энергией E.

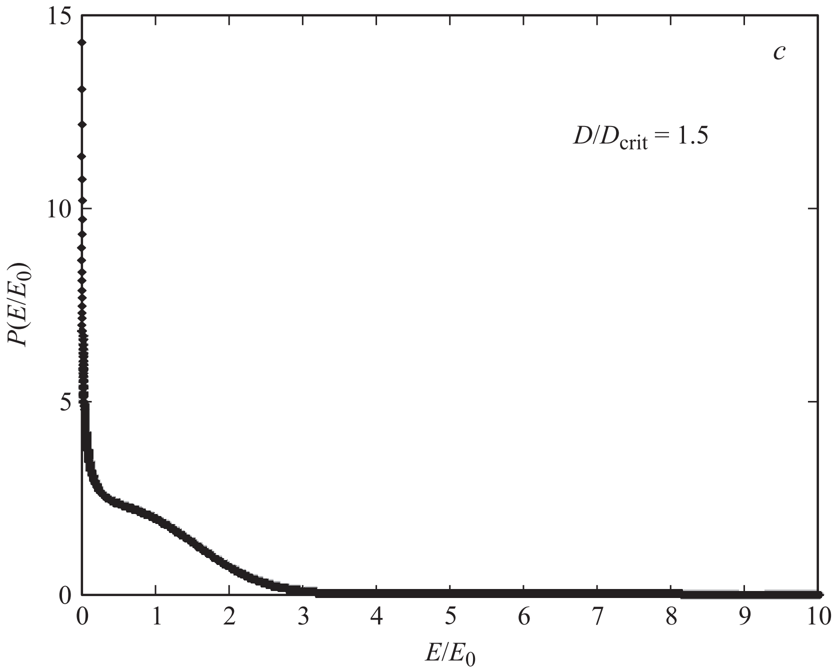


Продолжение рисунка.

Стационарная плотность вероятности обнаружения динамической системы в состоянии с энергией E может быть нормирована на единицу только при релаксации нестационарного решения к предельному циклу. Таким образом, из двух знаков $\pm$ в формуле (6) выбран знак $+$. Точки экстремума функции распределения (6) имеют вид

$$E_{\max,\min} = \frac{E_0}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{D}{D_{crit}}}\right).$$

Энергия автоколебаний в точках экстремума нелинейным образом зависит от величины внешнего шума. Точки экстремума совпадают с решениями стационарного уравнения эволюции (5) при $D = 0$. Если интенсивность случайного источника меньше критического значения коэффициента диффузии $D < D_{crit}$, то стационарная плотность веро-



Продолжение рисунка.

ятности обнаружения динамической системы достигает максимальных значений в окрестности двух стационарных точек, а именно: предельного цикла и состояния покоя (см. рисунок, a). Если интенсивность случайного источника превышает пороговое значение коэффициента диффузии $D \geqslant D_{crit}$, то стационарная плотность вероятности обнаружения динамической системы имеет одно максимальное значение в окрестности стационарной точки покоя (см. рисунок, b, c). Таким образом, механизм разрушения предельного цикла носит пороговый характер, а именно: происходит индуцированный белым шумом переход из стационарного состояния, соответствующего предельному циклу, в стационарное состояние покоя. Осциллятор Ван дер Поля с внешним шумом демонстрирует черты поведения диссипативной системы, а именно: при больших значениях внешнего шума ($D \geqslant D_{crit}$) осциллятор находится в состоянии покоя, а при уменьшении величины внешнего шума ниже порогового значения ($D < D_{crit}$) осциллятор „просыпается“, так как появляются автоколебания. Таким образом, состояние покоя автоколебательной системы при наличии внешнего шума является квазистационарным, так как оно неустойчиво. Именно такое поведение динамической системы впервые наблюдалось в эксперименте [4], что было отмечено в [5].

Плотность вероятности обнаружения динамической системы возрастает при $E \to 0$ как $p_s \approx N\sqrt{E_0/E}$. Оценим область локализации флуктуаций энергии в состоянии покоя с помощью квазиклассического уравнения эволюции энергии [3], которое отличается от классического уравнения эволюции энергии [2] тем, что энергия $E = E(t)$ заменена на $E_n = E_n(t)$ для гармонического осциллятора с начальным условием

$$E_n(t = 0) = \omega\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\hbar$ — постоянная Планка.

Видно, что в состоянии покоя исчезают не только автоколебания, но и внешний шум, а остаются квантовые флуктуации энергии. Таким образом, реализуется парадоксальная ситуация, а именно: „нагрев“ автоколебательной системы приводит к ее „охлаждению“.

Список литературы

[1] *Семенов В.В., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. В. 14. С. 16–24.

[2] *Кощеев В.П.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 18. С. 61–64.

[3] *Кощеев В.П.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 5. С. 1–4.

[4] *Кузнецов П.И., Стратонович Р.Л., Тихонов В.И.* // ЖЭТФ. 1955. Т. 28. В. 5. С. 509.

[5] *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии / Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 400 с.