1995 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 65, N 2

01;03

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ЭГД ДИСПЕРГИРОВАНИЯ И ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

С.О.Ширяєва, А.И.Григорьєв

Ярославский государственный университет,
150000, Ярославль, Россия
(Поступило в Редакцию 15 июня 1994 г.)

Показано, что точное решение системы векторных уравнений электрогидродинамики с заданными граничными условиями дает минимум скорости рассеяния энергии в реализующемся течении и тем самым удовлетворяет вариационному принципу Онзагера о минимальности скорости рассеяния энергии при неравновесных процессах. Проведено сравнение областей применимости принципов наименьшего действия и минимальности потенциальной энергии системы в равновесном состоянии для случая самопроизвольного деления сильно заряженной капли.

В целом ряде проблем гидромеханики и электродинамики наряду с использованием традиционных методов анализа краевых задач для систем векторных уравнений гидродинамики и электродинамики успешно применяются и вариационные методы (см., например, обзоры [1,2] и указанную там литературу). Вариационный подход к решению гидромеханических задач, обладая таким немаловажным достоинством, как более простые (по сравнению с краевыми задачами для векторных уравнений гидродинамики) математические методы анализа, позволяет существенно расширить круг решаемых проблем [3]. В некоторых же случаях вариационный подход является единственно приемлемым, например при анализе морфологии речных систем (для которых проблематично корректное выписывание граничных условий) [1], при расчете закономерностей электрогидродинамического диспергирования жидкостей (где нарушение непрерывности потока при диспергировании делает соответствующую векторную краевую задачу практически неразрешимой) [2], при анализе минимальных поверхностей для заданного распределения внешних сил [3]. В связи со сказанным представляется целесообразным проанализировать применимость к задачам электрогидродинамики таких вариационных принципов, как принцип наименьшего рассеяния энергии Онзагера в открытой системе при неравновесном процессе, принцип минимальности энергии конечного состояния замкнутой системы, принцип наименьшего действия.

1. Покажем, что стационарное решение для поля скоростей жидкости $U^0(\mathbf{r})$ и электрического потенциала $\varphi^0(\mathbf{r})$ системы векторных уравнений электрогидродинамики [4]

$$\frac{1}{\rho_m} = (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U} = -\operatorname{grad} p + \mu\Delta\mathbf{U} + \rho_q\mathbf{E},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho_q, \qquad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0,$$
$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \qquad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \rho_q\mathbf{U}, \tag{1}$$

с некоторыми конкретными граничными условиями удовлетворяет требованию минимальности скорости рассеяния энергии Онзагера, т.е. покажем, что прямое решение системы (1) и вариационный подход совместны и эквивалентны друг другу. В (1) $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока; σ — электропроводность; ρ_q — объемная плотность электрического заряда в жидкости, который считается "вмороженным" в жидкость [4] и в используемом приближении несжимаемой жидкости в нижеследующем изложении будет приниматься постоянным; ρ_m — объемная плотность жидкости; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; μ — коэффициент динамической вязкости; $p(\mathbf{r})$ — распределение давления в жидкости; ε — диэлектрическая проницаемость жидкости.

Ограничим для простоты рассмотрение случаем скоростей движения, много меньших скорости звука в жидкости, и будем считать жидкость несжимаемой. Тогда для ламинарного ЭГД течения (в пренебрежении энергопотерями на создание электромагнитного поля) объемная плотность скорости диссипации энергии в жидкости Ψ определится суммой двух слагаемых: вязкой диссипацией кинетической энергии течения [5]

$$\Psi_\mu(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)^2 \tag{2}$$

и диссипацией электрической энергии вследствие джоулева тепловыделения

$$\Psi_\sigma(\mathbf{j}) = \sigma(\mathbf{r})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2. \tag{3}$$

Интегрируя $\Psi(\mathbf{U},\mathbf{j}) = \Psi_\mu + \Psi_\sigma$ по объему жидкости, несложно найти полную скорость Φ диссипации энергии ЭГД течения

$$\Phi[\mathbf{U},\mathbf{j}] = \int\limits_v \Psi(\mathbf{U},\mathbf{j})dv = \int\limits_v \Psi_\mu(\mathbf{U})dv + \int\limits_v \Psi_\sigma(\mathbf{j})dv = \Phi_\mu + \Phi_\sigma. \tag{4}$$

Пусть $\mathbf{U} = \mathbf{U}^0(\mathbf{r})$ и $\varphi = \varphi^0(\mathbf{r})$ есть решение системы (1), удовлетворяющее заданным граничным условиям. Покажем, что на $\mathbf{U}^0(\mathbf{r})$ и $\varphi^0(\mathbf{r})$ функционал (4) достигает своего минимума. Другими словами, покажем, что минимальная скорость рассеяния энергии ЭГД течения достигается именно на решениях $\mathbf{U}^0(\mathbf{r})$ и $\varphi^0(\mathbf{r})$ системы (1). Доказательство проведем от противного. Рассмотрим гипотетические виртуальные распределения скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{U}^*(\mathbf{r})$ и электрического потенциала $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi^0(\mathbf{r}) + \varphi^*(\mathbf{r})$ в рассматриваемом объеме жидкости, которые удовлетворяют тем же граничным условиям, что и $\mathbf{U}^0$,

φ^0, но $\mathbf{U}^*$ не удовлетворяет уравнению Навье–Стокса, а φ^* не удовлетворяет уравнениям Максвелла (уравнение Пуассона для потенциала, которому удовлетворяет φ^0). Выпишем, согласно (2), (3), выражения для объемной скорости диссипации энергии ЭГД течения на функциях $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ и $\varphi(\mathbf{r})$

$$\Psi_\mu(\mathbf{U}) = \Psi_\mu(\mathbf{U}^0 + \mathbf{U}^*) = \Psi_\mu(\mathbf{U}^0) + \Psi_\mu(\mathbf{U}^*) + + 2\mu \left(\frac{\partial U_i^0}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^0}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_i^*}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^*}{\partial x_i}\right), \quad (5)$$

$$\Psi_\sigma(\mathbf{j}) = \Psi_\sigma(\mathbf{j}^0) + \Psi_\sigma(\mathbf{j}^*) + 2\sigma(\mathbf{r})\left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i}\right). \quad (6)$$

Покажем, что при интегрировании по объему жидкости, интегралы от последних слагаемых в выражениях (5) и (6) дадут нули.

а) Вычислим интеграл от последнего слагаемого в (5), проведя предварительно тождественное преобразование [5]

$$I_1 = \int_v \mu \left(\frac{\partial U_i^0}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^0}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_i^*}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^*}{\partial x_i}\right) dv \equiv \int_v 2\mu \left(\frac{\partial U_i^0}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^0}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i^*}{\partial x_k} dv. \quad (7)$$

Получившийся интеграл возьмем по частям, понижая порядок производной при U_i^* и учитывая, что так как $\mathbf{U}^0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{U}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{U}^*(\mathbf{r})$ удовлетворяют одним и тем же граничным условиям, то, следовательно, $\mathbf{U}^*(\mathbf{r})$ удовлетворяет на границе нулевым граничным условиям. Это приведет к тому, что часть интеграла I_1, выходящая при интегрировании по частям из-под знака интегрирования, будет равна нулю. В итоге же интегрирования из (7) получим

$$I_1[\mathbf{U}^0, \mathbf{U}^*] = -2 \int_v U_i^* \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu \left(\frac{\partial U_i^0}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^0}{\partial x_i}\right)\right] dv. \quad (8)$$

Для дальнейшего анализа примем во внимание, что в нашем случае стационарное линеаризованное (в приближении $|U| \ll c$, где c — скорость звука в жидкости) уравнение Навье–Стокса имеет вид [5]

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho_q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu\left(\frac{\partial U_i^0}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k^0}{\partial x_i}\right)\right]. \quad (9)$$

Подставив (9) в (8) и учитывая, что $\mathbf{U}^0(\mathbf{r})$ является решением уравнения (9), легко получить

$$I_1[\mathbf{U}^0, \mathbf{U}^*] = -2 \int_v U_i^* \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho_q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dv =$$

$$= -2 \int_v \frac{\partial\left[(p + \rho_q \varphi) U_i^*\right]}{\partial x_i} dv = -2 \oint_S (p + \rho_q \varphi)\mathbf{U}^* \cdot dS = 0, \quad (10)$$

где была использована теорема Гаусса и учтено, что $\mathbf{U}^*(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию несжимаемости $\operatorname{div}\mathbf{U}^* = 0$ и $\mathbf{U}^*(\mathbf{r})|_s = 0$. Отметим также, что под φ в (10) можно понимать $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi^0(\mathbf{r}) + \varphi^*(\mathbf{r})$.

б) Вычислим теперь интеграл от последнего слагаемого в (6), используя процедуру интегрирования по частям и учитывая, что поскольку $\varphi^0(\mathbf{r})$ и $\varphi^0(\mathbf{r})+\varphi^*(\mathbf{r})$ удовлетворяют одним и тем же граничным условиям, то $\varphi^*(\mathbf{r})$ на границе должен равняться нулю

$$I_2\left[\varphi^0, \varphi^*\right] = \int\limits_v 2\sigma(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial\varphi^0}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i}\right) dv =$$

$$= -2\int\limits_v \varphi^* \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma(\mathbf{r})\left(\frac{\partial\varphi^0}{\partial x_i}\right)\right] dv = -2\oint\limits_S \varphi^*\sigma(\mathbf{r})\frac{\partial\varphi^0}{\partial n} dS = 0, \qquad (11)$$

где использована обобщенная теорема Гаусса.

в) В итоге из (4), (5) с учетом (10), (11) видно, что для любых $\mathbf{U}^*(\mathbf{r})$ и $\varphi^*(\mathbf{r})$ выполняется соотношение

$$\mathbf{\Phi}\left[\mathbf{U}^0 + \mathbf{U}^*, \mathbf{j}^0 + \mathbf{j}^*\right] \equiv$$

$$\equiv \mathbf{\Phi}[U^0] + \mathbf{\Phi}[j^0] + \mathbf{\Phi}[U^*] + \mathbf{\Phi}[j^*] > \mathbf{\Phi}[\mathbf{U}^0] + \mathbf{\Phi}[\mathbf{j}^0] \equiv \mathbf{\Phi}[\mathbf{U}^0, \mathbf{j}^0], \qquad (12)$$

так как все слагаемые в этих выражениях положительны. Неравенство (12) означает, что решение системы ЭГД уравнений (1) приводит к минимально возможной скорости рассеяния энергии (к минимальной скорости производства энтропии). Или, другими словами, для несжимаемой жидкости среди всех возможных ЭГД течений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, только то дает минимум функционалу (4), которое является решением системы ЭГД уравнений (1). Можно сказать и иначе: ЭГД течение, удовлетворяющее заданным граничным условиям и дающее минимум интегралу (4), является также и решением системы ЭГД уравнений (1). Таким образом, можно утверждать, что вариационный принцип минимальности скорости рассеяния энергии Онзагера эквивалентен системе ЭГД уравнений (1) и ЭГД течение, найденное при решении соответствующей вариационной задачи, должно удовлетворять и системе уравнений (1).

Легко видеть, что проведенное рассмотрение применимо и для идеально проводящей жидкости, когда движения жидкости и заряда происходят независимо друг от друга.

2. Весьма актуальной в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями [2] представляется проблема применимости вариационных принципов к расчету параметров электростатического диспергирования жидкостей.

Исследование явления электростатической неустойчивости заряженной поверхности жидкости, сопровождающейся эмиссией в окружающее пространство сильно заряженных капелек, началось еще в конце прошлого века. Но первые прагматически ориентированные исследования, имеющие целью использование этого явления в различных технических и технологических устройствах и приборах, появились лишь в начале пятидесятых годов, когда уже было накоплено достаточно большое количество эмпирических данных.

Одной из основополагающих публикаций в этом направлении была работа [6], в которой экспериментально на феноменологическом уровне строгости исследовались закономерности электростатического диспергирования жидкости с вершины жидкого мениска на торце капилляра, по которому жидкость подавалась в разрядную систему. Кроме подробного описания феноменологических закономерностей электродиспергирования жидкости в работе [6] содержался и теоретический расчет размеров и зарядов эмиттируемых капелек на основе принципа минимизации энергии конечного состояния. Авторы предлагали считать, что диспергируемый объем жидкости разбивается на некоторое количество заряженных идентичных капелек, не взаимодействующих между собой в конечном состоянии, и, минимизируя конечную энергию по радиусу капельки, определяли заряды q, радиусы r и количество капелек. Однако предположение об отсутствии электростатического взаимодействия капелек в конечном состоянии привело авторов [6] к тому, что независимые в силу физического смысла компоненты полной энергии — электростатическая энергия и энергия сил поверхностного натяжения оказались в [6] зависимыми друг от друга, что привело к снижению количества независимых термодинамических параметров, определяющих энергию системы. В итоге результаты, полученные в [6], представляются неверными.

Авторы дальнейших исследований электростатического диспергирования жидкости (см., например, [7–15]), развивавших результаты работы [6], с незначительными изменениями использовали упомянутую умозрительную, до предела упрощенную теоретическую модель явления электродиспергирования жидкости и получили столь же спорные и ошибочные результаты, что и в [6]. В работе Крона [16], исходившего в своих рассуждениях из результатов экспериментов по электрическому распыливанию жидких металлов, прямо указывалось на ошибочность теоретических результатов, полученных на основе принципа минимизации энергии конечного состояния по методике [6]. Но к его аргументам не прислушались, и та же теоретическая модель, используемая (начиная с работ [9–15]) и для расчета закономерностей рэлеевского распада сильно заряженной капли, продолжает с незначительной модификацией применяться с теми же целями и до настоящего времени [17,18], давая заведомо неверные результаты.

Сравнение энергии начального состояния распадающейся сильно заряженной капли с энергией конечного состояния без использования процедуры минимизации последней также неоднократно использовалось в задаче о рэлеевском распаде заряженной капли для расчета параметров дочерних капелек [19–21] со столь же неудовлетворительными результатами. Этот же принцип расчета был заложен и в идею расчета закономерностей деления радиоактивных ядер в капельной модели ядра [22–23] и, по-видимому, отсюда (без должного критического анализа) и был заимствован авторами [19–21].

Но коль скоро задача расчета параметров электродиспергирования жидкости с вершины мениска на торце капилляра и при рэлеевском распаде сильно заряженной капли поставлена, то должен существовать и адекватный метод ее решения. Представляется, что таким методом является использование вариационного принципа наименьшего действия в формулировке Гельмгольца. Этот принцип в трактовке Н.А.Умова утверждает [24]: "Система тел, переходящая в течение определенного времени из одного состояния в другое, совершает этот переход так, что средняя величина разностей из полных энергий, составленных для отдельных моментов времени, употребленных на действительный переход, будет наименьшей".

3. Принцип минимальности энергии конечного состояния применим лишь к замкнутым системам и представляет собой следствие закона сохранения энергии и представлений о равновесии и устойчивости системы и связывает два ее состояния: начальное и конечное, ничего не говоря о том, как происходит переход между ними. Принцип же наименьшего действия в широком смысле применим и к открытым неравновесным системам, в которых идут некие процессы. Этот принцип определяет путь в фазовом пространстве, в котором происходит переход системы из одного состояния в другое, и в этом качестве он дает о процессе перехода детальную информацию, так как определяет последовательность виртуальных состояний системы, через которые она проходит от начального состояния к конечному.

Принцип минимальности энергии конечного состояния должен давать правильные результаты при применении его к единичным, одноступенчатым актам перехода системы между энергетическими состояниями. И в этом смысле при исследовании закономерностей реализации электростатических неустойчивостей им можно пользоваться для расчета закономерностей деления сильно заряженной капли на две. Если же переход системы из начального состояния в конечное происходит через серию промежуточных метастабильных состояний, то для выяснения энергетического положения системы с каждом из промежуточных состояний необходимо пользоваться принципом наименьшего действия, который является наиболее общим принципом естествознания [24]. Причем чем больше количество промежуточных метастабильных состояний, через которые проходит система из начального состояния в конечное, и чем лучше процесс перехода аппроксимируется квазистационарным процессом, тем с большей степенью точности можно найти его промежуточные энергетические состояния из принципа наименьшего действия и тем больше ошибка при применении для этой цели принципа минимизации энергии конечного состояния системы.

Процесс рэлеевского распада сильно заряженной капли происходит посредством эмиссии порядка сотни дочерних капелек [25,26], и после каждого акта эмиссии система приходит в некое метастабильное состояние с меньшей энергией, чем в предыдущем. Поэтому для анализа закономерностей такого процесса необходимо пользоваться именно принципом наименьшего действия по той схеме, как это сделано в [25–27]. Очевидно, что сказанное относится и к электродиспергированию жидкости с мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается, так как это явление (уже по своему физическому смыслу) является стационарным неравновесным процессом второго порядка (сохраняются потоки заряда и массы) [28–30].

Но посмотрим, как работает принцип наименьшего действия при расчете параметров распада сильно заряженной капельки.

4. Пусть имеется заряженная капля маловязкой электропроводной жидкости, неустойчивая по отношению к собственному заряду. Реализация указанной неустойчивости осуществляется путем эмиссии каплей высокодисперсных сильнозаряженных дочерних капелек, уносящих избыточный заряд [25–27]. Неустойчивая по Рэлею капля принимает вытянутую сфероидальную форму, и эмиссия дочерних капелек идет симметрично с обеих вершин сфероида, по две идентичных капельки в каждом акте эмиссии (по одной с вершины).

Рассмотрим акт эмиссии, принимая, что родительская капля и дочерние капельки неподвижны, т.е. возьмем систему в момент разрыва перетяжек, связывающих дочерние капельки с эмиттирующими выступами. В таком случае и до акта эмиссии, и сразу после него система обладает лишь потенциальной энергией F, которая и определит вид функции Лагранжа L: $L = -F$. В качестве обобщенных координат, характеризующих процесс, выберем радиус и заряд дочерних капелек, которые характеризуются изменением энергии сил поверхностного натяжения и электростатической энергии системы соответственно. Тогда уравнения Лагранжа–Эйлера, описывающие эмиссию, примут вид

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{\partial F}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial q} = 0, \tag{13}$$

где под F следует понимать потенциальную энергию системы в момент эмиссии капель (в момент разрыва перетяжек).

Энергия F состоит из потенциальной энергии сил поверхностного натяжения и электростатической энергии родительской капли и двух дочерних капелек, а также из энергии их электростатического взаимодействия с родительской каплей. Поскольку в (13) дифференцирование ведется по характеристикам дочерних капелек, то в получающиеся из (13) уравнения войдут производные лишь от собственной энергии дочерних капелек и от энергии их электростатического взаимодействия с родительской каплей. Т.е. система уравнений (13) будет такой же, как была получена в [25–27] на основе термодинамического подхода.

К такому же результату можно прийти, если отталкиваться непосредственно от выше приведенной в разделе 2 трактовки Н.А.Умова принципа наименьшего действия Гамильтона. В самом деле, согласно этой формулировке, минимальным должно быть изменение полной энергии системы (в нашем случае неустойчивой капли и уже эмиттированных капелек) в каждом акте эмиссии. Выпишем выражение для изменения энергии системы в единичном акте эмиссии, вычитая из полной энергии системы в конечном состоянии энергию ее начального состояния. Получим

$$\Delta F = 4\pi\alpha r^2\left[2A_1 - \frac{2}{3}\frac{r}{R}A_2\right] + \frac{2q^2}{2r}B_1 - \frac{2Qq}{R}B_2 +$$

$$+\frac{2q^2}{2R}B_2 - \frac{2q^2}{R}K + \frac{Qq}{R}K = 0, \tag{14}$$

где

$$A_i = \frac{I}{2}\left[\sqrt{I - e_i^2} + \frac{I}{e_i}\arcsin e_i\right]\left(I - e_i^2\right)^{-1/6}; \qquad i = 1, 2,$$

$$B_i = \frac{I}{e_i}\left(1 - e_i^2\right)^{1/3} \operatorname{arth} e_i, \qquad K = \frac{I}{e_2}\left(I - e_2^2\right)^{1/3} \operatorname{arth}\frac{e_2}{\nu},$$

$$\nu = \sqrt{1 + \xi/a_2^2}.$$

В (14) первое слагаемое определяет изменение энергии сил поверхностного натяжения, три последующих слагаемых определяют изменение собственной электростатической энергии заряженных капель, два последних — энергию взаимодействия выброшенной капельки с остатком большой капли. В (14) R и Q — радиус и заряд родительской капли; ξ — эллипсоидальная координата центра маленькой капли в момент ее отрыва от большой; ν — безразмерное расстояние между центрами маленькой и большой капель в момент разрыва контакта между ними, измеренное в a_2; a_2 и B_2 — большая и меньшая полуоси сфероида: $a_2 = R(1 - e_2^2)^{1/3}$; $B_2 = R(1 - e_2^2)^{1/6}$; e_1 и e_2 — эксцентриситеты меньшей и большей капель соответственно; α — коэффициент поверхностного натяжения.

Несложно видеть, что в выражении (14) содержатся лишь слагаемые, характеризующие собственную потенциальную энергию дочерних капелек и энергию их электростатического взаимодействия с родительской каплей и изменение собственной потенциальной энергии большой капли. Потребуем, чтобы в силу принципа наименьшего действия изменение энергии (14) было минимальным. Для этого найдем производные от Δf по r и по q и приравняем их к нулю. Легко видеть, что получающиеся уравнения будут идентичны полученным из (13), а также уравнениям, использованным в [25–27].

Итак, казалось бы, с применимостью обсуждаемых вариационных принципов (минимизации энергии конечного состояния и принципа наименьшего действия) к анализу закономерностей электростатического диспергирования жидкости все ясно. Однако существует ситуация, когда оба сравниваемых принципа не только формально применимы к расчету параметров распада заряженной капли, но и дают одинаковые результаты. Речь идет о ситуации, когда в результате рэлеевской неустойчивости исходная капля выбрасывает всего одну дочернюю капельку (делится на две части). Такая возможность может реализоваться, когда капля с докристическим по Рэлею зарядом попадает в резко неоднородное электрическое поле [28,31,32] или при ее значительных механических деформациях [33,34]. Теоретический анализ такого распада проводился в [9–11,17–21], но в силу вышеупомянутых недостатков этих работ полученные в них результаты представляются ошибочными.

5. Пусть капля несжимаемой идеальной жидкости радиуса R с докритическим зарядом Q виртуальным образом вытянулась в сфероид с эксцентриситетом e_2, при котором заряд капли стал закритическим в смысле устойчивости по Рэлею (отметим, что величина критического заряда сильно зависит от эксцентриситета капли [2,35]). И пусть при проявившейся неустойчивости капли по отношению к собственному заряду она выбросила дочернюю капельку радиуса r ($r \ll R$) с зарядом q ($q \ll Q$). Примем, что при этом температура системы остается неизменной, сохраняется полный объем и электрический заряд жидкой фазы, а весь процесс происходит в среде перенасыщенного пара так, что процессами испарения и конденсации можно пренебречь. Тогда, учитывая, что эмиттируемая капелька отрывается от большой в поле ее заряда, а значит, также имеет сфероидальную форму [2] с эксцентриситетом ϵ_1, для изменения энергии системы при таком акте можно записать выражение (14).

Примем, что отрыв маленькой капли от большой происходит с вершины выступа, вырастающего на большой капле при развитии в ней неустойчивости капиллярных волн [2]. При этом под действием кулоновского взаимодействия заряда вершины выступа и заряда капли вершина выступа вместе с находящимся на ней зарядом отрывается, как только сила кулоновского отталкивания между зарядами превысит силу поверхностного натяжения $2\pi r_n \alpha$, удерживающую вершину выступа (r_n — радиус перетяжки, связывающей капли).

Пусть заряд вершины выступа в момент начала отрыва βq ($\beta < 1$), а часть заряда $(1-\beta)q$ отрывающаяся капелька получает за время отрыва, которое хоть и мало́, но конечно. Примем далее, что форма вершины выступа сфероидальна с меньшей полуосью B_1, и учтем, что напряженность поля большей сфероидальной капли в месте отрыва маленькой капельки равна

$$\gamma \frac{Q\sqrt{(1-\epsilon_2^2)^3}}{R^2\left(\nu^2-\epsilon_2^2\right)},$$

где параметр $\gamma < 1$ учитывает тот факт, что часть поверхности сфероида, образующая эмиттирующий выступ, от которого отрывается капля, в создании поля не участвует. И наконец, из условия баланса сил в момент начала разрыва перетяжки получим уравнение для определения параметра ν

$$\frac{\delta}{8W} \leqslant \frac{e_1\left(1-e_2^2\right)}{e_2\sqrt{1-e_1^2}\,\operatorname{arth} e_1}\frac{1}{\nu^2-e_2^2}\operatorname{arth}\left(e_2\frac{\nu-1}{\nu-e_2^2}\right),$$

$$\delta = \frac{r_n}{\gamma\beta B_0}, \qquad W = \frac{q^2}{16\pi\alpha R^3}, \tag{15}$$

где в δ собраны все неопределяемые параметры задачи.

Изменение энергии системы связано с появлением новой поверхности, которое можно выразить через r, и с изменением энергии электрического поля, выражающимися через q. Принимая r и q в качестве обобщенных координат, потребуем, чтобы в силу принципа наименьшего действия это изменение было минимальным, т.е. чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial(\Delta F)}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial(\Delta F)}{\partial q} = 0, \tag{16}$$

где ΔF определяется соотношением (14).

В безразмерных переменных $X = r/R$ и $Y = q/Q$ уравнения (16) принимают вид

$$X[A_1 - XA_2] - WB_1Y^2X^2 = 0, \qquad Y = XC[1-XDC]^{-1}, \tag{16a}$$

где $D = KB_1$, $C = (B_2 - K)B_1^{-1}$

Задавая теперь конкретные значения W и δ, из системы алгебраических уравнений (15), (16a) относительно трех неизвестных X, Y и ν можно найти значения размера X и заряда Y дочерней капельки, как это делалось в [25–27]. Так, при $W = 0.66$, $\delta = 0.9$, $e_2^2 = 0.7$ получаем $X = 0.042$, $Y = 0.009$.

6. А теперь посмотрим, как в данной задаче можно использовать принцип минимизации энергии конечного состояния. Для этого необходимо выписать конечную энергию F системы, получающейся после распада исходной капли на две, состоящей из взаимодействующих большой и маленькой капель, и потребовать, чтобы эта энергия была минимальна по параметрам одной из капель (так как параметры другой определятся законами сохранения заряда и массы), т.е. потребовать в соответствии с вышесказанным, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0.$$

Несложно видеть, что энергия системы F в конечном состоянии получится при добавлении к (14) энергии начального состояния

$$4\pi\alpha R^2 A_2 + \frac{Q^2}{2R} B_2.$$

Но так как при записи условий экстремальности производные берутся по параметрам дочерней капельки r и q, то добавление указанных слагаемых никак не скажется на виде уравнений для расчета r и q, которые и в обсуждаемом случае будут иметь вид (16a).

Таким образом, оба осуждаемых принципа приводят к одинаковым результатам в том случае, когда нестационарный процесс, переводящий систему из начального состояния в конечное, сводится к единичному акту без промежуточных метастабильных состояний. Единственное, что следует добавить к сказанному, так это то, что конечное состояние, для которого мы провели расчет, не является равновесным, так как капли будут отталкиваться и потенциальная энергия их взаимодействия в пренебрежении диссипацией перейдет в кинетическую энергию, когда капли удалятся на бесконечное расстояние друг от друга.

Список литературы

[1] *Yang Ch.T., Song Ch.C.S.* // Encyclopedia of Fluid Mechanics. Vol. 1. Flow Phenomena and Measurement. Houston; London; Paris; Tokyo: Gulf Publishing Company, 1986. P. 353–399.

[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.

[3] *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. М.: Мир, 1989. 310 с.

[4] *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гравитационных полей. М.: Наука, 1979. 320 с.

[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.

[6] *Vonnegut B., Neubauer R.L.* // J. Coll. Sci. 1962. Vol. 7. N 6. P. 616–622.

[7] *Ryce S.A.* // J. Coll. Sci. 1964. Vol. 19. P. 490–492.

[8] *Hogan J.J., Hendricks C.D.* // AIAA J. 1965. Vol. 3. N 2. P. 296–301.

[9] *Ryce S.A., Wyman R.R.* // Can. J. Phys. 1964. Vol. 42. P. 2185–2194.

[10] *Ryce S.A., Patriarche D.A.* // Can. J. Phys. 1965. Vol. 43. P. 2192–2199.

[11] *Ryce S.A.* // Nature. 1966. N 5030. P. 1343–1344.

[12] *Pfeifer R.J., Hendricks C.D.* // Phys. Fluids. 1967. Vol. 10. N 10. P. 2149–2154.

[13] *Ryce S.A.* // Phys. Fluids. 1973. Vol. 16. N 3. P. 452-453.
[14] *Pfeifer R.J.* // Phys. Fluids. 1973. Vol. 16. N 3. P. 454-4554.
[15] *Bailey A.G.* // Phys. Fluids. 1974. Vol. 14. P. 852-853.
[16] *Krohn V.E.* // Appl. Phys. Lett. 1973. Vol. 23. N 5. P. 220-221.
[17] *Elghazaly H.M.A., Castle G.S.P.* // IEEE Trans. Ind. Appl. 1986. Vol. 22. N 5. P. 892-896.
[18] *Elghazaly H.M.A., Castle G.S.P.* // IEEE Trans. Ind. Appl. 1987. Vol. IA-23. N 1. P. 108-113.
[19] *Cahn J.W.* // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. N 11. P. 1662-1663.
[20] *Roth D.G., Kelly A.J.* // IEEE Trans. Ind. Appl. 1983. Vol. IA-19. N 5. P. 771-775.
[21] *Emeleus K.G., Breslin A.C.* // Int. J. Electron. 1983. Vol. 54. N 2. P. 195-199.
[22] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1939. Т. 9. Вып. 6. С. 641-653.
[23] *Bohr N., Weeler J.A.* // Phys. Rev. 1939. Vol. 56. N 5. P. 426-450.
[24] *Асеев В.А.* Вариационные принципы в естествознании. Л., 1977. 231 с.
[25] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // J. Phys. D. 1990. Vol. 23. N 11. P. 1361-1370.
[26] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19-28.
[27] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 3. С. 11-18.
[28] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O., Verbitskii S.S.* // J. Coll. Int. Sci. 1991. Vol. 146. N 1. P. 137-151.
[29] *Zemskov A.A., Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // J. Coll. Int. Sci. 1993. Vol. 158. N 1. P. 54-63.
[30] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 9-20.
[31] *Doyle A., Moffett D.R., Vonnegut B.* // J. Coll. Sci. 1964. Vol. 19. P. 136-143.
[32] *Красницкий В.И., Апасов А.М., Контуш С.М.* // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 18. С. 77-81.
[33] *Berg T.G.O., Trainor R.J., Jr., Vaughan U.* // J. Atm. Sci. 1970. Vol. 27. N 11. P. 1173-1181.
[34] *Adam J.R., Lindblad N.R., Hendrics C.D.* // J. Appl. Phys. 1968. Vol. 39. N 11. P. 5173-5180.
[35] *Cerkanowicz A.E.* // IEEE IAS Cond. Proc. 1981. P 1161-1165.