

01;04;05  
 ©1995 г.

## ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ К ОПИСАНИЮ РАЗВИТИЯ РАЗРЯДА В КОНДЕНСИРОВАННЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

*B.P. Кухта, B.B. Лопатин, M.D. Носков*

Научно-исследовательский институт высоких напряжений  
 при Томском политехническом институте им. С.М. Кирова,  
 634050, Томск, Россия

(Поступило в Редакцию 13 декабря 1993 г.

В окончательной редакции 29 сентября 1994 г.)

Модифицированная фрактальная модель пробоя применяется для описания разряда в конденсированных диэлектриках. Проведены исследования законов развития и трансформации разрядных структур (РС). Изучено влияние внедренного заряда, неоднородностей диэлектрической проницаемости и проводимости диэлектрика на развитие РС. Проведено сопоставление результатов компьютерного моделирования с экспериментальными данными лазерной теневой съемки развития РС в воде.

### Введение

Несмотря на многолетние исследования электрического пробоя в конденсированных средах, до сих пор не создана теория пробоя, способная количественно описывать развитие разряда в реальных диэлектриках и позволяющая разработать критерий пробоя. Обусловлено это большим количеством процессов, одновременно происходящих при пробое, и сложным стохастическим характером развития разряда. В зависимости от условий пробоя и свойств диэлектрика эти микроскопические процессы могут быть различными. Тем не менее формирующиеся при пробое структуры разрядных каналов (разрядные структуры — РС) имеют много общих свойств. Существует несколько характерных форм РС: кустообразные, древовидные, линейные и т.д. Возможны также переходы от одной формы к другой в ходе эволюции РС. Количественно описать форму различных типов РС удается с помощью понятий фрактальной геометрии, фрактальных размерностей и критических показателей [1–3]. На характер развития РС влияют различные факторы: параметры прикладываемого напряжения, геометрия электродов, наличие неоднородностей диэлектрической проницаемости и проводимости и т.д. Причем для различных диэлектриков

следствия воздействия каждого фактора подобны. Настоящая работа направлена на понимание общих законов формирования РС, которые затем могут быть применены и к конкретным диэлектрикам.

Очевидно, что законы развития разряда теоретически можно получить из системы соответствующих уравнений, описывающих электромагнитные поля, динамику движения зарядов и среды, баланс энергии, изменение состояния вещества и т.д. Однако на практике с такой сложной системой работать весьма трудно и приходится вводить более или менее искусственные упрощения и ограничения. В результате доминирующим становится какой-то один процесс, а образование разрядных каналов интерпретируется как развитие какой-то одной неустойчивости, соответствующей этому процессу (тепловой, электро-гидродинамической, электрострикционной, токовой, ионизационной). Однако опыт показывает, что для реализации любой из них требуется напряженность поля, на 1-2 порядка превышающая электрическую прочность диэлектрика, и что в реальности развитие различных неустойчивостей происходит одновременно. Кроме того, такой подход не содержит элемента, учитывающего стохастическую природу пробоя.

Существует альтернативный подход. Суть его заключается в построении простой, но в то же время достаточно гибкой модели, в которой различные процессы совместно учитываются формальными функциональными зависимостями, включающими стохастические элементы. Такая модель должна содержать ограниченное число интегральных параметров, имеющих достаточно ясную физическую интерпретацию и с помощью варьирования которых можно было бы моделировать условия пробоя и свойства различных диэлектриков. Стохастические модели использовались для описания роста РС (см., например, [<sup>4,5</sup>]). На наш взгляд, наиболее перспективной является фрактальная модель пробоя диэлектриков, предложенная в работе [<sup>2</sup>]. В дальнейшем она подвергалась некоторым модификациям с целью достижения большего соответствия с реальностью [<sup>3,6</sup>]. Закономерности роста, присущие фрактальной модели пробоя диэлектриков, и характеристики формирующихся стохастических структур исследовались как аналитическими методами [<sup>7-9</sup>], так и с помощью компьютерного моделирования [<sup>10-13</sup>].

В данной работе делается попытка дальнейшего развития фрактальной модели пробоя диэлектриков и рассматривается ее применение для описания электрического разряда в конденсированных средах. Основным методом исследования является компьютерное моделирование. Непосредственное сравнение результатов моделирования с экспериментом позволяет не только корректировать модель, но и дает возможность определять влияние различных факторов на макроскопические характеристики разряда.

### **Фрактальная модель пробоя (ФМП) диэлектриков**

В рамках ФМП развитие разряда в диэлектрике имитируется стохастическим процессом роста фрактальной структуры. Стохастичность модели отражает имеющие место при реальном пробое флуктуации состояния диэлектрика, а также флуктуации параметров плазмы в разрядных каналах. Основным допущением фрактальной модели

является то, что ответственные за рост разрядных каналов процессы, связанные с ионизацией, ижецией, изменением агрегатного состояния вещества диэлектрика и т.д., определяются только локальной напряженностью поля и состоянием диэлектрика. Это значит, что вероятность  $P$  роста разрядной структуры в любой точке можно выразить через локальную напряженность поля  $E$  и параметры, определяющие свойства диэлектрика. Вид функции, выражающей эту зависимость, может быть установлен на основе анализа микроскопических процессов или путем сравнения макроскопических свойств экспериментально наблюдаемых РС с результатами моделирования. В данной работе мы следуем второму пути и в качестве первого приближения принимаем [2,3,6], что вероятность роста  $P$  пропорциональна напряженности  $E$  в степени  $\eta$ , если  $E$  больше некоторой критической напряженности поля  $E > E_c$ , и равна нулю, если  $E < E_c$ , т.е.

$$P = \begin{cases} E^\eta / Z & \text{при } E > E_c, \\ 0 & \text{при } E < E_c, \end{cases} \quad (1)$$

где  $Z$  — нормирующий множитель  $Z = \sum E^\eta$  (суммирование выполняется по всем возможным направлениям роста).

Значение параметра роста  $\eta$  и величина критической напряженности  $E_c$  зависят от свойств диэлектрика и происходящих при пробое процессов. Напряженность электрического поля  $E$  в диэлектрике рассчитывается с помощью теоремы Гаусса

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (2)$$

где  $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$  — вектор электрической индукции;  $\rho$  — плотность свободных зарядов;  $\epsilon, \epsilon_0$  — относительная и абсолютная диэлектрические проницаемости.

Основные приближения ФМП связаны с учетом динамики движения зарядов в диэлектрике и по разрядным каналам. В случае, когда проводимость каналов значительно превосходит проводимость диэлектрика и характерные времена движения носителей много меньше времени развития разряда, распределение заряда по разрядным каналам и в непосредственной близости от них можно учесть, полагая потенциал разрядной структуры равным потенциалу инициирующего электрода [2]. Для рассмотрения эффектов, связанных с конечной проводимостью плазменных каналов, предлагалось вводить постоянное падение напряжения вдоль РС [3] или разделение потенциала электрода и РС [6]. Таким образом, в ФМП все факторы, влияющие на развитие разряда, разделяются на глобальные, связанные с распределением электрического поля, и локальные, выражаемые через вероятность роста.

Для проведения компьютерных исследований ФМП была реализована как двумерный дискретный алгоритм роста на квадратной решетке. Использование двумерной модели накладывает определенные ограничения на возможность непосредственной интерпретации получаемых результатов применительно к экспериментальным данным. Результаты моделирования, выполненного в трехмерном случае на основе кубической решетки, находятся в качественном соответствии с двумерным. В настоящей работе развитие РС исследуется в геометрии острье-плоскость. Рост начинается с острия и заканчивается по достижении противоположного электрода. РС растет на одно ребро или

диагональ решетки за один шаг. Каждому узлу решетки с координатами  $i, j$  соответствуют условные значения потенциала  $\Phi_{i,j}$ , диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{i,j}$  и плотности свободных зарядов  $\rho_{i,j}$ . Вероятность роста определяется соотношением (1), где напряженность  $E$  равна разности потенциалов между узлами, деленной на расстояние между ними. Распределение потенциала  $\Phi_{i,j}$  определяется из уравнения (2) в дискретной форме

$$\Phi_{i,j} = \frac{\varepsilon_{i,j} \sum_{i'j'} \Phi_{i',j'} + \sum_{i'j'} \varepsilon_{i',j'} \Phi_{i',j'} + 2\rho_{i,j}}{4\varepsilon_{i,j} + \sum_{i'j'} \varepsilon_{i',j'}}, \quad (3)$$

где суммирование ведется по соседним с  $(i, j)$  узлам. Решение уравнения (3) проводится методом итераций согласно заданным граничным условиям. Граничными условиями являются потенциалы электродов и РС. Потенциалы узлов решетки, соответствующих острийному электроду, полагаются равными  $\Phi_0$ , а противоположному электроду — нулю. Поскольку структура разряда обладает большей диэлектрической проводимостью, чем диэлектрик, то ее развитие будет приводить к выносу заряда в диэлектрик и изменению распределения потенциала. Точно описать все эффекты, связанные с изменением проводимости каналов и движением зарядов по ним, достаточно сложно. Поэтому в данной модели мы качественно учтем их с помощью формального приема. Суть его заключается в разделении потенциала электрода  $\Phi_0$  на потенциал внешнего поля  $\Phi_0^{\text{ext}}$  и потенциал собственного поля  $\Phi_0^{\text{int}} (\Phi_0 = \Phi_0^{\text{ext}} + \Phi_0^{\text{int}})$ . Распределение потенциала внешнего поля  $\Phi_{i,j}^{\text{ext}}$  определяется геометрией электродов, потенциалом острия  $\Phi_0^{\text{ext}}$  и остается неизменным в процессе развития разряда. Все узлы, принадлежащие РС, имеют собственный потенциал  $\Phi_0^{\text{int}}$ . Поэтому распределение собственного потенциала зависит от траектории РС и должно рассчитываться заново по формуле (3) после каждого шага роста. Параметром, учитывающим конечную проводимость разрядных каналов при таком подходе, будет отношение собственного потенциала  $\Phi_0^{\text{int}}$  к полному  $\Phi_0$ :  $S = \Phi_0^{\text{int}} / \Phi_0$ .

Таким образом, в данной модели свойства диэлектрика описывают с тремя параметрами  $\eta$ ,  $E_c$ ,  $S$  и заданным распределением диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(i, j)$  и неподвижных свободных зарядов  $\rho(i, j)$  в объеме диэлектрика. Условия пробоя определяются потенциалом острия  $\Phi_0$  и геометрией электродов. Отметим, что если  $E_c = 0$ ,  $S = 1$ ,  $\varepsilon(i, j) = 1$  и  $\rho(i, j) = 0$  для всех узлов  $(i, j)$ , то описанная модель переходит в модель, предложенную в работе [2] (абсолютно проводящие каналы). В этом случае рост РС приводит к формированию характерных древовидных структур (рис. 1,а), подобных наблюдаемым при электрическом разряде в различных диэлектриках (рис. 1,б). Фрактальная размерность таких структур уменьшается с ростом величины  $\eta$  [2,10]. Введение в ФМП критической напряженности  $E_c$  [3] также приводит к уменьшению величины фрактальной размерности (это соответствует уменьшению степени ветвистости структуры).

В рамках ФМП с дискретным временем (числом шагов роста) все процессы учитываются в “быстром приближении”, т.е. рассматриваются только те процессы, характерные времена которых многое меньше

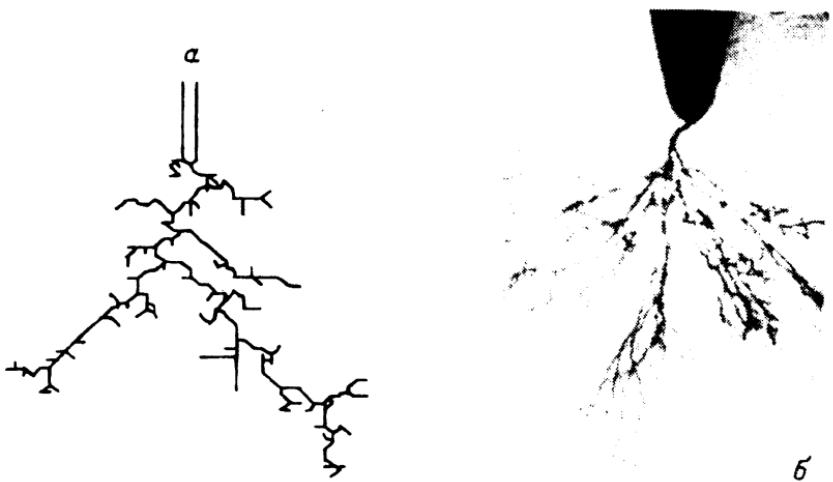


Рис. 1. Древовидная разрядная структура.

*a* — моделирование ( $\eta = 1.5$ ,  $S = 1$ ,  $E_c = 0.5$ ,  $\Phi_0 = 25$ , решетка  $50 \times 50$ );  
*b* — лазерная теневая съемка разряда с анода в дейонизованной воде с  $\sigma = 5 \cdot 10^{-7}$  См/см,  $U = 28$  кВ, экспозиция кадра  $10^{-7}$  с через 1.3 мкс от фронта импульса.

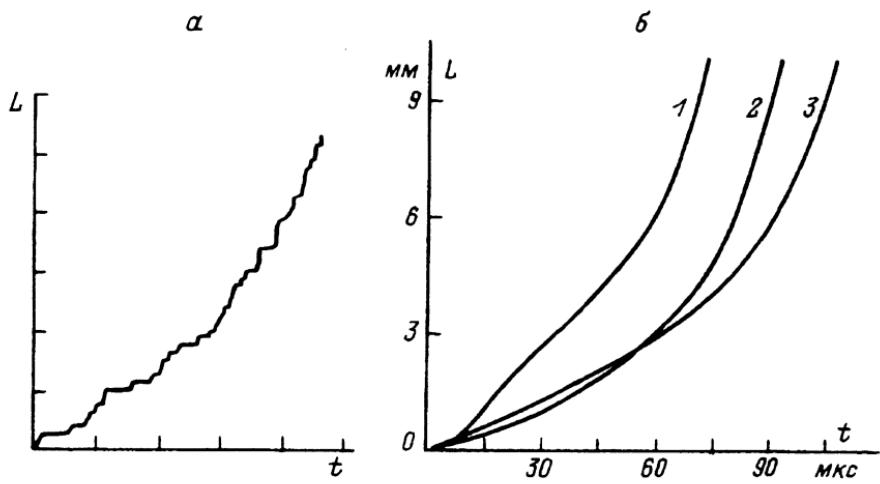


Рис. 2. Динамика развития разряда.

*a* — моделирование ( $\eta = 1.5$ ,  $S = 1$ ,  $E_c = 0.5$ ,  $\Phi_0 = 25$ ); *b* — разряд с острийного катода радиусом  $R = 160$  мкм: 1 —  $U = 38$ , 2,3 — 35 кВ.

времени роста. Для того чтобы адекватно описывать динамику процессов, протекающих на временах, сравнимых с развитием разряда (преобразование энергии, движение зарядов и г.д.), необходимо ввести в ФМП физическое время. В работах [11,1'] предполагалось, что физическое время пропорционально числу шагов роста. Поскольку рост РС в ФМП определяется распределением вероятностей (1), то необходимо учитывать это распределение при переходе к физическому времени. Исходя из законов теории вероятности в качестве первого приближения можно положить, что интервал  $\Delta t$  обратно пропорцио-

$$\Delta t = \theta/Z \quad (\Delta t = \theta / \sum E^\eta), \quad (4)$$

где  $\theta$  — параметр перехода к физическому времени.

Используя соотношение (4), мы исследовали зависимость длины РС  $L$  (расстояние от острия до наиболее удаленной точки РС) от физического времени. Результаты вычислительных экспериментов качественно согласуются с получаемыми экспериментально зависимостями длины РС от времени (рис. 2).

### Переход от кустообразной к древовидной форме развития разряда

Исследования разряда в различных диэлектриках показывают, что развитие плазменных каналов происходит в древовидной или кустообразной форме. Последняя присуща большим межэлектродным промежуткам с резко неоднородным полем (например, геометрия острие-плоскость) и малым временем запаздывания зажигания разряда. Наблюдается также переход от кустообразной формы к древовидной в процессе развития разряда. Это ярко проявляется при варьировании условий разряда, например в деионизованной воде [14], где дендрит обычно стартует из куста (рис. 3, а). Данный эффект можно объяснить, если предположить, что каналы кустообразной структуры обладают сравнительно низкой проводимостью. В этом случае развитие РС в области сильного неоднородного поля определяется только внешним полем и разрядные каналы следуют его силовым линиям. По мере удаления из области сильного поля и после перераспределения заряда по РС (в эксперименте этому соответствует остановка в развитии разряда) поле, создаваемое разрядной структурой, начинает играть определяющую роль. На этой стадии развитие разряда приводит к образованию древовидных структур.

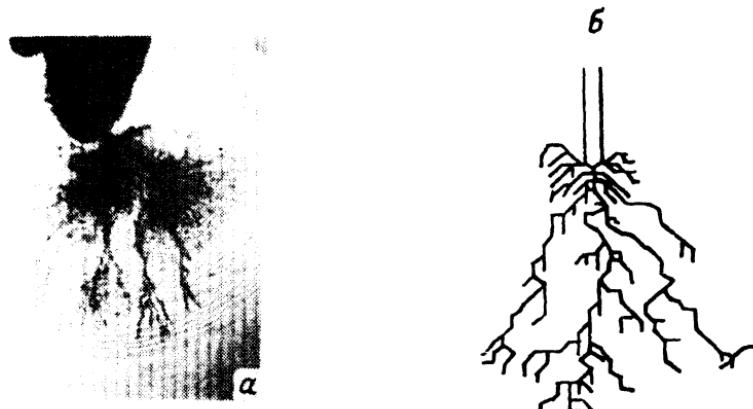


Рис. 3. Трансформация кустообразной структуры в древовидную.

*a* —  $U = 30$  кВ,  $R = 250$  мкм, промежуток  $d = 6$  см, снимок через 1 мкс от фронта импульса  
*б* — моделирование ( $\eta = 1$ ,  $S = 0.3$ ,  $k = 6$ ,  $E_c = 0.5$ ,  $\Phi_0 = 25$ ).

Введенное в ФМП разделение потенциала на две составляющие позволяет изменять степень проводимости каналов простым варьированием параметра  $S$ . Компьютерное моделирование развития разряда проводилось при различных значениях неоднородности поля  $k$  ( $k = E_{\max}/E_{\text{ср}}$ ,  $E_{\max}$ ,  $E_{\text{ср}}$  — максимальная и средняя напряженности поля) и параметра  $S$ . Установлено, что при  $k > 4$  и  $S < 0.3$  вблизи острия наблюдается рост кустообразной структуры (рис. 3, б). При увеличении значения параметра  $S$  растет вероятность развития древовидной формы без предшествующей кустообразной структуры. Кустообразная структура всегда плотно заполняет область с высокой локальной напряженностью поля. Дальнейший рост приводит к развитию из кустообразной структуры древовидных каналов, подобных наблюдавшимся в экспериментах (рис. 3, а).

Соответствие результатов компьютерного моделирования данным натурного эксперимента может служить аргументом в пользу сделанного предположения о низкой проводимости разрядных каналов в кустообразной фазе РС, а также позволяет делать количественные оценки распределения поля в процессе развития разряда.

### Влияние внедренного в диэлектрик объемного заряда на формирование разрядной структуры

Макроскопические объемные заряды, предварительно сформированные в диэлектрике, оказывают существенное влияние на развитие РС. Такие заряды могут создаваться инжекцией носителей из электродов, посторонними источниками ионизирующих излучений, пучками заряженных частиц, предшествующими незавершенными разрядами и т.д. Эффективность применения ФМП при исследовании влияния объемного заряда на развитие РС связана с тем, что вызванное внедренным зарядом глобальное перераспределение поля в диэлектрике непосредственно учитывается уравнением (3). Моделирование выполнялось при различных условиях пробоя, значениях плотности, размерах и полярностях внедренного заряда, расположенного перед острием. В процессе роста измерялись величины потенциалов, напряженности поля и плотности заряда в различных точках разрядной структуры и диэлектрика. Установлено, что траектория разрядной структуры заметно отклоняется от заряженной области в случае совпадения полярности острия и внедренного заряда (рис. 4, а) и притягивается к ней в противоположном случае. Степень отклонения повышается с ростом величины внедренного заряда. Данный эффект начинает наблюдаться, когда напряженность поля, созданного внедренным зарядом, на порядок меньше напряженности на концах разрядных каналов. Этот факт можно объяснить следующим образом. Слабое поле внедренного заряда приводит к небольшому различию для вероятностей роста РС в противоположных по отношению к заряженной области направлениях. Однако накопление влияния этого несимметричного распределения вероятностей при росте РС приводит к устойчивому отклонению траектории каналов (аналогично броуновскому блужданию с дрейфом в теории случайных процессов).

Полученные результаты использованы нами для оценки влияния объемного заряда, внедренного в диэлектрик распавшимися плазменными каналами предшествующих незавершенных разрядов. Компью-

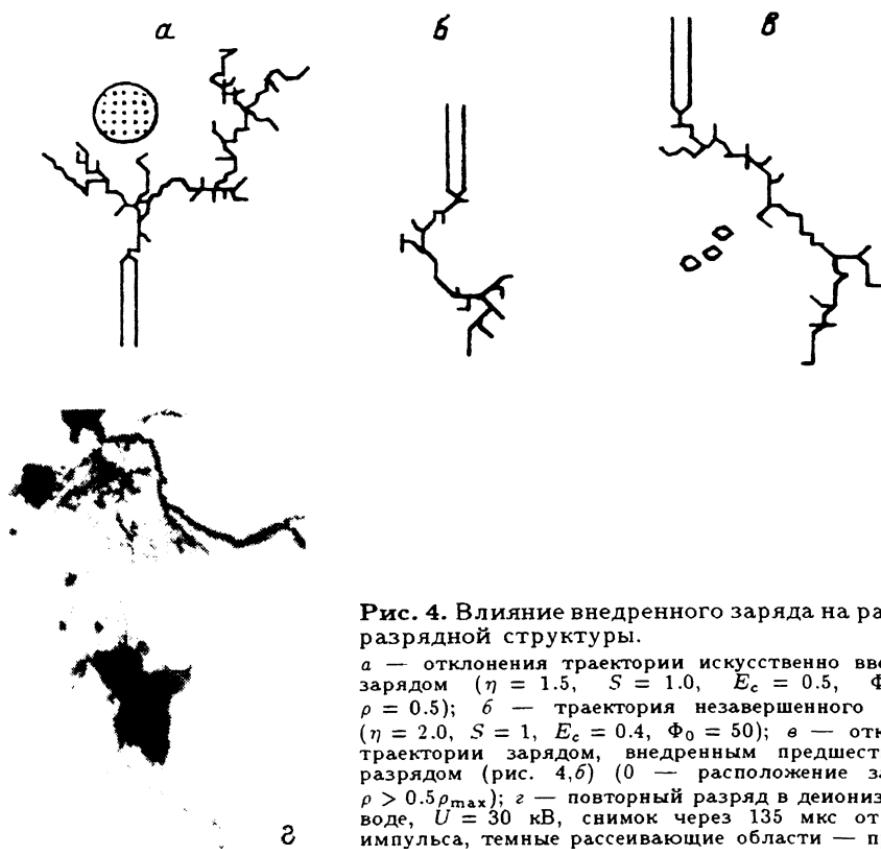


Рис. 4. Влияние внедренного заряда на развитие разрядной структуры.

*a* — отклонения траектории искусственно введенным зарядом ( $\eta = 1.5$ ,  $S = 1.0$ ,  $E_c = 0.5$ ,  $\Phi_0 = 25$ ,  $\rho = 0.5$ ); *б* — траектория незавершенного разряда ( $\eta = 2.0$ ,  $S = 1$ ,  $E_c = 0.4$ ,  $\Phi_0 = 50$ ); *в* — отклонение траектории зарядом, внедренным предшествующим разрядом (рис. 4,*б*) ( $0$  — расположение заряда с  $\rho > 0.5\rho_{\max}$ ); *г* — повторный разряд в деионизованной воде,  $U = 30$  кВ, снимок через 135 мкс от фронта импульса, темные рассеивающие области — продукты распада от предшествующего разряда.

терный эксперимент включал в себя два этапа. На первом осуществлялся рост РС на свободной от заряда решетке  $\rho_{i,j} = 0$ . В результате формировалась характерная древовидная структура (рис. 4,*б*). Затем после остановки роста определялась величина заряда, внедренного в диэлектрик разрядными каналами. Исследования показали, что практически весь заряд сосредоточивается на концах каналов. На следующем этапе осуществлялся повторный рост РС на решетке с зарядами, внедренными предшествующей РС. При этом наблюдается значительное отклонение направления роста разрядных каналов от областей сосредоточения зарядов (рис. 4,*в*), т.е. внедренный в диэлектрик незавершенным пробоем заряд создает поле, достаточное для искажения траектории последующих разрядов.

Экспериментально такой эффект может наблюдаться для материалов с низкой проводимостью  $\sigma$ , где происходит медленная релаксация внедренных зарядов. Разумеется, это относится к диэлектрикам, в которых незавершенный пробой не вызывает долгоживущих макроскопических разрушений: растрескивания, образования науглероженных полостей и т.д., которые сами по себе оказывают более сильное влияние по сравнению с объемными зарядами. К таким диэлектрикам относятся газы, жидкости, полимеры и часто стекла. Хорошо наблюдается этот эффект в деионизованной воде со сравнительно небольшим максвелловским временем релаксации заряда  $\varepsilon\varepsilon_0/\sigma \sim 15$  мкс. Так, в сан-

тиметровых промежутках и поле острье-плоскость при низкой вероятности импульсного пробоя реализуются условия, когда наблюдается развитие древовидной РС, остановка роста и распад, а затем развитие новой РС и т.д. Такая последовательность незавершенных разрядов с временем релаксации  $\sim 10$  мкс наблюдалась в оптических исследованиях предпробивных процессов при времени воздействия прямоугольного импульса  $\gtrsim 100$  мкс [14]. При этом последующие разрядные структуры не повторяют траектории каналов предшествующих, несмотря на сохранение в промежутке газообразных продуктов распада разрядных каналов (пузырьков) от предшествующей РС (рис. 4,г). Особенно сильно отклонение траектории проявляется вблизи головок каналов предшествующей РС, где плотность объемного заряда максимальна.

## Развитие разряда в диэлектрике с неоднородностями диэлектрической проницаемости

Наличие в диэлектрике неоднородностей диэлектрической проницаемости может приводить к понижению или повышению электрической прочности в зависимости от местоположения и характера неоднородностей. Этот факт можно объяснить возникновением связанных объемных зарядов в областях с отличным от нуля значением градиента диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . Нескомпенсированные связанные заряды, так же как и свободные заряды, вызывают перераспределение электрического поля, что приводит к изменению картины развития разряда.

ФМП была использована нами для исследования развития разряда и изучения перераспределения поля в неоднородном диэлектрике. Рассматривались два важных с практической точки зрения случая: сферическое включение со значением  $\epsilon_b$ , отличным от  $\epsilon$  основного диэлектрика, и дополнительный слой (барьер) с повышенной  $\epsilon_b$ , разделяющий основной диэлектрик на две части.

Компьютерное моделирование развития разряда показало, что сферическое включение с  $\epsilon_b > \epsilon$ , расположенное в объеме диэлектрика, повышает напряженность поля вблизи острия. Выведенное им перераспределение поля приводит к эффекту притяжения траектории РС включением. Включения с  $\epsilon_b < \epsilon$  вызывают понижение напряженности поля у острия и отталкивание траектории РС. Данные эффекты находятся в соответствии с общими представлениями о влиянии включений, например о влиянии объектов с отличающейся  $\epsilon_b$  на траекторию молний.

Моделирование развития разряда в диэлектрике с барьером проводилось на решетке со значениями диэлектрической проницаемости, распределенными так, чтобы имитировать трехслойный диэлектрик. Исследования выполнялись при различных значениях прикладываемого напряжения, местоположения и толщины барьера, отношения диэлектрических проницаемостей барьера  $\epsilon_b$  и основного диэлектрика  $\epsilon$ . Установлено, что при отношении  $\epsilon_b/\epsilon \gtrsim 5$  перераспределение поля приводит к искривлению траектории и удержанию РС в барьере (рис. 5,а). Обнаруженным эффектом, в частности, обусловлен известный способ увеличения электрической прочности изоляции путем введения в диэлектрик барьера с повышенной диэлектрической проницаемостью. На рис. 5,б показан след дугового разряда, завершающего пробой трехслойной изоляции ( $\epsilon_b = 20$ ,  $\epsilon = 4,6$ ). Основной

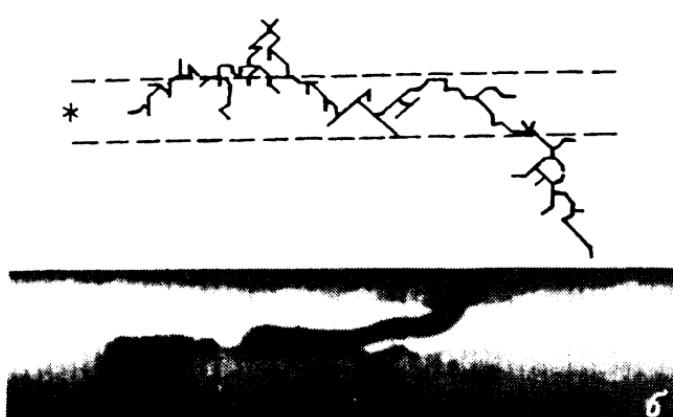


Рис. 5. Траектории разрядной структуры в барьере слое.

а — моделирование ( $\eta = 2$ ,  $S = 1$ ,  $E_c = 0.5$ ,  $\epsilon_b/\epsilon = 15$ ,  $\Phi_0 = 30$ , \* — барьер);

б — след канала разряда в трехслойном диэлектрике (основной материал — резина,  $\epsilon = 4.6$ , барьер — композит на основе резины,  $\epsilon_b = 20$ , толщина диэлектрика 0.11 см).

диэлектрик — резина, барьер — композиционный материал на основе резины с высокодисперсным порошком керамики (фотография получена О.С. Гефле). Видно, что траектория РС удерживается в барьере слое с высоким  $\epsilon_b$ . Сравнение результатов моделирования и натурного эксперимента (рис. 5, а и б) позволяет сделать вывод, что возникающее вследствие образования объемных зарядов на границе раздела диэлектриков перераспределение электрического поля оказывается достаточным для возникновения эффекта удержания разрядных каналов в барьере слое. Т.е. влияние перераспределения поля в барьере с большой  $\epsilon_b$  нельзя учесть только увеличением  $E_c$  внутри барьера, как считалось в [12], при фрактальном моделировании роста РС.

### Влияние неоднородностей проводимости диэлектрика на развитие РС

Наличие в диэлектрике неоднородностей проводимости, так же как диэлектрической проницаемости, приводит к изменению характера развития РС и может вызвать уменьшение электрической прочности. ФМП с физическим временем может быть использована для исследования эффектов, возникающих вследствие существования неоднородности проводимости диэлектрика. Мы рассматриваем глобальный эффект (т.е. эффект, являющийся следствием перераспределения поля во всем объеме диэлектрика), который возникает на значительном расстоянии от траектории РС до места нахождения неоднородности. Поэтому в качестве первого приближения можно считать, что плотность тока  $j$  определяется законом Ома  $j = \sigma E$ . В этом случае из уравнения непрерывности следует соотношение, описывающее динамику плотности зарядов  $\partial\rho/\partial t = -\operatorname{div}(\sigma E)$ . Соответствующее уравнение на решете имеет вид

$$\Delta\rho_{i,j}^{(n)} = -\Delta t^{(n)} \sum_{i'j'} \frac{(\sigma_{i,j} + \sigma_{i',j'})}{2} (\Phi_{i,j} - \Phi_{i',j'}), \quad (5)$$

где  $\Delta\rho_{i,j}^{(n)}$  — изменение плотности свободных зарядов в узле  $(i,j)$  на  $n$ -м шаге роста;  $\Delta t^n$  — интервал физического времени (4), соответствующий  $n$ -шагу;  $\sigma_{i,j}$  — условная проводимость узла решетки.

Уравнение (5) было согласовано для учета изменения плотности свободных зарядов в местах неоднородностей диэлектрика в процессе развития РС. Модифицированная ФМП применена для исследования влияния на разряд сферических включений с отличной от основного диэлектрика проводимостью. Расположенное перед острием сильнопроводящее включение вызывает усиление напряженности поля у острия. В этом случае возможно развитие разряда, даже если в начальные моменты времени напряженность поля у острия была меньше критической. Аналогично расположенное слабопроводящее включение приводит к обратному эффекту. В этом случае может реализоваться ситуация, когда рост РС прекращается (незавершенный разряд).

Произвольно расположенные в диэлектрике сильнопроводящие включения притягивают траекторию РС, а слабопроводящие отталкивают. Эти явления во многом аналогичны эффектам, вызываемым соответствующими неоднородностями диэлектрической проницаемости.

### Распад разрядных каналов

Развитие плазменных каналов, составляющих РС, определяется балансом энерговыделения в них и рассеяния энергии в окружающий диэлектрик. Если рассеяние энергии превышает энерговыделение, то плазменные каналы и вся РС распадаются, т.е. будет наблюдаться незавершенный разряд. Даже при завершенном пробое некоторые каналы РС распадаются. Это связано с неравномерностью распределения тока по разрядной структуре. Часть каналов (мертвые концы)

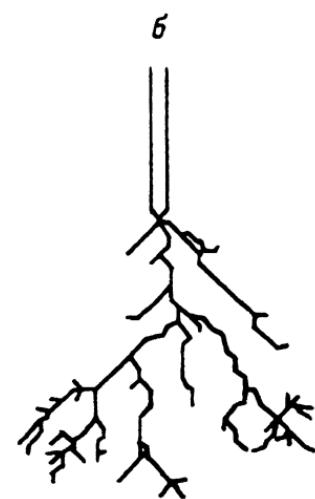
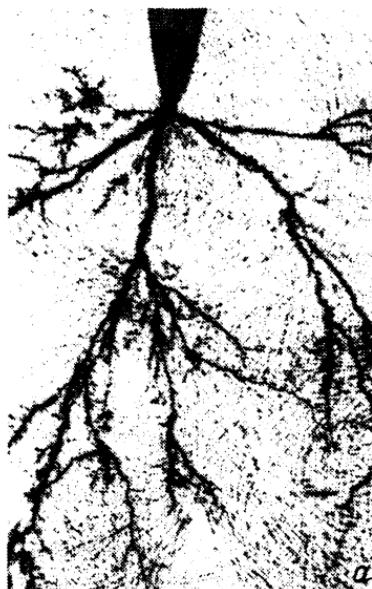


Рис. 6. Распад зашунтизованных ветвей древовидной РС.

а —  $U = 40$  кВ,  $d = 6$  см,  $R = 250$  мкм; б — моделирование ( $\eta = 2$ ,  $S = 1$ ,  $E_c = 0.5$ ,  $\Phi_0 = 500$ , решетка  $50 \times 50$ ).

оказываются зашунтированными, ток в них становится равным нулю и они распадаются. Каналы, по которым продолжает протекать ток (проводящий скелет) и которые поддерживают рост всей структуры, наоборот будут расширяться. Таким образом, на завершающих стадиях развития от структуры разряда остается только проводящий скелет (рис. 6,а). Такого рода трансформацию РС в рамках ФМП можно описать, если ввести в последнюю элемент обратимости, т.е. соответствующий алгоритм распада разрядных каналов. В первом приближении, достаточно для качественного анализа распада каналов, мы считали, что относящийся к РС узел переходит в диэлектрическое состояние, если в течение определенного числа шагов роста  $N_p$  он не принадлежал к растущей ветви. Число шагов  $N_p$  для каждого узла изменяется в процессе развития РС. Оно прямо пропорционально числу событий роста, связанных с электродом через данный узел. Описанный алгоритм соответствует постоянному рассеянию энергии разрядных каналов и выделению энергии в моменты их роста. Несмотря на значительную упрощенность этого алгоритма, картины развития РС при компьютерном моделировании (рис. 6,б) хорошо согласуются с реальными формами разряда (рис. 6,а).

## Заключение

Фрактальная модель пробоя адекватно описывает основные закономерности развития РС и может служить основой для построения количественной теории разряда в конденсированных диэлектриках. Результаты компьютерных экспериментов, выполненных в рамках ФМП, качественно соответствуют данным оптических исследований предпробивных явлений. В частности, были смоделированы развитие кустообразной структуры, дендрита, трансформация куста в дендрит, влияние внедренного объемного заряда в диэлектрике на развитие РС, эффекты, возникающие вследствие существования неоднородностей диэлектрической проницаемости, распад каналов разрядной структуры и незавершенный разряд. Предложенный переход к физическому времени в моделировании разряда позволяет исследовать влияние неоднородностей проводимости диэлектрика и дает возможность более полного учета эффектов, связанных с балансом энергии и динамикой зарядов. Непосредственное сравнение результатов моделирования с экспериментом позволяет не только корректировать модель пробоя, но дает возможность анализировать роль различных физических процессов в формировании разряда и прослеживать связь макроскопических закономерностей формогенеза с микроскопическими процессами при фазовом переходе диэлектрик-плазма. Достоинством рассматриваемого подхода является трудно осуществимая в натурном эксперименте возможность независимого варьирования глобальных и локальных факторов, включая параметры диэлектрика. Это дает надежду на создание критерия пробоя и получение количественных зависимостей электрической прочности от геометрии электродов, вида напряжения, свойств диэлектрика и условий пробоя. Критерий пробоя должен быть основан на совпадении результатов моделирования и последовательности картин развития разряда при лазерной интерферометрической съемке [14,15]. Однако для построения количественной теории пробоя конденсированных диэлектриков необходимы дальнейшие исследова-

ния, связанные, в частности, с более полным учетом динамики заряда и баланса энергии в разрядных каналах и в объеме диэлектрика, введением более реалистичной функции для вероятности роста и получением функциональных зависимостей параметров  $\eta$ ,  $E_c$  от физических свойств диэлектрика. Для получения количественных результатов компьютерные эксперименты необходимо проводить на трехмерной решетке.

Данные исследования были поддержаны грантом Американского физического общества.

### Список литературы

- [1] Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman, 1982. 468 p.
  - [2] Niemeyer L., Pietronero L., Wiesmann H.J. // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 52. N 12. P. 1033–1036.
  - [3] Wiesmann H.J., Zeller H.R. // *J. Appl. Phys.* 1986. Vol. 60. N 5. P. 1770–1773.
  - [4] Takayasu H. // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 54. N 11. P. 1099–1101.
  - [5] Куперштог А.Л. // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. Вып. 19. С. 91–96.
  - [6] Кухта В.Р., Лопатин В.В., Носков М.Д. // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. Вып. 19. С. 71–73.
  - [7] Arian E., Alstrom P., Aharony A., Stanley E. // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63. N 19. P. 2005–2009.
  - [8] Pietronero L. // *Physica A*. 1990. Vol. 163. P. 207–245.
  - [9] Dekeyser R., Maritan A., Stella A. // *J. Phys. A*. 1991. Vol. 24. P. 1281–1291.
  - [10] Cannam C. // Фракталы в физике. М.: Мир, 1984. С. 238–243.
  - [11] Barclay A.L., Sweeney P.J.J., Dissado L.A., Stevens G.C. // *J. Phys. D*. 1990. Vol. 23. P. 1536–1545.
  - [12] Sweeney P.J.J., Dissado L.A., Cooper J.M. // *J. Phys. D*. 1992. Vol. 25. P. 113–119.
  - [13] Петров Н.И., Петрова Г.Н. // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. Вып. 3. С. 14–18.
  - [14] Гаевилов И.М., Кухта В.Р., Лопатин В.В. и др. // Изв. вузов. Физика. 1989. № 1. С. 88–92.
  - [15] Петров П.Г., Кухта В.Р., Лопатин В.В. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 6. С. 1185–1188.
-