

01;06;07;08

©1995 г.

БРЭГГОВСКАЯ ДИФРАКЦИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ НА УЛЬТРАЗВУКЕ В ОПТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ ГИРОТРОПНЫХ КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

С. Н. Шарангович

Томская государственная академия систем управления и радиоэлектроники,
634050, Томск, Россия
(Поступило в Редакцию 18 апреля 1994 г.)

Теоретически исследована брэгговская дифракция световых пучков на ультразвуке в оптически неоднородных гиротропных кубических кристаллах при сильном акустооптическом взаимодействии. Для линейно неоднородной модели оптических свойств получены аналитические решения векторно-матричных уравнений связанных волн в частных производных, позволяющие описать изменение пространственной и поляризационной структуры дифракционных полей при произвольной эффективности дифракции. Рассмотрены частные случаи дифракции на сдвиговых и продольных акустических волнах. Приведены результаты численного моделирования.

Введение

В последнее время основное внимание при исследовании акустооптического взаимодействия (АОВ) световых и акустических полей было сосредоточено на изучении эффектов, связанных с пространственной неоднородностью взаимодействующих полей, а также с различными проявлениями анизотропных и гиротропных свойств кристаллов [1-5] в предположении об однородности их свойств.

В реальных условиях кристаллические материалы, используемые в качестве сред АОВ, являются пространственно неоднородными. Неоднородности могут возникать в процессе роста кристаллов, могут быть индуцированы внешними или внутренними по отношению к кристаллу электрическими и температурными полями. Теоретические модели дифракции световых пучков на ультразвуке, учитывающие неоднородность оптических свойств и пространственных распределений световых пучков, были развиты для анизотропных кристаллов с электро- и температурно наведенными неоднородностями [6,7], а также для оптических изотропных сред и кубических кристаллов [8].

В данной работе на основе обобщения двумерной пространственной теории АОВ световых пучков в оптически однородных гиротропных кристаллах [4,5] и неоднородных анизотропных средах [6] теоретически исследуется брэгговская дифракция световых пучков на ультразвуке в оптически неоднородных гиротропных кристаллах кубической симметрии. Основное внимание сосредоточено на построении аналитической модели АОВ в замкнутой форме для регулярной модели неоднородности, обусловленной для определенности температурными эффектами. В рамках данной модели описывается изменение пространственной и поляризационной структуры дифракционных полей при произвольной эффективности дифракции и ориентациях температурного градиента.

Общие уравнения

Сформулируем постановочную часть данной работы, используя при этом терминологию, обозначения и основные приближения, принятые в [5,7]. Задача состоит в отыскании дифракционного поля, сформированного при брэгговской дифракции падающего светового пучка $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, t)$ на возмущенной слаборасходящимся акустическим пучком $U(\mathbf{r}, t)$ двумерной области прозрачного, оптически неоднородного гиротропного кристалла кубической симметрии.

Распространение и взаимодействие световых полей в пространственно неоднородных оптически активных кубических кристаллах будем рассматривать на основе волнового уравнения [9]

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -c_c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\hat{\varepsilon} \mathbf{E} + 2\alpha \text{rot } \mathbf{E}], \quad (1)$$

где c_c — скорость света в вакууме, α — параметр оптической активности [9], $\hat{\varepsilon}$ — относительная диэлектрическая проницаемость.

Пространственная геометрия АОВ показана на рис. 1. Дифракционное поле состоит из прошедшего $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ и дифрагированного $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ в $+1$ -й порядок световых пучков. Волновые векторы \mathbf{K}_0 акустического и $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1$ световых пучков лежат в плоскости дифракции XZ . Допустим.

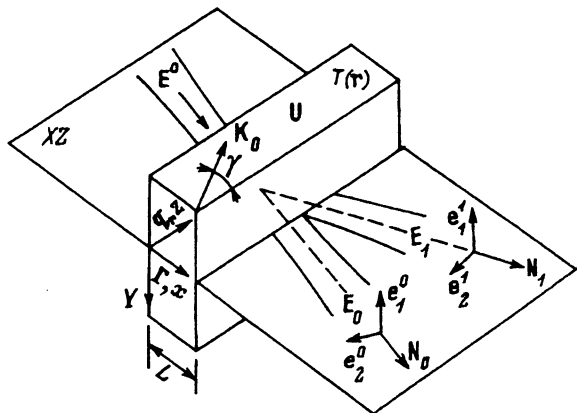


Рис. 1. Пространственная геометрия двумерного брэгговского АОВ, показывающая ориентацию световых $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ и акустического $U(\mathbf{r}, t)$ пучков, а также поляризационных векторных базисов $\mathbf{e}_1^j, \mathbf{e}_2^j, \mathbf{N}_j$ ($j = 0, 1$) в координатной системе XYZ . Волновой вектор \mathbf{K} и волновые нормали $\mathbf{N}_0, \mathbf{N}_1$ лежат в плоскости дифракции XZ .

что лучевая нормаль \mathbf{q}_r пучка \mathbf{U} , коллинеарная вектору Пойнтинга, лежит в плоскости XZ и отклонена от направления волновой нормали \mathbf{q} на угол γ . Оси Z и X координатной системы XYZ направлены соответственно вдоль и перпендикулярно лучевой нормали \mathbf{q}_r .

Векторное поле смещений $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ монохроматического акустического пучка представим в виде квазиплоской, слаборасходящейся волны

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0.5\mathbf{u}[U_0 U_m(\mathbf{r}) \exp[i(\Omega_0 t - \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r})] + \text{к.с.}], \quad (2)$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{\Gamma} + z\mathbf{q}_r$ — двумерный радиус-вектор; \mathbf{u} — единичный вектор смещения, характеризующий поляризацию; $\mathbf{K}_0 = \mathbf{q}\Omega_0/v$; U_0 , Ω_0 , v — амплитуда смещений, частота и скорость; $U_m(\mathbf{r}) = U_m(x, z)$ — нормированное распределение комплексной амплитуды в плоскости XZ ; $\mathbf{\Gamma}$ — единичный вектор вдоль оси X .

Допустим, что в пределах области АОВ дифракционными искажениями пучка \mathbf{U} можно пренебречь, т.е. $U_m(x, z) = U_m(x)$. На практике это условие выполняется при работе в ближней зоне преобразователя, а также для специальных срезов кристаллов, обладающих автоколлимационными свойствами [2]. В этих случаях можно считать, что область АОВ ограничена параллельными плоскостями $\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{r} = 0$ и $\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{r} = L$, совпадающими с границами пучка $\mathbf{U}(\mathbf{r})$, где L — ширина пучка вдоль оси X .

Примем для определенности, что пространственная неоднородность оптических свойств кристалла обусловлена двумерно-неоднородным температурным полем $T(\mathbf{r})$. Распределение поля $\hat{T}(\mathbf{r})$ в области АОВ в первом приближении аппроксимируем линейной функцией

$$T(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r} = 0) + \mathbf{r} \cdot \text{grad } T(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=0}, \quad (3)$$

где $T(\mathbf{r} = 0) = T_0$ — средняя температура кристалла.

Возмущение относительной диэлектрической проницаемости кристалла $\hat{\epsilon}$ под действием полей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $\hat{T}(\mathbf{r})$ соответственно на величины $\Delta\hat{\epsilon}_a$ и $\Delta\hat{\epsilon}_t$ будем считать малыми по отношению к ее значению в невозмущенной среде $\hat{\epsilon}_0$ и представим в линейном приближении

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{r}, t) = \hat{\epsilon}_0 + \Delta\hat{\epsilon}_a(\mathbf{r}, t) + \Delta\hat{\epsilon}_t(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Здесь $\hat{\epsilon}_0 = n^2 \hat{I}$, n — показатель преломления при температуре T_0 , \hat{I} — единичный тензор второго ранга,

$$\Delta\hat{\epsilon}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\Delta\hat{\epsilon} U_m(\mathbf{r}) \exp[i(\Omega_0 t - \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{r})] + \text{к.с.}], \quad (5)$$

где $\Delta\hat{\epsilon}$ — величина возмущения $\hat{\epsilon}_0$ при $U_0 = 1$ и температуре T_0 [1,2],

$$\Delta\hat{\epsilon}_t(\mathbf{r}) = 2n \frac{dn}{dT} \Big|_{T=T_0} \Delta T(\mathbf{r}) \hat{I}, \quad (6)$$

где $\Delta T(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}) - T_0 = \mathbf{r} \cdot \text{grad } T(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=0}$ — пространственное распределение температурного поля в области АОВ.

Пространственную зависимость параметра оптической активности α в (1) ввиду малости возмущений, вызванных полем $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ (например, через электрогирационный и пьезогирационный эффекты), будем считать обусловленной воздействием только поля $T(\mathbf{r})$.

$$\alpha(\mathbf{r}) = \alpha_0 + \left. \frac{d\alpha_0}{dT} \right|_{T=T_0} \Delta T(\mathbf{r}), \quad (7)$$

где $\alpha_0 = \alpha(\mathbf{r} = 0)$ — значение α в однородной среде при температуре T_0 .

Падающий на возмущенную область кристалла пространственно модулированный световой пучок $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, t)$ на входной границе области АОВ ($\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{r} = 0$) представим в виде квазиплоской волны

$$\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_0 E^0(\mathbf{r}) \exp[i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})] + \text{к.с.} \}, \quad (8)$$

где ω_0, \mathbf{e}_0 — частота и комплексный вектор поляризации; $E^0(\mathbf{r})$ — распределение комплексной амплитуды на плоскости $\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{r} = 0$ по координате z .

Дифракционное поле \mathbf{E} в области АОВ, удовлетворяющее волновому уравнению (1), будем искать в рамках геометрикооптического приближения двумерной брэгговской дифракции методом медленно меняющихся амплитуд (ММА) в виде суммы локально-плоских неоднородных пучков нулевого \mathbf{E}_0 и первого \mathbf{E}_1 дифракционных порядков

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=0}^1 \mathbf{E}_j = \frac{1}{2} \left\{ \sum_j^{0,1} \sum_k^{\pm} \mathbf{e}_k^j E_j^k(\mathbf{r}) \exp[i(\omega_j t) - \int \mathbf{k}_j^k(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}] + \text{к.с.} \right\}, \quad (9)$$

где каждый из пучков представлен разложением по собственным циркулярно поляризованным волнам оптически активного кубического кристалла; $E_j^k(\mathbf{r})$ — медленно меняющиеся в области АОВ пространственные распределения амплитуд; частоты ω_j связаны соотношением $\omega_1 = \omega_0 + \Omega_0$; $\mathbf{k}_j^k(\mathbf{r}) = k_j n_k(\mathbf{r}) \mathbf{N}_j(\mathbf{r})$ — локальные волновые векторы; $\mathbf{N}_j(\mathbf{r})$ — волновые нормали, $n_k(\mathbf{r})$ — показатели преломления; $k_j = \omega_j / c$.

Пространственная зависимость волновых векторов $\mathbf{k}_j^k(\mathbf{r})$ в (9) характеризуется искривлением траекторий световых волн в неоднородной среде и находится из уравнений нулевого приближения метода ММА, к которым сводится уравнение (1) при подстановке в него (4), (7), (9) и $\Delta \hat{\varepsilon}_a = 0$,

$$\left[\mathbf{k}_j^{k^*} \mathbf{k}_j^{k^*} - (\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) - i2\alpha(\mathbf{r}) \mathbf{k}_j^{k^*}) \frac{\omega_j^2}{c^2} \right] \cdot \mathbf{e}_j^k = 0, \quad (k = \pm). \quad (10)$$

Решения уравнений (10) при заданных на входной границе области АОВ направлениях волновых нормалей $\mathbf{N}_j(\mathbf{r} = 0) = \mathbf{N}_j^*$ определяют значения показателей преломления $n_{\pm}(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) \pm \gamma_0(\mathbf{r})$, где

$$n(\mathbf{r}) = n + \left. \frac{dn}{dT} \right|_{T=T_0} \Delta T(\mathbf{r}),$$

$\gamma_0(\mathbf{r}) = k_j \alpha(\mathbf{r})$ — параметр гирации, и циркулярные векторы поляризации

$$\mathbf{e}_+^j = (\mathbf{e}_1^j + i\mathbf{e}_2^j) / \sqrt{2}, \quad \mathbf{e}_-^j = (\mathbf{e}_1^j - i\mathbf{e}_2^j) / \sqrt{2}, \quad (11)$$

которые совместно с волновыми нормальными \mathbf{N}_j образуют ортонормированные, круговые базисы $(\mathbf{e}_+^j, \mathbf{e}_-^j, \mathbf{N}_j)$. Единичные векторы $\mathbf{e}_1^j, \mathbf{e}_2^j$ в (11) лежат в плоскостях поляризации $\mathbf{N}_j \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ пучков \mathbf{E}_j , как показано на рис. 1, и связаны соотношением $[\mathbf{e}_1^j \times \mathbf{e}_2^j] = \mathbf{N}_j$.

Эволюция амплитудных профилей $E_0^\pm(\mathbf{r})$ и $E_1^\pm(\mathbf{r})$ при АОВ в неоднородной среде описывается в первом приближении метода ММА следующей системой уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \nu_0 \frac{\partial}{\partial x} E_0^- + \eta_0 \frac{\partial}{\partial z} E_0^- &= -iU_m^*(x, z)U_0 \times \\ &\times \left\{ C_n^- E_1^- \exp \left[i \int \Delta \mathbf{K}_{--} d\mathbf{r} \right] + C_a^- E_1^+ \exp \left[i \int \Delta \mathbf{K}_{-+} d\mathbf{r} \right] \right\}, \\ \nu_0 \frac{\partial}{\partial x} E_0^+ + \eta_0 \frac{\partial}{\partial z} E_0^+ &= -iU_m^*(x, z)U_0 \times \\ &\times \left\{ C_n^+ E_1^+ \exp \left[i \int \Delta \mathbf{K}_{++} d\mathbf{r} \right] + C_a^+ E_1^- \exp \left[i \int \Delta \mathbf{K}_{+-} d\mathbf{r} \right] \right\}, \\ \nu_1 \frac{\partial}{\partial x} E_1^- + \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E_1^- &= -iU_m(x, z)U_0 \times \\ &\times \left\{ C_n^- E_0^- \exp \left[-i \int \Delta \mathbf{K}_{--} d\mathbf{r} \right] + C_a^- E_0^+ \exp \left[-i \int \Delta \mathbf{K}_{+-} d\mathbf{r} \right] \right\}, \\ \nu_1 \frac{\partial}{\partial x} E_1^+ + \eta_1 \frac{\partial}{\partial z} E_1^+ &= -iU_m(x, z)U_0 \times \\ &\times \left\{ C_n^+ E_0^+ \exp \left[-i \int \Delta \mathbf{K}_{++} d\mathbf{r} \right] + C_a^+ E_0^- \exp \left[-i \int \Delta \mathbf{K}_{-+} d\mathbf{r} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

которая получается при подстановке (4), (7), (9) в (1) с учетом (10) и результатов [4,5]. Здесь $\nu_j = \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{N}_j$, $\eta_j = \mathbf{q}_r \cdot \mathbf{N}_j$, причем в геометрии дифракции на рис. 1, $\bar{b} \nu_j = \cos \varphi_j$, $\eta_0 = -\sin \varphi_0$, $\eta_1 = \sin \varphi_1$; φ_j — углы между нормальными \mathbf{N}_j и $\mathbf{\Gamma}$, $\varphi_0 = \theta_0(\mathbf{r}) - \gamma$, $\varphi_1 = \theta_1(\mathbf{r}) + \gamma$; $\theta_j(\mathbf{r})$ — углы между \mathbf{N}_j и акустическим фронтом;

$$C_n^\pm = k_0(\lambda_1 + \lambda_2) / [8(n(\mathbf{r}) \pm 2\gamma_0(\mathbf{r}))], \quad C_a^\pm = k_0(\lambda_1 - \lambda_2) / [8(n(\mathbf{r}) \pm 2\gamma_0(\mathbf{r}))], \quad (13)$$

— коэффициенты АО связи, соответственно характеризующие эффективность нормальных и аномальных дифракционных процессов [2], $\lambda_1 = \mathbf{e}_1^j \cdot \Delta \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_1^j$, $\lambda_2 = \mathbf{e}_2^j \cdot \Delta \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_2^j$; $k_0 = \omega_0 / c_c$ — волновое число света в вакууме;

$$\Delta \mathbf{K}_{km}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}_0^k(\mathbf{r}) - \mathbf{k}_1^m(\mathbf{r}) + \mathbf{K}_0 = \Delta K_{km}(x, z) \mathbf{\Gamma} \quad (k, m = \pm) \quad (14)$$

— локальный вектор фазовой расстройки, направление которого определяется краевыми условиями, т.е. нормалью $\mathbf{\Gamma}$ к границе области АОВ.

Систему уравнений (12) дополним граничными условиями для взаимодействующих световых полей

$$E_0^\pm(x=0, z) = E_\pm(z), \quad E_1^\pm(x=0, z) = 0, \quad (15)$$

где $E_\pm(z) = (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\pm^0)E^0(z)$ — циркулярные составляющие падающего пучка \mathbf{E}^0 (8) с пространственным распределением амплитуды $E^0(z)$ на входной границе области АОВ ($\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{r} = 0$) и произвольным состоянием поляризации, заданным комплексным вектором \mathbf{e}_0 .

Следует отметить, что в системе (12) неоднородность оптических свойств среды АОВ проявляется в зависимости как амплитудных ν_j , η_j , C_n^\pm , C_a^\pm , так и фазовых Δk_{km} параметров АОВ от координат. Учитывая малость

$$\mu_n = \frac{dn}{dT} \Delta T(\mathbf{r})/n \ll 1 \quad \text{и} \quad \mu_\alpha = \frac{d\alpha}{dT} \Delta T(\mathbf{r})/\alpha_0 \ll 1,$$

пространственной зависимостью параметров ν_j , η_j , C_n^\pm , C_a^\pm можно пренебречь, что фактически означает неизменность поляризационных базисов (\mathbf{e}_+^j , \mathbf{e}_-^j , \mathbf{N}_j) в любой точке области АОВ. В этом случае основное влияние неоднородности оптических свойств среды на АОВ в системе (12) будет заключаться в изменении фазовых соотношений между взаимодействующими световыми пучками по мере их распространения в области АОВ, которые характеризуются фазовыми расстройками $\Delta K_{km}(x, z)$.

Фазовая расстройка и уравнения связанных волн

Для нахождения аналитических решений (12) в данных условиях примем, что пучок \mathbf{U} имеет однородное распределение $U_m(x, z) = 1$ при $0 < x < L$, и найдем пространственную зависимость $\Delta K_{km}(x, z)$ в области АОВ. Для установления вида функций $\Delta K_{km}(x, z)$ ввиду малости μ_n , $\mu_\alpha \ll 1$ входящие в (14) векторные функции $\mathbf{k}_j^k(\mathbf{r}) = k_j n_k(\mathbf{r}) \mathbf{N}_j(\mathbf{r})$ представим первыми двумя членами ряда Тейлора [6-8]

$$\mathbf{k}_j^k(\mathbf{r}) \simeq \mathbf{k}_j^k + \left. \frac{d\mathbf{k}_j^k}{d\mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=0} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_j^{k*} + k_j \mathbf{N}_j^* \left[\left. \frac{dn_k}{d\mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=0} \cdot \mathbf{r} \right] + k_j n_k^* \left[\left. \frac{d\mathbf{N}_j}{d\mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=0} \cdot \mathbf{r} \right], \quad (16)$$

где звездочкой помечены величины, взятые при $\mathbf{r} = 0$; второй член характеризует изменение волнового вектора по модулю, а третий — по направлению; причем, как показано в [4],

$$\frac{dn_k}{d\mathbf{r}} \mathbf{r} = \frac{dn_k}{dT} \text{grad } T \cdot \mathbf{r}, \quad \frac{d\mathbf{N}_j}{d\mathbf{r}} \mathbf{r} = \frac{dn_k}{dT} \frac{|\mathbf{N}_j^* \times \text{grad } T|}{n_k^*} \frac{(\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{r})}{(\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{N}_j^*)} \mathbf{m}_j,$$

\mathbf{m}_j — единичный вектор, лежащий в плоскости дифракции и ортогональный \mathbf{N}_j .

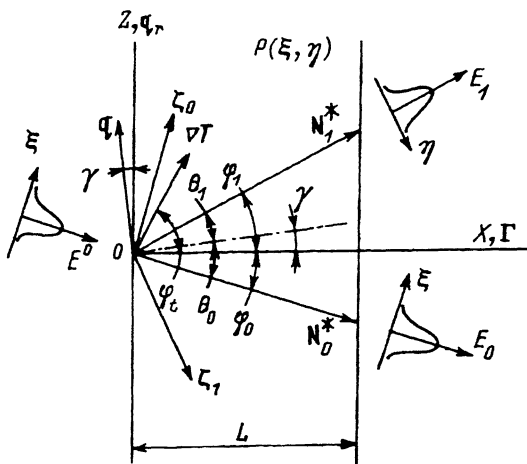


Рис. 2. Ориентация осей ζ_0, ζ_1 ; апертурной координатной системы, а также волновых нормалей N_j, q световых E_j и акустического U пучков в плоскости дифракции XZ и обозначения соответствующих им углов φ_j, θ_j ($j = 0, 1$).

Подставляя (16) в (14) и умножая полученное векторное уравнение скалярно на Γ , найдем с учетом геометрии дифракции рис. 2 искомые зависимости $\Delta K_{km}(x, z)$ в области АОВ

$$\Delta K_{km}(x, z) = \begin{cases} \Delta K + (s + s'')z + (t + t'')x & \text{при } k = +, m = +, \\ \Delta K + (s - s'')z + (t - t'')x & \text{при } k = -, m = -, \\ \Delta K + \rho + (s + s')z + (t + t')x & \text{при } k = +, m = -, \\ \Delta K - \rho + (s - s')z + (t - t')x & \text{при } k = -, m = +. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь $\Delta K = \Delta K(\theta_0) + \Delta K(f)$ — начальная фазовая расстройка, вызванная отклонением угла падения θ_0 от угла Брэгга

$$\theta_B \simeq \frac{\lambda_0 f_0}{2vn}$$

и частоты ультразвука f от $f_0 = \Omega_0/2\pi$, которая определена в [2,4]; $\rho = k_0 \gamma_0 (\cos \varphi_0 + \cos \varphi_1)$ — фазовая расстройка, обусловленная циркулярным двупреломлением.

Параметры s, t в (17) характеризуют влияние ориентации и величины $\text{grad } T$ на фазовые расстройки за счет изменения показателя преломления n ,

$$\begin{aligned} s &= k_0 \frac{dn}{dT} | \text{grad } T | [\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1] \sin \varphi_t, \\ t &= k_0 \frac{dn}{dT} | \text{grad } T | [\{ \cos \varphi_0 - \cos \varphi_1 \} \cos \varphi_t \pm \\ &\quad \pm \text{tg } \varphi_0 \sin(\varphi_t \mp \varphi_0) - \text{tg } \varphi_1 \sin(\varphi_t - \varphi_1)], \end{aligned} \quad (18)$$

где φ_j — углы между N_j^* и Γ , $\varphi_0 = \mp(\theta_0 - \gamma)$, $\varphi_1 = \theta_1 + \gamma$; нижние знаки берутся при $0 < \gamma \leq \theta_0$ (рис. 2), верхние — при $\gamma > \theta_0$; θ_0, θ_1 — углы падения и дифракции пучков E_0 и E_1 берутся в точке $(x = 0, z = 0)$, причем с точностью $4\gamma_0 \sin \theta_0/n$ [2] можно считать $\theta_0 \simeq \theta_1$; φ_t — угол, характеризующий ориентацию $\text{grad } T$ и отсчитываемый от орта Γ (рис. 2).

Влияние ориентации и величины $\text{grad } T$ на фазовые расстройки (17) за счет изменения параметра гирации γ_0 характеризуется для нормальных дифракционных процессов параметрами s'', t'' , которые даются выражениями (18) при замене $s \rightarrow s'', t \rightarrow t'', dn/dT \rightarrow d\gamma_0/dT$, а для аномальных — параметрами s', t'

$$s' = k_0 \frac{d\gamma_0}{dT} |\text{grad } T| [\cos \varphi_0 + \cos \varphi_1] \sin \varphi_t,$$

$$t' = k_0 \frac{d\gamma_0}{dT} |\text{grad } T| [\{\cos \varphi_0 + \cos \varphi_1\} \cos \varphi_t \pm \pm \text{tg } \varphi_0 \sin(\varphi_t \mp \varphi_0) + \text{tg } \varphi_1 \sin(\varphi_t - \varphi_1)],$$
(19)

где $d\gamma_0/dT = k_0 d\alpha_0/dT$, выбор знаков такой же, как и в (18).

Подставляя (17) в (12) и выполнив интегрирование в экспоненциальных членах, сделаем в полученной системе уравнений замену переменных

$$A_1^\pm(x, z) = E_1^\pm(x, z) \exp \left[\mp i \left(\rho \frac{x}{2} + s_- z \frac{x}{2} + t_- \frac{x^2}{4} \right) \right] \exp[i\Delta K(\eta_1 x - \nu_1 z)\nu_0/\nu],$$

$$A_0^\pm(x, z) = E_0^\pm(x, z) \exp \left[\mp i \left(\rho \frac{x}{2} + s_+ z \frac{x}{2} + t_+ \frac{x^2}{4} \right) \right] \exp[i\Delta K(\eta_0 x - \nu_0 z)\nu_1/\nu],$$
(20)

где $s_\pm = s' \pm s'', t_\pm = t' \pm t'', \nu = \eta_1 \nu_0 - \eta_0 \nu_1$, и перейдем из системы координат (x, z) в апертурную координатную систему (ζ_0, ζ_1)

$$\zeta_0 = -\eta_0 x + \nu_0 z, \quad \zeta_1 = \eta_1 x - \nu_1 z,$$
(21)

координаты ζ_j которой, как показано на рис. 2, отсчитываются вдоль осей, перпендикулярных нормалям \mathbf{N}_j^* пучков \mathbf{E}_j . В результате приходим к канонической форме гиперболической системы дифференциальных уравнений, которую представим в векторно-матричном виде

$$\frac{\partial \bar{A}_0}{\partial \zeta_1} = U^*(\zeta_0, \zeta_1) \hat{C} \bar{A}_1 + \hat{P}_0(\zeta_0, \zeta_1) \bar{A}_0,$$

$$\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \zeta_0} = U(\zeta_0, \zeta_1) \hat{C} \bar{A}_0 + \hat{P}_1(\zeta_0, \zeta_1) \bar{A}_1,$$
(22)

где $\bar{A}_j = \bar{A}_j(\zeta_0, \zeta_1) = [A_1^-(\zeta_0, \zeta_1), A_1^+(\zeta_0, \zeta_1)]^T$ — векторные функции, компоненты которых связаны с амплитудными распределениями циркулярных составляющих $E_j^\pm(x, z)$ через преобразования (20), (21); индекс $\{T\}$ означает операцию транспонирования.

Также введены обозначения функций

$$U(\zeta_0, \zeta_1) = U_m(\zeta_0, \zeta_1) \times$$

$$\times \exp \left[-i \left\{ s(\zeta_0 \eta_1 + \zeta_1 \eta_0)(\zeta_0 \nu_1 + \zeta_1 \nu_0) + \frac{t}{2} (\zeta_0 \nu_1 + \zeta_1 \nu_0)^2 \right\} \nu^{-2} \right],$$

$$\hat{P}_j(\zeta_0, \zeta_1) = \hat{P}_j + (\zeta_0 \nu_1 + \zeta_1 \nu_0) \hat{S}_j + (\zeta_0 \eta_1 + \zeta_1 \eta_0) \hat{T}_j$$
(23)

и матриц

$$\begin{aligned} \hat{P}_j &= i\rho \frac{\nu_j}{2\nu} \hat{E}, \quad \hat{S}_j = i(\eta_j s_{\pm} + \nu_j t_{\pm}) \frac{1}{2\nu^2} \hat{E}, \quad \hat{T}_j = is_{\pm} \nu_j \frac{1}{2\nu^2} \hat{E}, \\ \hat{C} &= -i \frac{U_0}{\nu} \begin{vmatrix} C_n^- & C_a^- \\ C_a^+ & C_n^+ \end{vmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (24)$$

где в \hat{S}_j, \hat{T}_j при $j = 0$ берутся s_+, t_+ , а для $j = 1$ — s_-, t_- .

Соответственно граничные условия для решения системы (22) с учетом (15), (20), (21) задаются теперь в координатах ζ_0, ζ_1 на кривой

$$C \left(\zeta_0 = -\zeta_1 \frac{\nu_0}{\nu_1} \right)$$

в следующем виде:

$$\bar{A}_1|_c = 0, \quad \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \zeta_0} \Big|_c = \hat{C} \bar{E} \left(\frac{\zeta_0}{\nu_0} \right) \exp \left[-i \Delta K \zeta_0 \frac{\nu_1}{\nu} \right] \quad (25a)$$

или

$$\bar{A}_0|_c = \bar{E} \left(\frac{\zeta_0}{\nu_0} \right) \exp \left[-i \Delta K \zeta_0 \frac{\nu_1}{\nu} \right], \quad \frac{\partial \bar{A}_0}{\partial \zeta_1} \Big|_c = \left[\hat{P}_0 + \hat{T}_0 \zeta_0 \frac{\nu}{\nu_0} \right] \bar{A}_0|_c, \quad (25b)$$

где $\bar{E} \left(\frac{\zeta_0}{\nu_0} \right) = \left[E_- \left(\frac{\zeta_0}{\nu_0} \right), E_+ \left(\frac{\zeta_0}{\nu_0} \right) \right]^T$ — вектор-столбец граничных условий (15).

Аналитические решения

Для определения светового поля первого дифракционного порядка внутри двумерной области АОВ в произвольной точке P с координатами $(\zeta_0 = \xi, \zeta_1 = \eta)$ разрешим систему (22) относительно \bar{A}_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{A}_1}{\partial \zeta_0 \partial \zeta_1} + \left[-\frac{\partial \ln U}{\partial \zeta_1} + \hat{M}' \right] \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \zeta_0} + \hat{K}' \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \zeta_1} + \\ + \left[\hat{N}' + \hat{N} |U_m|^2 + \frac{\partial \ln U}{\partial \zeta_1} \hat{P}_1 - \frac{\partial \hat{P}_1}{\partial \zeta_1} \right] \bar{A}_1 = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{M}' &= -\hat{C} \hat{P}_0(\zeta_0, \zeta_1) \hat{C}^{-1}; \quad \hat{K}' = -\hat{P}_1(\zeta_0, \zeta_1); \\ \hat{N}' &= \hat{C} \hat{P}_0(\zeta_0, \zeta_1) \hat{C}^{-1} \hat{P}_1(\zeta_0, \zeta_1); \quad \hat{N} = -\hat{C} \hat{C}. \end{aligned} \quad (27)$$

Решение гиперболического уравнения (26) будем искать методом Римана [10]. Воспользовавшись интегральным представлением Римана с учетом граничных условий (25a), запишем общее решение (26)

$$\bar{A}_1(\xi, \eta) = \int_{-\eta \nu_0 / \nu_1}^{\xi} \hat{R}_1 \left(\zeta_0, -\zeta_0 \frac{\nu_1}{\nu_0}; \xi, \eta \right) \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial \zeta_0} \Big|_c d\zeta_0, \quad (28)$$

которое выражается через матричную функцию Римана $\hat{R}_1(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta)$ уравнения (26). Функция $\hat{R}_1(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta)$ для однородного профиля $U_m(\zeta_0, \zeta_1) = 1$ акустического пучка получена в Приложении (см. (П8)) и имеет вид

$$\hat{R}_1(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta) = \exp[(\hat{f}\zeta_1 - \hat{K})(\xi - \zeta_0) + (\hat{a}\zeta_0 - \hat{M})(\eta - \zeta_1) + \hat{e}(\xi^2 - \zeta_0^2)/2 + \hat{b}(\eta^2 - \zeta_1^2)/2 + \hat{H}(\xi - \zeta_0)(\eta - \zeta_1)]\Phi(\hat{D}, 1; \hat{\alpha}(\xi - \zeta_0)(\eta - \zeta_1)), \quad (29)$$

где $\Phi(a, c; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [11],

$$\begin{aligned} \hat{K} &= -\hat{P}_1; & \hat{e} &= \hat{S}_1\nu_1 + \hat{T}_1\eta_1; & \hat{f} &= \hat{S}_1\nu_0 + \hat{T}_1\eta_0; & \hat{M} &= -\hat{C}\hat{P}_0\hat{C}^{-1}; \\ \hat{a} &= -i[s(\eta_1\nu_0 + \eta_0\nu_1) + t\nu_0\nu_1]/\nu^2 + \hat{C}(\hat{S}_0\nu_1 + \hat{T}_0\eta_1)\hat{C}^{-1}; \\ \hat{b} &= -i[2s\eta_0\nu_0 + t\nu_0^2]/\nu^2 + \hat{C}(\hat{S}_0\nu_0 + \hat{T}_0\eta_0)\hat{C}^{-1}; \\ \hat{\alpha} &= -(2\hat{H} - \hat{A}); & \hat{D} &= -\hat{\alpha}^{-1} [\hat{H} + \hat{N} - \hat{f}]; & \hat{A} &= \hat{a} + \hat{f}, \end{aligned} \quad (30)$$

\hat{H} является решением уравнения $H^2 - \hat{A}H + \hat{C} = 0$ при $\hat{C} = \hat{f}\hat{a}$.

Отметим, что здесь и далее под функциями от матриц понимаются функции, определенные на спектрах входящих в них матриц [12].

Световое поле в нулевом дифракционном порядке внутри области АОВ в точке $P(\zeta_0 = \xi, \zeta_1 = \eta)$ найдем, разрешая систему (22) относительно \bar{A}_0 и определяя аналогично Приложению соответствующую полученному уравнению функцию Римана $\hat{R}_0(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta)$. В результате, используя интегральное представление Римана с учетом граничных условий (25б), общее решение системы (22) представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{A}_0(\xi, \eta) &= \hat{R}_0\left(\xi, -\xi\frac{\nu_1}{\nu_0}; \xi, \eta\right)\bar{A}_0(\xi)\Big|_c + \int_{-\eta\nu_0/\nu_1}^{\xi} \left\{ \hat{M}'\left(\zeta_0, -\zeta_0\frac{\nu_1}{\nu_0}\right) - \frac{\partial}{\partial\zeta_0} \ln U^* \times \right. \\ &\times \left. \left(\zeta_0, -\zeta_0\frac{\nu_1}{\nu_0}\right) \right\} \hat{R}_0\left(\zeta_0, -\zeta_0\frac{\nu_1}{\nu_0}; \xi, \eta\right) - \frac{\partial}{\partial\zeta_0} \hat{R}_0\left(\zeta_0, -\zeta_0\frac{\nu_1}{\nu_0}; \xi, \eta\right) \bar{A}_0(\zeta_0)\Big|_c d\zeta_0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\hat{M}'(\zeta_0, \zeta_1) = -\hat{C}\hat{P}_0(\zeta_0, \zeta_1)\hat{C}^{-1}$; функция Римана $\hat{R}_0(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta)$ определяется выражением (29), если в нем сделать циклическую замену $\xi \Leftrightarrow \eta$, $\zeta_0 \Leftrightarrow \zeta_1$, а матричные параметры задать как $\hat{K} = -\hat{P}_0$; $\hat{e} = \hat{S}_0\nu_0 + \hat{T}_0\eta_0$; $\hat{f} = \hat{S}_0\nu_1 + \hat{T}_0\eta_1$; $\hat{M} = -\hat{C}\hat{P}_1\hat{C}^{-1}$; $\hat{a} = i[s(\eta_1\nu_0 + \eta_0\nu_1) + t\nu_0\nu_1]/\nu^2 + \hat{C}(\hat{S}_1\nu_0 + \hat{T}_1\eta_0)\hat{C}^{-1}$; $\hat{b} = i[2s\eta_1\nu_1 + t\nu_1^2]/\nu^2 + \hat{C}(\hat{S}_1\nu_1 + \hat{T}_1\eta_1)\hat{C}^{-1}$. На выходной границе области АОВ ($x = L$) координаты точки $P(\zeta_0 = \xi, \zeta_1 = \eta)$ в (28), (31) связаны уравнениями, вытекающими из (21),

$$\xi = 2\delta - \eta\nu_0/\nu_1, \quad \eta = (2\delta - \xi)\nu_1/\nu_0, \quad (32)$$

где $\delta = L(\eta_1\nu_0 - \eta_0\nu_1)/2\nu_1$.

Используя данную связь в общих решениях (28), (31), определим пространственные распределения векторных амплитуд световых пучков $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ на выходе и в ближней зоне области АОВ и выразим их через одну, соответствующую данному пучку (рис. 2) апертурную координату. С учетом (20) получим следующие выражения для описания сформированных при АОВ пространственных распределений векторных амплитуд $\vec{E}_1(\eta) = [E_1^-(\eta), E_1^+(\eta)]^T$ дифрагированного светового пучка:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\eta) = & \delta \hat{B}_1(\eta) \int_{-1}^{+1} \exp\left[-i\Delta K \frac{L}{2}(1-y)\right] \exp\left[(\hat{F}\eta - \hat{K}')\delta(1+y) + \right. \\ & \left. + (\hat{m}\eta - \hat{M})\delta \frac{\nu_1}{\nu_0}(1-y) + \hat{n}\delta^2(1-y)^2 + \hat{p}\delta^2(1-y^2)\right] \times \\ & \times \Phi\left(\hat{D}, 1; \hat{\alpha}\delta^2 \frac{\nu_1}{\nu_0}(1-y^2)\right) \hat{C} \vec{E}\left(\frac{\delta}{\nu_0}(1-y) - \frac{\eta}{\nu_1}\right) dy, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\hat{F} = \hat{f} - \hat{e} \frac{\nu_0}{\nu_1}; \quad \hat{K}' = \hat{K} - \hat{e}\delta; \quad \hat{m} = -\hat{a} \frac{\nu_0}{\nu_1} + \hat{b};$$

$$\hat{n} = \hat{a} \frac{\nu_1}{\nu_0} - 0.5\hat{b} \frac{\nu_1^2}{\nu_0^2}; \quad \hat{p} = (\hat{H} - \hat{f}) \frac{\nu_1}{\nu_0} + \hat{e}/2;$$

$$\hat{B}_1(\eta) = \exp\left[-\frac{i}{2}(\rho L - \eta s_- L/\nu_1 + s_- L^2 \eta_1/\nu_1 + t_- L^2/2)\hat{E}\right],$$

и прошедшего светового пучка $\vec{E}_0(\xi) = [E_0^-(\xi), E_0^+(\xi)]^T$

$$\begin{aligned} \vec{E}_0(\xi) = & \vec{E}\left(\frac{\xi}{\nu_0}\right) + \delta^2 \frac{\nu_1}{\nu_0} \hat{B}_0(\xi) \int_{-1}^{+1} (1+y) \exp\left[i\Delta K \frac{L}{2}(1-y)\right] \exp\left[(\hat{F}\xi - \hat{K}') \times \right. \\ & \left. \times \delta \frac{\nu_1}{\nu_0}(1+y) + (\hat{m}\xi - \hat{M})\delta(1-y) + \hat{n}\delta^2(1-y)^2 + \hat{p}\delta^2(1-y^2)\right] \hat{\alpha} \hat{D} \times \\ & \times \Phi(\hat{D} + 1, 2; \hat{\alpha}\delta^2 \frac{\nu_1}{\nu_0}(1-y^2)) \vec{E}\left(\frac{\xi}{\nu_0} - (1-y)\frac{\delta}{\nu_0}\right) dy, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\hat{F} = \hat{f} - \hat{e} \frac{\nu_1}{\nu_0}; \quad \hat{K}' = \hat{K} - \hat{e}\delta \frac{\nu_1}{\nu_0}; \quad \hat{m} = -\hat{a} \frac{\nu_1}{\nu_0} + \hat{b};$$

$$\hat{n} = \hat{a} \frac{\nu_1}{\nu_0} - 0.5\hat{b}; \quad \hat{p} = (\hat{H} - \hat{f}) \frac{\nu_1}{\nu_0} + \frac{\hat{e}\nu_1^2}{2\nu_0^2};$$

$$\hat{B}_0(\xi) = \exp\left[-\frac{i}{2}(\rho L + \xi s_+ L/\nu_0 + s_+ L^2 \eta_0/\nu_0 + t_+ L^2/2)\hat{E}\right].$$

Полученные формулы (33), (34) совместно с (9) представляют согласованные решения рассматриваемой дифракционной задачи, которые определяют пространственные профили интенсивностей световых пучков $E_0(\xi)$, $E_1(\eta)$ и распределения поляризационных параметров по их апертурам на выходной границе и в ближней зоне области АОВ при произвольных эффективности и геометриях дифракции с учетом неоднородности и различия фазовых расстройек одновременно протекающих (при $C_n^\pm, C_a^\pm \neq 0$) и связанных между собой четырех дифракционных процессов, два из которых (нормальные АОВ) происходят между световыми пучками с одинаковыми, а два (аномальные АОВ) — с различными циркулярными поляризациями.

Анализ частных случаев АОВ

Рассмотрим АОВ в геометриях дифракции характеризуемых экстремальными значениями АО связи ($C_n \rightarrow \max, C_a = 0$ или $C_a \rightarrow \max, C_n = 0$) [2]. В гиротропных кубических кристаллах класса 23 данные режимы АОВ реализуются при распространении акустических волн вдоль осей симметрии. Так, в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ при дифракции света на продольных акустических волнах с $\mathbf{q} \parallel [111]$ ($\gamma = 7.4^\circ$) в плоскости дифракции $(\bar{1}10)$ имеем $\lambda_1 \simeq \lambda_2$ и, согласно (13), $C_a^\pm \simeq 0$, т.е. существенны нормальные процессы АОВ. В этом случае решения (33), (34) преобразуются к виду

$$\bar{E}_1(\eta) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\nu_0}{\nu_1}} \sum_k^\pm e_k^1 b_n^{k^2} \int_{-1}^{+1} \exp \left[-\frac{i}{2} (\Delta K L - m_k^1 \eta) (1-y) - i p_k^1 (1-y)^2 \right] \times \\ \times \Phi(D_k, 1; -i a_k (1-y^2)) E_k \left(\frac{\delta}{\nu_0} (1-y) - \frac{\eta}{\nu_1} \right) dy, \quad (35)$$

$$\bar{E}_0(\xi) = \sum_k^\pm e_k^1 \left[E_k \left(\frac{\xi}{\nu_0} \right) - \frac{b_n^{k^2}}{4} \int_{-1}^{+1} (1+y) \exp \left[\frac{i}{2} (\Delta K L + m_k^0 \xi) (1-y) - i p_k^0 (1-y)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \Phi(1 - D_k, 2; i a_k (1-y^2)) E_k \left(\frac{\xi}{\nu_0} - (1-y) \frac{\delta}{\nu_0} \right) dy \right], \quad (36)$$

где использованы обозначения ($j = 0, 1$) $m_\pm^j = (s \pm s'')L/\nu_j$; $p_\pm^j = [(t \pm t'')/2 + (s \pm s'')\eta_j/\nu_j]L^2/4$; $D_\pm = -i b_n^{\pm 2}/4 a_\pm$; $a_\pm = [t \pm t'' + (s \pm s'')(\eta_1 \nu_0 + \eta_0 \nu_1)/\nu_0 \nu_1]L^2/4$; $b_n^\pm = U_0 L C_n^\pm / (\nu_0 \nu_1)^{0.5}$, и для поперечной термонеоднородности ($\varphi_t = 90^\circ, \gamma > \theta_0$), согласно (18),

$$s \pm s'' = -(t \pm t'') \operatorname{tg} \gamma = 2k_0 |\operatorname{grad} T| \sin \gamma \sin \theta_0 \left[\frac{dn}{dT} \pm \frac{d\gamma_0}{dT} \right].$$

Учитывая, что в (35), (36) распределения составляющих циркулярных составляющих $E_1^\pm(\eta)$, $E_0^\pm(\xi)$ формально совпадают с решениями, полученными в [7] для неоднородных анизотропных сред, а также малость $\gamma_0/n \ll 1$, можно сделать вывод, что влияние термонеоднородности на изменение пространственных распределений интенсивности световых полей, дифракционную эффективность и частотные характеристики АОВ в рассматриваемом режиме будет аналогично описанному в [7]. Изменение поляризационных параметров ввиду $dn/dT \gg d\gamma_0/dT$ незначительно.

Если же рассматривать дифракцию света на сдвиговых волнах с $\mathbf{q} \parallel [111]$ ($\mathbf{u} \parallel [\bar{1}10]$, $\gamma = 18.4^\circ$) в плоскости $(1\bar{1}0)$, то $\lambda_1 = -\lambda_2$ и, согласно (13), $C_0^\pm = 0$. В этом случае формирование дифракционного поля осуществляется за счет аномальных процессов АОВ и (33), (34) записутся

$$\bar{E}_1(\eta) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\nu_0}{\nu_1}} \sum_k^\pm e_k^1 b_a^k \int_{-1}^{+1} \exp \left[-\frac{i}{2} \{ (\Delta K \mp \rho) L - m_k^1 \eta \} (1-y) - i p_k^1 (1-y)^2 \right] \times \\ \times \Phi(D_k, 1; -i a_k (1-y^2)) E_{-k} \left(\frac{\delta}{\nu_0} (1-y) - \frac{\eta}{\nu_1} \right) dy, \quad (37)$$

$$\bar{E}_0(\xi) = \sum_k^\pm e_k^0 \left[E_k \left(\frac{\xi}{\nu_0} \right) - \frac{b_a^2}{4} \int_{-1}^{+1} (1+y) \exp \left[\frac{i}{2} \{ (\Delta K \pm \rho) L + m_k^0 \xi \} (1-y) + \right. \right. \\ \left. \left. + i p_k^0 (1-y)^2 \right] \Phi(1 - D_k, 2; i a_k (1-y^2)) E_k \left(\frac{\xi}{\nu_0} - (1-y) \frac{\delta}{\nu_0} \right) dy \right], \quad (38)$$

где использованы обозначения ($j = 0, 1$) $m_\pm^j = [s \pm (-1)^j s'] L / \nu_j$; $p_\pm^j = [(t \pm (-1)^j t') / 2 + (s \pm (-1)^j s') \eta_j / \nu_j] L^2 / 4$; $D_\pm = -i b_a^2 / 4 a_\pm$; $a_\pm = [t \mp t' + (s \mp s') (\eta_1 \nu_0 + \eta_0 \nu_1) / \nu_0 \nu_1] L^2 / 4$; $b_a = U_0 L (C_a^+ C_a^- / \nu_0 \nu_1)^{0.5}$; $b_a^\pm = b_a [(n \mp 2\gamma_0) / (n \pm 2\gamma_0)]^{0.5}$, и в соответствии с (18) для $\varphi_t = 90^\circ$, $\gamma > \theta_0$

$$s \pm (-1)^j s' = 2k_0 |\text{grad } T| \left[\frac{dn}{dT} \sin \gamma \sin \theta_0 \pm (-1)^j \frac{d\gamma_0}{dT} \cos \gamma \cos \theta_0 \right],$$

$$t \pm (-1)^j t' = 2k_0 |\text{grad } T| \left[-\frac{dn}{dT} \cos \gamma \sin \theta_0 \pm (-1)^j \frac{d\gamma_0}{dT} \sin \gamma \cos \theta_0 \right].$$

Сравнение (37) с (35) показывает, что в данном случае в отличие от нормального режима амплитудно-фазовые распределения циркулярных компонент $E_1^\pm(\eta)$, во-первых, асимметричны и, во-вторых, смещены относительно друг друга. При этом максимальная эффективность АОВ компонент $E_1^\pm(\eta)$ достигается в различных координатах $\eta_\pm = (4p_\pm^1 \mp \rho L) / m_\pm^1$ и объясняется компенсацией фазовой расстройки ρ за счет искривления траекторий световых волн в неоднородной среде. Следовательно, результирующее распределение интенсивности

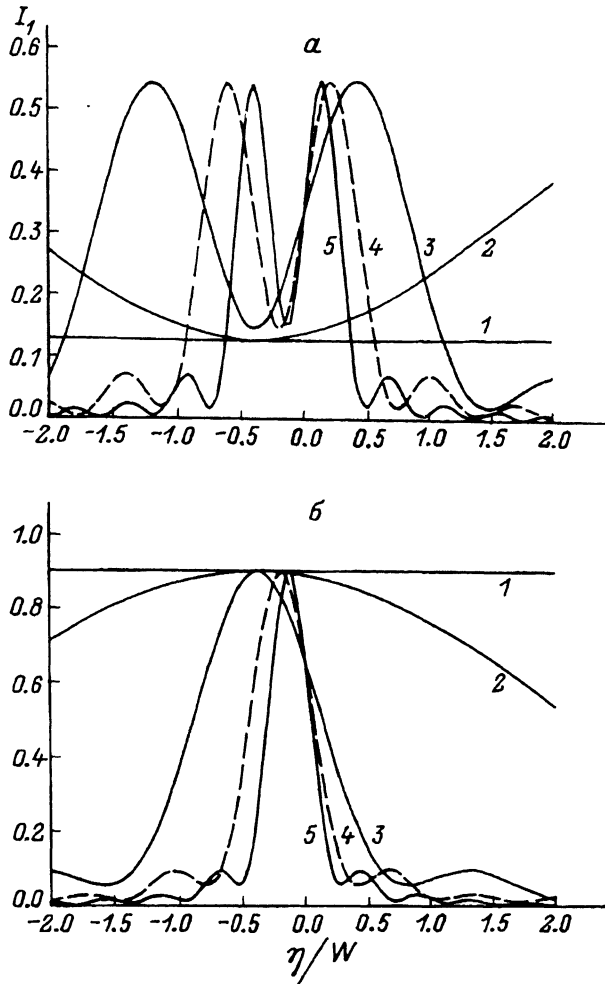


Рис. 3. Распределения интенсивности I_1 по апертурной координате η/W в 1-м дифракционном порядке для сильной $\rho^* = 2$ (а) и слабой $\rho^* = 0.5$ гиротропии (б) при различных параметрах поперечной термонеоднородности $s^* = sWL$ (1 — 0.1, 2 — 1, 3 — 5, 4 — 10, 5 — 15) для аномального АОВ линейно поляризованного ($\psi = 0$) плоского светового пучка $E^0(\xi) = 1$ при АО связи $b_a = \pi/2$.

$I_1(\eta) = |E_1^+(\eta)|^2 + |E_1^-(\eta)|^2$ будет определяться соотношением пространственных профилей циркулярных компонент $I_1^\pm(\eta) = |E_1^\pm(\eta)|^2$ и является качественно различным в двух случаях, которые определяются соотношением величины $\rho^* = \rho L/2$ и $\Delta K_{0.5}^* = \Delta K_{0.5} L$ — полуширины полосы пропускания функции $I_1^\pm(\Delta K) = |E_1^\pm(\Delta K)|^2$.

Для выявления данных различий в явном виде на рис. 3 показаны расчетные зависимости $I_1(\eta)$, вычисленные по (37) при однородном распределении ($E^0(\xi) = 1$ при $|\xi| \leq 2W$) и линейной поляризации (азимут $\psi = 0$) падающего пучка E^0 , причем его расходимость была значительно меньше расходимости акустического пучка (геометриче-

ский параметр [7] $g^* = \delta/W = (L/W) \sin \gamma \simeq 0.08$). Кривые на рис. 3, а соответствуют $\rho^* = 2 > \Delta K_{0.5}^*$ и показывают, что с увеличением параметра поперечной термонеоднородности $s^* = sWL$ пространственный профиль $I_1(\eta)$ характеризуется образованием двухпиковой структуры с максимумами в точках $\eta/W \simeq -L/2W \operatorname{tg} \gamma \pm 2\rho^*/s^*$. Причем ширина каждого пика уменьшается, а их максимумы сближаются. Центр симметрии $I_1(\eta)$ смещается и приближается к $\eta/W = -L/2W \operatorname{tg} \gamma$. Учитывая, что в рассматриваемом случае ($g^* \ll 1$) в подынтегральных выражениях (37) функции $E_{-k}(\dots)$ центрированы относительно $\eta \simeq 0$ и не зависят от переменной интегрирования, можно заключить, что кривые на рис. 3, а фактически являются пространственными передаточными функциями по интенсивности. Отсюда сразу следует, что для неоднородных симметричных профилей $E^0(\xi)$ распределения $I_1(\eta)$ будут являться несимметричными. Условием симметрии, согласно (37), является введение начальной фазовой расстройки $\Delta K^* = -4p_k^1 \simeq Ls^*/2W \operatorname{tg} \gamma$.

Для другого случая $\rho^* = 0.5 < \Delta K_{0.5}^*$ зависимости распределений $I_1(\eta)$ от s^* показаны на рис. 3, б. Видно, что при любых s^* дифракционный максимум является однопиковым. Это объясняется тем, что, несмотря на пространственную локализацию циркулярных компонент $I_1^\pm(\eta)$, величина их разнесения по η на величину $\Delta\eta \simeq 4\rho^*/s^*$ меньше их ширины, т. е. происходит пространственное перекрытие $I_1^+(\eta)$ и $I_1^-(\eta)$.

Таким образом, в отличие от неоднородных анизотропных и изотропных сред [7,8] в гиротропных кубических кристаллах в условиях поперечной термонеоднородности среды и аномального АОВ возможно образование двухпиковой структуры дифракционного максимума в ближней зоне.

Следует также отметить существенные изменения в поляризованной структуре дифракционного поля, обусловленные влиянием термооптической неоднородности. В качестве иллюстрации на рис. 4 показано изменение пространственных распределений интенсивности $I_1(\eta)$, а также азимута $\psi_1(\eta)$ и эллиптичности $p_1(\eta)$ в 1-м дифракционном порядке при вариации параметра $s^* = sWL$ в условиях аномальной дифракции линейно поляризованного пучка E^0 ($\psi = 0^\circ$) с гауссовым профилем $E^0(\xi) = \exp[-(\xi/W)^2]$ и расходимостью, соответствующей $g^* = 0.08$. Расчеты выполнены для значений $\rho^* = 2$, $b_a = \pi/2$, соответствующих рис. 3, б, но с введением в (37) начальной расстройки $\Delta K \simeq s^*/2W \operatorname{tg} \gamma$.

Для произвольной геометрии дифракции, когда C_n и $C_a \neq 0$, решения (33), (34) также могут быть существенно упрощены, если учесть, что во многих ситуациях $n \gg \gamma_0$ и, следовательно,

$$C_n^\pm \simeq C_n = k_0(\lambda_1 + \lambda_2)/8n, \quad C_a^\pm \simeq C_a = k_0(\lambda_1 - \lambda_2)/8n,$$

а также допустить, что $s_\pm WL < 1$, $t_\pm L^2 < 1$, где $2W$ — ширина апертуры падающего пучка. Последние неравенства фактически задают размеры области АОВ и величины температурных градиентов, при которых можно пренебречь влиянием неоднородности параметра ги-

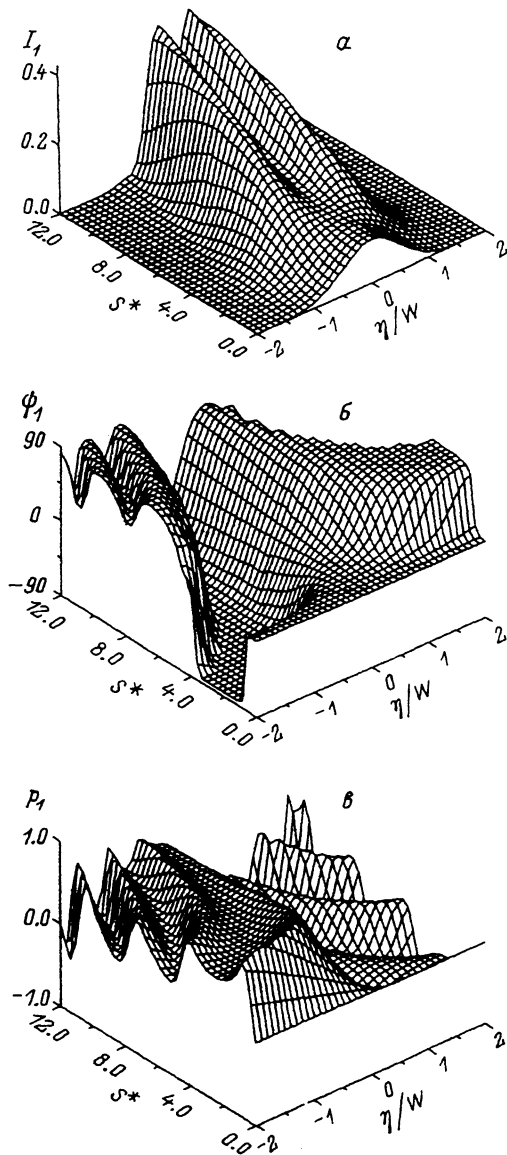


Рис. 4. Распределения интенсивности I_1 (а), азимута ψ_1 (б) и эллиптичности p_1 (в) по апертурной координате η/W в 1-м дифракционном порядке при различных параметрах поперечной термонеоднородности $s^* = sWL$ для аномального АОВ линейно поляризованного ($\psi = 0$) гауссова светового пучка $E^0(\xi) = \exp[-(\xi/W)^2]$ при $\rho^* = 2$, АО связи $b_a = \pi/2$, и начальной расстройке $\Delta K = s/2W \operatorname{tg} \gamma$.

ротропии. В данных условиях после вычисления входящих в (33), (34) функций от матриц на спектрах этих матриц [12] получим следующий результат для $\bar{E}_1(\eta)$

$$\bar{E}_1(\eta) = -i \int_{-1}^{+1} \exp[-i(\Delta K L - m\eta)(1-y)/2 - ip(1-y)^2] \hat{R}_1(y) \bar{E} \left(\frac{\delta(1-y)}{\nu_0} - \frac{\eta}{\nu_1} \right) dy. \quad (39)$$

Здесь с учетом результатов [2] введены обозначения

$$\hat{R}_1(y) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_n R_2 + b_a R_3 & b_a R_2 + b_n R_3 \\ b_n R'_3 + b_a R'_2 & b_a R'_3 + b_n R'_2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 \\ \cos \varphi_1 \end{bmatrix}^{0.5},$$

$$R_2 = a_1 b_1^+ - a_2 b_1^-; R_3 = a_1 b_1^- - a_2 b_1^+; R'_2 = a_1^* b_1^+ - a_2^* b_1^-; R'_3 = a_1^* b_1^- - a_2^* b_1^+;$$

$$b_1^\pm = \frac{1}{2} [\Phi(D_+, 1; -ia(1-y^2)) \pm \Phi(D_-, 1; -ia(1-y^2))];$$

$$a_1 = \cos \left[\frac{\rho L}{2} \left(\frac{b}{M_n - M_a} \right) \right] + i \frac{M_n - y M_a}{b} \sin \left[\frac{\rho L}{2} \left(\frac{b}{M_n - M_a} \right) \right];$$

$$a_2 = i \frac{\sqrt{M_n M_a}}{b} (1-y) \sin \left[\frac{\rho L}{2} \left(\frac{b}{M_n - M_a} \right) \right];$$

$$b = |(M_n - y M_a)^2 - M_n M_a (1-y)^2|^{0.5};$$

$$D_\pm = -i(b_n \pm b_a)^2 / 4a; \quad a = [t + s(\eta_1 \nu_0 + \eta_0 \nu_1) / \nu_1 \nu_0] L^2 / 4;$$

$$b_{n,a} = \frac{U_0 L C_{n,a}}{(\nu_0 \nu_1)^{0.5}} = \frac{\pi}{\lambda_0} \left[\frac{M_{n,a} P_a L}{2H} \right]^{0.5}; \quad m = sL / \nu_1; \quad p = [s\eta_1 / \nu_1 + t/2] L^2 / 4; \quad (40)$$

M_n, M_a — коэффициенты акустооптического качества нормального и аномального дифракционных процессов [2]; P_a — акустическая мощность; H — высота акустического пучка \mathbf{U} вдоль оси Y .

Соответствующее распределение $\bar{E}_0(\xi)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{E}_0(\xi) = \bar{E} \left(\frac{\xi}{\nu_0} \right) - \int_{-1}^{+1} (1+y) \exp[i(\Delta K L + m\xi)(1-y)/2 + ip(1-y)^2] \times \\ \times \hat{R}_0(y) \bar{E} \left(\frac{\xi}{\nu_0} - (1-y) \frac{\delta}{\nu_0} \right) dy, \end{aligned} \quad (41)$$

где с учетом введенных в (40) обозначений для $a, a_1, a_2, D_\pm, b, b_{n,a}$

$$\hat{R}_0(y) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} (b_n^2 + b_a^2) R_2 + 2b_n b_a R_3 & 2b_n b_a R_2 + (b_n^2 + b_a^2) R_3 \\ (b_n^2 + b_a^2) R'_3 + 2b_n b_a R'_2 & 2b_n b_a R'_3 + (b_n^2 + b_a^2) R'_2 \end{vmatrix};$$

$$R_2 = a_1 b_0^+ - a_2 b_0^-; R_3 = a_1 b_0^- - a_2 b_0^+; R'_2 = a_1^* b_0^+ - a_2^* b_0^-; R'_3 = a_1^* b_0^- - a_2^* b_0^+;$$

$$b_0^\pm = \frac{1}{2} \{ \Phi(1 - D_+, 2; ia(1-y^2)) \pm \Phi(1 - D_-, 2; ia(1-y^2)) \};$$

$$m = sL / \nu_0; \quad p = [s\eta_0 / \nu_0 + t/2] L^2 / 4. \quad (42)$$

Сделаем качественный анализ выражений (39), (41). Прежде всего заметим, что при $dn/dT \rightarrow 0$ ($a \rightarrow 0$), а также $P_a \rightarrow \infty$ выражения (39),

(41) асимптотически переходят в решения, полученные для однородных кристаллов [4]. Далее, в отличие от рассмотренных ранее случаев, когда $M_n = 0$ или $M_a = 0$, формирование профилей циркулярных компонент $I_1^+(\eta)$ осуществляется теперь как за счет аномальных, так и нормальных дифракционных процессов. Поэтому можно заключить, что для поперечно-неоднородной среды ($\varphi_t = 90^\circ$) при $\rho^* > \Delta K_{0,5}^*$ и $g^* \ll 1$ изменение профиля $I_1(\eta)$ с ростом s^* будет характеризоваться тенденцией к образованию трехпиковой структуры. Амплитуды пиков определяются соотношением величин АО связи $b_{n,a}$, а центры — координатами $\eta_{\pm} = (4p \mp \rho L)/m$ и $\eta = 4p/m$. С ростом АО связи пички, расширяясь, перекрываются и формируют один максимум, ширина которого приближается к ширине падающего пичка.

Следует также отметить, что для продольно-неоднородной среды ($\varphi_t = 0$), а также симметричных геометрий дифракций ($\gamma = 0$) при произвольном φ_t , согласно (18), всегда $s = 0$, $m = 0$ и решения (39), (41) формально совпадают с соответствующими выражениями, описывающими АОВ в акустическом поле с искривленным волновым фронтом [4]. Поэтому результаты численных расчетов и их анализа работы [4] можно распространить на рассматриваемые случаи АОВ, если в (39), (41) ввести начальную расстройку $\Delta K = -tL/2$, а параметру c^* в [4] сопоставить величину $t^* = |t/2|^{0.5} L$.

Заключение

1. Построенная аналитическая модель двумерной брэгговской дифракции световых пучков на ультразвуке в гиротропных кубических кристаллах, обладающих пространственной неоднородностью оптических и гиротропных свойств, описывает изменения в пространственной и поляризационной структуре дифракционного поля в условиях произвольных эффективности и геометрии дифракции.

2. Аналитические решения дифракционной задачи, полученные в замкнутой форме для линейной модели неоднородности, обусловленной температурными эффектами, являются основой для построения более общей модели АОВ в неоднородных гиротропных кристаллах, пространственные зависимости параметров которых могут быть аппроксимированы кусочно-линейными функциями [7].

3. Пространственная локализация и разделение областей эффективного энергообмена нормальных и аномальных дифракционных процессов при АОВ в поперечно-неоднородной среде обуславливает возможность управления энергетическими, пространственными и поляризационными параметрами дифракционного светового поля в ближней зоне. Например, путем формирования пространственной неоднородности кристалла при помещении его во внешнее неоднородное электрическое поле.

4. Полученные результаты могут быть полезны для разработки АО элементов на основе гиротропных кубических кристаллов с заданными требованиями на изменения рабочих параметров, вызванные неоднородностью оптических свойств кристаллов.

Согласно методу Римана, функция $\hat{R}_1(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta)$ вследствие свойства "взаимности" переменных ζ_0, ζ_1 и параметров ξ, η может находиться как решение уравнения (26), записанного с учетом (27) относительно \hat{R}_1 в параметрах ξ, η [10],

$$\frac{\partial^2 \hat{R}_1}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\frac{\partial \ln U}{\partial \eta} + \hat{M}' \right] \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial \xi} + \hat{K}' \frac{\partial \hat{R}_1}{\partial \eta} + \left[\hat{N}' + \hat{N} |U_m|^2 + \frac{\partial \ln U}{\partial \eta} \hat{P}_1 - \frac{\partial \hat{P}_1}{\partial \eta} \right] \hat{R}_1 = 0 \quad (\text{П1})$$

при дополнительных условиях на характеристиках $\zeta_0 = \xi$ и $\zeta_1 = \eta$ уравнения (26)

$$\hat{R}_1(\zeta_0, \eta; \xi, \eta) = \exp \left[\int_{\xi}^{\zeta_0} \hat{K}'(\lambda, \eta) d\lambda \right] \quad \text{при} \quad \zeta_1 = \eta, \quad (\text{П2})$$

$$\hat{R}_1(\xi, \zeta_1; \xi, \eta) = \exp \left[\int_{\eta}^{\zeta_1} \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln U(\xi, \lambda) + M'(\xi, \lambda) \right) d\lambda \right] \quad \text{при} \quad \zeta_0 = \xi. \quad (\text{П3})$$

Решение (П1) будем искать в виде, удовлетворяющем (П2), (П3), т.е.

$$\hat{R}_1(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta) = \exp \left[\int_{\xi}^{\zeta_0} \hat{K}'(\lambda, \zeta_1) d\lambda + \int_{\eta}^{\zeta_1} \left(M'(\zeta_0, \lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln U(\zeta_0, \lambda) \right) d\lambda \right] \Psi(w), \quad (\text{П4})$$

где $w = (\xi - \zeta_0)(\eta - \zeta_1)$; $\Psi(w)$ — функция, которая при $w = 0$ должна быть $\Psi(0) = 1$.

Тогда из (П1) с учетом (23), (27) и однородности амплитудно-фазового профиля акустического пучка $U_m(\zeta_0, \zeta_1) = 1$ для искомой функции $\Psi(w)$ получаем уравнение

$$w \frac{d^2 \Psi}{dw^2} + [1 - \hat{A}w] \frac{d\Psi}{dw} + [\hat{C} + \hat{D}] \Psi = 0, \quad (\text{П5})$$

где введены обозначения

$$\hat{A} = \hat{a} + \hat{f}; \quad \hat{C} = \hat{f}\hat{a}; \quad \hat{D} = \hat{N} - \hat{f}; \quad \hat{f} = \hat{S}_1\nu_0 + \hat{T}_1\eta_0;$$

$$\hat{a} = -i[s(\eta_1\nu_0 + \eta_0\nu_1) + t\nu_0\nu_1]/\nu^2 + \hat{C}(\hat{S}_0\nu_1 + \hat{T}_0\eta_1)\hat{C}^{-1}. \quad (\text{П6})$$

Для скалярных параметров общее решение (П5), как известно [11], выражается через вырожденные гипергеометрические функции $\Phi(a, c; z)$. Воспользовавшись данным результатом, решение (П5), удовлетворяющее условию $\Psi(0) = 1$, представим в виде

$$\Psi = \exp[\hat{H}w]\Phi(\hat{D}, 1; \hat{\alpha}w), \quad (\text{П7})$$

где $\hat{\alpha} = -(2\hat{H} - \hat{A})$, $\hat{D} = -\hat{\alpha}^{-1}[\hat{H} + \hat{D}]$, \hat{H} является решением матричного уравнения $H^2 - \hat{A}H + \hat{C} = 0$ [12].

Вычисляя с учетом (23), (27) входящие в (П4) интегралы, получим окончательное выражение для функции Римана $\hat{R}_1(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta)$

$$\hat{R}_1(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta) = \exp \left[\left(\hat{f}\zeta_1 - \hat{K} \right) (\xi - \zeta_0) + \left(\hat{a}\zeta_0 - \hat{M} \right) (\eta - \zeta_1) + \hat{e} \left(\xi^2 - \zeta_0^2 \right) / 2 + \right. \\ \left. + \hat{b} \left(\eta^2 - \zeta_1^2 \right) / 2 + \hat{H}(\xi - \zeta_0)(\eta - \zeta_1) \right] \Phi \left(\hat{D}, 1; \hat{\alpha}(\xi - \zeta_0)(\eta - \zeta_1) \right), \quad (\text{П8})$$

где $\Phi \left(\hat{D}, 1; \hat{\alpha}(\xi - \zeta_0)(\eta - \zeta_1) \right)$ — вырожденная гипергеометрическая функция;

$$\hat{K} = -\hat{P}_1; \quad \hat{e} = \hat{S}_1\nu_1 + \hat{T}_1\eta_1; \quad \hat{M} = -\hat{C}\hat{P}_0\hat{C}^{-1}; \\ \hat{b} = -i \left[2s\eta_0\nu_0 + t\nu_0^2 \right] / \nu^2 + \hat{C} \left(\hat{S}_0\nu_0 + \hat{T}_0\eta_0 \right) \hat{C}^{-1}. \quad (\text{П9})$$

Видно, что $\hat{R}_1(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta)$ удовлетворяет условиям (П2), (П3). Непосредственной проверкой также можно убедиться, что $\hat{R}_1(\zeta_0, \zeta_1; \xi, \eta)$ как функция переменных ζ_0, ζ_1 является решением сопряженного с (26) дифференциального уравнения.

Список литературы

- [1] Балакший В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Б. Физические основы акустооптики М., 1985. 280 с.
- [2] Задорин А.С., Шандаров С.М., Шарангович С.Н. Акустические и акустооптические свойства монокристаллов. Томск, 1987. 151 с.
- [3] Шарангович С.Н. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 1. С. 104-110.
- [4] Шарангович С.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. В печати.
- [5] Шарангович С.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. В печати.
- [6] Кушнарев И.Н., Шарангович С.Н. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 1. С. 172-187.
- [7] Кушнарев И.Н., Шарангович С.Н. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 3. С. 24-42.
- [8] Кушнарев И.Н., Шарангович С.Н. // Автометрия. 1994. № 2. 11 с.
- [9] Федоров Ф.И. Теория гиротропии. Минск, 1976. 456 с.
- [10] Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964.
- [11] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1973. 296 с.
- [12] Гантмахер Ф.А. Теория матриц. М., 1988. 552 с.