

01:09;10

©1995 г.

К ВОПРОСУ О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМОДОВОЙ ГЕНЕРАЦИИ В ЛСЭ

В.Л.Братман, А.В.Савилов

Институт прикладной физики РАН,
603600, Нижний Новгород, Россия
(Поступило в Редакцию 22 марта 1994 г.)

Рассмотрена динамика возбуждения ЛСЭ генератора в случае, когда параметр надпороговости слегка превышает критическое значение, при котором возникает многочастотный режим автомодуляции. Для низкодобротных систем показана возможность использования простой двухмодовой модели, найдена аналитическая оценка для зависимости критического значения параметра надпороговости от добротности и описан сценарий возбуждения генератора. Показано, что даже при превышении критического значения дисперсия обратной связи может обеспечить одномодовую генерацию.

Введение

Для ряда приложений лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) важно иметь стабильное одночастотное выходное излучение. В этой связи для ЛСЭ генераторов, как и для других генераторов типа резонансной ЛВВ, существенную роль играет вопрос о характере взаимодействия продольных мод, усиленных на линейной стадии возбуждения генератора. Эта проблема неоднократно исследовалась для генераторов, обладающих как высокодобротными, так и низкодобротными электродинамическими системами [1-8]. В случае высокодобротного резонатора, когда спектр собственных "горячих" продольных мод системы мало отличается от "холодного" спектра и близок к эквидистантному, при большом токе одномодовая генерация оказывается неустойчивой к возбуждению сразу двух сателлитов, равноотстоящих по частоте от основной моды. Эти сателлиты усиливаются за счет двух факторов: благоприятной модуляции электронного потока полем основной моды и распадом основной моды [2,3,5]. Для систем с низкой добротностью в ряде важных случаев спектр "горячих" мод является неэквидистантным, поэтому основная мода устойчива к распадам. Анализируя результаты исследований низкодобротных систем в рамках пространственно-временного подхода [1,4-7], можно убедиться, что неустойчивость одномодовой генерации возникает в них в результате довольно сложного процесса взаимодействия продольных мод. Однако основные черты этого процесса удается понять на простой модели

двух мод. Для электронных токов, несильно превышающих пороговое значение перехода к многочастотной генерации, такая модель дает достаточно точную картину динамики возбуждения генератора.

Уравнения, описывающие нестационарную генерацию в ЛСЭ

Рассмотрим ЛСЭ, где электроны, движущиеся поступательно и осциллирующие в пространственно-периодическом магнитостатическом поле ондулятора, взаимодействуют с синхронной им попутной волной, которая распространяется в свободном пространстве или канализируется волноводом и многократно возвращается в пространство взаимодействия входным и выходным рефлекторами (рис. 1). Вектор-потенциал суммарного электромагнитного поля \mathbf{A} , соответствующий n -му проходу волны между рефлекторами, представим в виде

$$\mathbf{A} = \text{Re} \left\{ \mathbf{A}_n(z, t) \exp(i\omega_0 t - ik_0 z) + \mathbf{A}_u \exp(ih_u z) \right\},$$

где \mathbf{A}_u — амплитуда поля ондулятора; $h_u = 2\pi/\lambda_u$, λ_u — период ондулятора; $\mathbf{A}_n(z, t)$ — амплитуда высокочастотного поля, являющаяся функцией продольной координаты z и времени t ; ω_0 и $k_0 = k(\omega_0)$ — частота и продольное волновое число электромагнитной волны, соответствующие условию точного синхронизма $\omega_0 = h_0 v_{||0}$ между электронным потоком и комбинационной волной, образуемой высокочастотным и ондуляторным полями; $h_0 = k_0 + h_u$ — волновое число комбинационной волны; $v_{||0}$ — начальная поступательная скорость электронов.

При достаточно малой амплитуде волны, когда относительные изменения энергий электронов $w = 1 - \varepsilon/\varepsilon_0$ в процессе взаимодействия с волной малы, генерация в такой системе может быть описана в пренебрежении высокочастотным пространственным зарядом самосогласованной системой уравнений [1,4-6], включающей в себя уравнения движения электронов

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \text{Im} \left\{ a_n \exp(i\theta) \right\}. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = u \quad (2)$$

и уравнение возбуждения волны электронным потоком

$$\frac{\partial a_n}{\partial \tau} + \frac{\partial a_n}{\partial \zeta} = 2i \langle \exp(-i\theta) \rangle_{\theta_0}. \quad (3)$$

Здесь $u = \mu C^{-1} w$, $\zeta = h_0 C z$, $a_n = \kappa \mu C^{-2} A_n$ — нормированные изменение энергии частиц, координата и амплитуда высокочастотного поля;

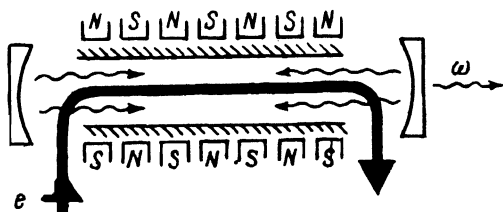


Рис. 1. Модель ЛСЭ генератора.

$\theta = \omega_0 t - h_0 z$ — фаза электрона относительно синхронной комбинационной волны;

$$\tau = \omega_0 \left(t - \frac{z}{v_{\text{гр}}} \right) C \left(\frac{c}{v_{\text{гр}}} - \frac{c}{v_{\parallel}} \right)^{-1}$$

— нормированное время; $v_{\text{гр}}$ — групповая скорость волны; $\kappa = (\epsilon A_u)/(mc^2 \gamma_0^2)$ и $\mu = \gamma_0^{-2}$ — коэффициент связи электрона с комбинационной волной и параметр инерционной группировки частиц [9,10];

$$C = \left[\frac{e I \mu \kappa^2}{m c^3 N \gamma_0} \right]^{1/3}$$

— обобщенный параметр усиления Пирса, I — электронный ток, N — норма волны;

$$\langle (\dots) \rangle_{\theta_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\theta_0.$$

Граничные условия к уравнениям (1), (2) в случае немодулированного электронного пучка, поступающего на вход пространства взаимодействия $\zeta = 0$ без разброса скоростей, имеют вид

$$u(\zeta = 0) = 0, \quad \theta(\zeta = 0) = \theta_0, \quad (4)$$

где начальные фазы частиц θ_0 равномерно распределены в интервале $[0, 2\pi)$. Для волны граничное условие связывает значение амплитуды на входе для $n+1$ -го прохода с ее значением на выходе для n -го прохода

$$a_{n+1}(0, \tau + T) = R a_n(L, \tau), \quad (5)$$

где $L = h_0 l C$ — параметр надпороговости (аналогичный параметру Рейнольдса в гидродинамике), представляющий собой нормированную длину пространства взаимодействия и пропорциональный кубическому корню из тока;

$$T = h_0 l C \left(\frac{1}{v_{\text{гр}}} + \frac{1}{v_{\parallel 0}} \right) \left(\frac{1}{v_{\text{гр}}} + \frac{1}{v_{\parallel}} \right)^{-1}$$

— нормированное время задержки сигнала в цепи обратной связи; R — коэффициент передачи волны с выхода на вход.

Электронный КПД генератора определяется долей кинетической энергии, отданной электронами высокочастотному полю,

$$\eta = \frac{C}{\mu(1 - \gamma_0^{-1})} \hat{\eta}, \quad \hat{\eta} = \langle u(\zeta = 0, \theta_0) \rangle_{\theta_0}. \quad (6)$$

В случае фиксированной частоты высокочастотного сигнала $a_n(\zeta, \tau) = \alpha_n(\zeta) \exp(i\Delta\tau)$, где нормированная расстройка Δ определяет частоту сигнала

$$\Delta(\omega) = \left(\frac{\omega}{h(\omega)v_{\parallel 0}} - 1 \right) C^{-1} \approx \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \left(1 - \frac{v_{\text{гр}}}{v_{\parallel 0}} \right) C^{-1},$$

система уравнений (1)–(4) редуцируется к известным [9,10] уравнениям ЛБВ. При этом стационарное состояние генератора определяется следующим из (5) граничным условием:

$$\Psi(\Delta_j) = \Delta_j T + 2\pi j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots,$$

$$K(\Delta_j) = R^{-1}, \quad (7)$$

где

$$K e^{i\Psi} = \frac{\alpha(L, \Delta_j)}{\alpha(0, \Delta_j)},$$

K и Ψ — усиление и набег фазы волны за один ее проход.

Условие (7) определяет спектр Δ_j собственных “горячих” мод генератора. В случае высокой добротности резонатора ($1-R \ll 1$), когда $K \approx 1$ и Ψ мало, этот спектр близок к “холодному” спектру электродинамической системы, является дискретным и практически эквидистантным. При не слишком малых значениях коэффициента отражения R спектр Δ_j становится неэквидистантным, но остается квазидискретным, что позволяет представлять высокочастотное поле в виде суммы продольных мод

$$a(\zeta, \tau) = \sum_j \alpha(\zeta, \Delta_j) \exp(i\Delta_j \tau).$$

При заданном коэффициенте обратной связи R решение краевой задачи (1)–(5) и, следовательно, характер установившегося режима и КПД генератора определяются значением параметра надпороговости L (время обратной связи T определяет лишь время возбуждения генератора и густоту спектра мод). Генератор возбуждается, когда L превышает определенное стартовое значение L_{st} . Это значение находится из линеаризованной краевой задачи, когда амплитуду волны можно считать малой. В таком приближении продольные моды независимы и для возбуждения любой из них ее линейное усиление за проход (зависящее от расстройки и параметра надпороговости) должно превысить потери

$$K_{lin}(\Delta_j, L) > R^{-1}. \quad (8)$$

Как правило, при $L = L_{st}$ стартовое условие (8) выполняется лишь для одной “основной” моды, имеющей максимальное значение K_{lin} . С превышением параметром L стартового значения условие (8) становится выполненным для многих мод. При малых коэффициентах передачи и соответственно большой надпороговости, когда $e^L \gg 1$, амплитуда каждой из них в линейном режиме увеличивается с длиной практически экспоненциально $\alpha(\zeta, \Delta) \sim \exp(\Gamma(\Delta)\zeta)$, где добавка к волновому числу Γ определяется дисперсионным уравнением ЛСЭ [10]

$$\Gamma^2(\Gamma + i\Delta) = -i. \quad (9)$$

Корень уравнения (9) имеет максимальную реальную часть при $\Delta = 0$. Таким образом, в низкодобротных системах частота основной моды оказывается близкой к частоте точного синхронизма ω_0 .

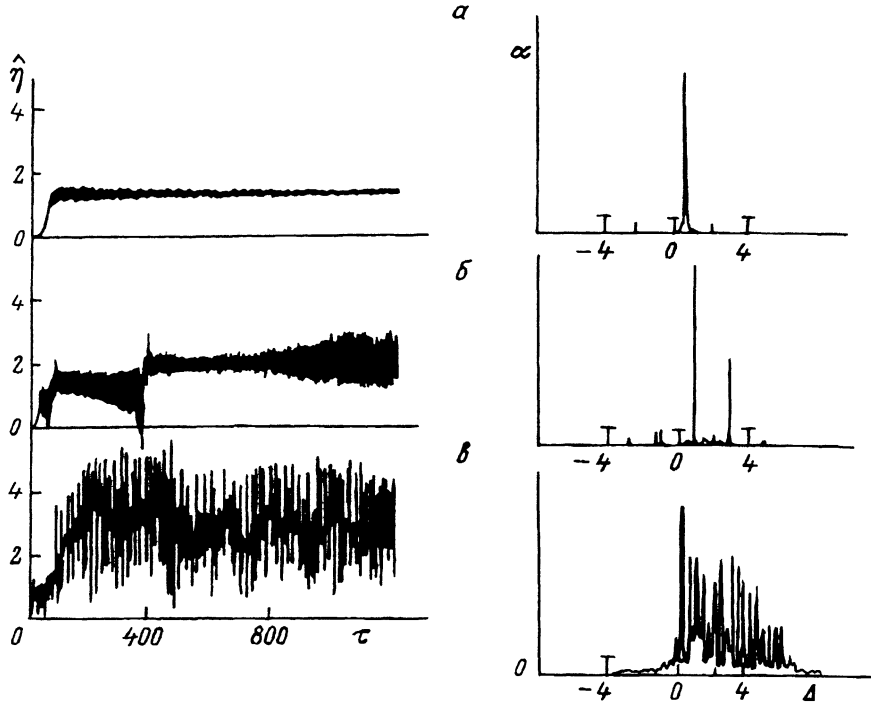


Рис. 2. Зависимости приведенного КПД от времени и соответствующие спектры установившихся режимов для коэффициента передачи $R = 0.5$ и различных значений параметра надпороговости L .

$a - 2.5, б - 3.2, в - 4.5$ (заимствован из [16]).

При небольшом превышении стартового значения L_{st} в процессе конкуренции продольных мод, согласно [6], выживает лишь имеющая максимальное линейное усиление основная мода. Возбуждаясь быстрее остальных и первой достигая нелинейной стадии, эта мода подавляет своих конкурентов. С увеличением L динамика системы усложняется (см. заимствованный из [6] рис. 2, где приведены результаты численного интегрирования уравнений (1)–(5) для случая $R = 0.5$, когда $L_{st} = 2.2$). По мере роста L наряду с основной модой возбуждаются также и “паразитные” продольные моды. При больших L выходное излучение, вырабатываясь в сложном процессе взаимодействия многих продольных мод с электронным пучком и между собой, имеет хаотический характер.

Исследуем вопрос о критическом значении параметра надпороговости $L_{cr}(R)$, при превышении которого установившийся режим перестает быть одночастотным. Как видно из рис. 2, для его решения обязательно рассматривать сложную задачу о колебаниях генератора с участием большого числа мод. Действительно, при небольшом превышении критического значения L_{cr} спектр установившегося режима всегда содержит лишь одну или несколько “паразитных” мод с малыми амплитудами (рис. 2, б). В этом случае при анализе нелинейной стадии возбуждения генератора можно существенно ограничить количество рассматриваемых мод и считать амплитуды паразитных мод малыми.

Будем считать, что в полосу усиления генератора попадает много неэквидистантно расположенных продольных мод. Неэквидистантность мод позволяет исключить исследованный в [2,3] для высокодобротных систем четырехфотонный процесс распада основной моды на два сателлита. В этом случае усиление каждой паразитной моды определяется только полем основной моды и слабо зависит от других паразитных мод. Предположение о густоте спектра избавляет от необходимости находить, решая краевую задачу (1)–(7), точные значения частот мод. Таким образом, при небольшом превышении критического значения L_{cr} и достаточно низкой добротности генератора анализ системы можно свести к анализу двухмодового взаимодействия основной моды с каждой, произвольно от нее отстоящей, паразитной модой.

Приближение двух продольных мод

Взаимодействие основной и одной из паразитных мод с электронным пучком и друг с другом будем описывать следующими уравнениями (ср., например, [11]):

$$\frac{du}{d\zeta} = \chi_1(\zeta) \operatorname{Im} \left\{ \alpha_n \exp(i\varphi + i\Phi) + \tilde{\alpha}_n \exp(i\tilde{\varphi} + i\tilde{\Phi}) \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = u, \quad (11)$$

$$\frac{d\alpha_n}{d\zeta} + i\Delta\alpha_n = 2i\chi_2(\zeta) \langle \exp(-i\varphi - i\Phi) \rangle_{\varphi, \tilde{\varphi}}, \quad (12)$$

$$\frac{d\tilde{\alpha}_n}{d\zeta} + i\tilde{\Delta}\tilde{\alpha}_n = 2i\chi_2(\zeta) \langle \exp(-i\tilde{\varphi} - i\tilde{\Phi}) \rangle_{\varphi, \tilde{\varphi}}, \quad (13)$$

с граничными условиями

$$u(\zeta = 0, \varphi, \tilde{\varphi}) = 0, \quad \Phi(\zeta = 0, \varphi, \tilde{\varphi}) = 0, \quad (14)$$

$$\alpha_{n+1}(0) = R\alpha_n(L), \quad \tilde{\alpha}_{n+1}(0) = R\tilde{\alpha}_n(L). \quad (15)$$

Здесь α и $\tilde{\alpha}$ — нормированные амплитуды основной и паразитной мод; Δ и $\tilde{\Delta}$ — их расстройки; $\varphi, \tilde{\varphi} \in [0, 2\pi)$ — независимые начальные фазы электрона относительно каждой из мод, усреднение производится дважды по каждой из этих фаз; $\Phi(\zeta, \varphi, \tilde{\varphi})$ — изменение фаз электронов.

В правые части уравнений (10), (12), (13) введены функции $\chi_{1,2}(\zeta)$, соответствующие переменной по длине связи пучка с волнами. Полагая, что

$$\chi_1(\zeta) = \frac{L}{2} [\delta(\zeta) + \delta(\zeta - L)], \quad \chi_2(\zeta) = L\delta(\zeta - L),$$

где $\delta(\zeta)$ — дельта-функция, и, следовательно, взаимодействие электронов с полем происходит только на двух коротких участках, расположенных в начале и конце пространства взаимодействия, исследуем

уравнения (10)–(15) аналитически (так называемое клистронное приближение [3,5,11]). Интегрируя систему (10)–(14) последовательно около начала и конца пространства взаимодействия, получим

$$\alpha_n(L) = \alpha_n(0) \exp(-i\Delta L) - 2iLJ_0(\tilde{x}_n)J_1(x_n), \quad (16)$$

$$\tilde{\alpha}_n(L) = \tilde{\alpha}_n(0) \exp(-i\tilde{\Delta}L) - 2iLJ_0(x_n)J_1(\tilde{x}_n). \quad (17)$$

Здесь $x_n = \alpha_n(0)L^2/2$, $\tilde{x}_n = \tilde{\alpha}_n(0)L^2/2$ — приведенные амплитуды мод; J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядков. Подбирая расстройки мод таким образом, чтобы их усиление за проход было максимальным, и используя граничное условие (15), получим два трансцендентных уравнения, симметричных относительно амплитуд мод

$$R^{-1}x_{n+1} - x_n = L^3 \left| J_0(\tilde{x}_n)J_1(x_n) \right|, \quad (18)$$

$$R^{-1}\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n = L^3 \left| J_0(x_n)J_1(\tilde{x}_n) \right|. \quad (19)$$

В этом приближении возбуждение каждой моды в отсутствие конкурента описывается функцией J_1 , а влияние на нее конкурента — функцией J_0 . Предположим, что быстро возбуждавшаяся основная мода находится вблизи своего одномодового стационара, а паразитная мода возбуждается из шумов с малой амплитудой

$$x_{n+1} \approx x_n, \quad \tilde{x}_n \ll 1.$$

Тогда стационарная амплитуда основной моды x^* может быть найдена из уравнения

$$\lambda x^* = |J_1(x^*)|, \quad (20)$$

где $\lambda = (R^{-1} - 1)L^{-3}$ — параметр, включающий в себя как надпороговость, так и коэффициент передачи и определяющий всю динамику системы.

При малом \tilde{x}_n условие возбуждения паразитной моды $\tilde{x}_{n+1} > \tilde{x}_n$ сводится к неравенству

$$2\lambda < |J_0(x^*)|. \quad (21)$$

Как ясно из [6], параметр λ мал по сравнению с единицей (например, для рис. 2,б $\lambda \simeq 0.03$). Поэтому решение уравнения (20) x^* лежит вблизи первого корня ν_1 функции Бесселя J_1 (рис. 3). Для оценок можно аппроксимировать J_0 и J_1 вблизи ν_1 линейными функциями

$$|J_0(x)| \approx b_0 \left(1 - \frac{\nu_1 - x}{\nu_1 - \nu_0} \right), \quad J_1(x) \approx b_1 \left(1 - \frac{x}{\nu_1} \right), \quad (22)$$

где ν_0 — первый корень функции J_0 , $b_0 \approx -J_0(\nu_1) \approx 0.4$, $b_1 \approx 1.1$.

Тогда для амплитуды основной моды имеем

$$x^* \approx \nu_1 \left(1 + \frac{\lambda \nu_1}{b_1} \right)^{-1}, \quad (23)$$

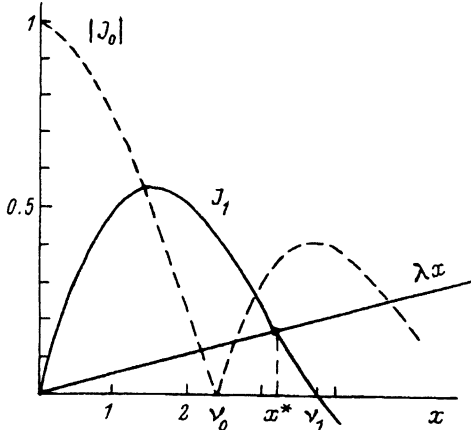


Рис. 3. Нахождение стационарной амплитуды основной моды x^* и условия возбуждения паразитной моды в рамках клистронной модели.

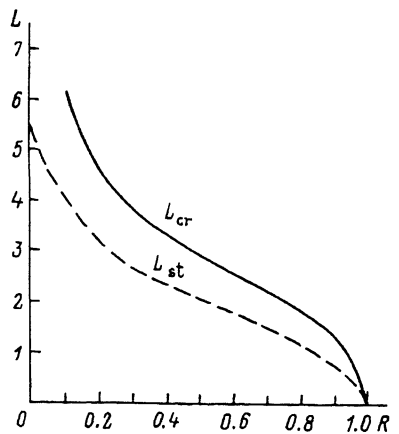


Рис. 4. Стартовое L_{st} (заимствовано из [6]) и критическое L_{cr} значение параметра надпороговости в зависимости от коэффициента передачи R .

а из (21) получаем условие возбуждения паразитной моды $\lambda < 0.04$, дающее следующую оценку для критического значения параметра надпороговости:

$$L_{cr} \approx 2.9(R^{-1} - 1)^{1/3} \quad (24)$$

Величина L_{cr} , как и стартовое значение L_{st} , монотонно уменьшается с ростом коэффициента передачи R (рис. 4), оставаясь всегда больше стартового значения. Это означает, что одномодовый режим возможен при любом R . Отметим, что, согласно численным решениям нестационарной краевой задачи (1)–(5), приближенная формула (24) оказывается достаточно точной, что свидетельствует о правильности двухмодовой модели и о применимости клистронного приближения. С помощью этого приближения можно детально понять механизм возбуждения паразитных продольных мод при больших L и перехода от одномодового состояния к многомодовому. Как ясно из (23), приведенная амплитуда одномодового стационара x^* растет с увеличением L , приближаясь к соответствующему максимуму функции $|J_0|$ значению ν_1 . При этом начиная с некоторой амплитуды основной моды растет и величина $|J_0(x^*)|$, что соответствует ослаблению подавления этой модой конкурентов. Таким образом, при большой амплитуде одномодовый стационар неустойчив. Это похоже на поведение нелинейного осциллятора, подвергающегося воздействию внешней монохроматической силы, когда при достаточно большой амплитуде происходит перекрытие резонансов, приводящее в конце концов к стохастичности колебаний [12,13].

Клистронное приближение позволяет сделать еще один важный вывод о динамике системы. Предположим, что вначале возбуждается не одна, а одновременно две быстрорастущие моды, имеющие близкие частоты и коэффициенты усиления в линейном режиме. Подчеркнем, что при нашей постановке задачи суммарное поле этих мод неэквивалентно полю одной моды, поскольку начальные фазы электронов от-

носителем каждой из этих мод являются независимыми. Рассмотрим состояние, наступившее в результате одновременного достижения этими модами нелинейной стадии. Предполагая близость их амплитуд, получим уравнение для величины этой амплитуды x^* и уравнение возбуждения третьей, медленно растущей моды

$$\lambda x^* = \left| J_0(x^*) J_1(x^*) \right|, \quad (25)$$

$$2\lambda < \left| J_0(x^*) \right|^2. \quad (26)$$

Будем по-прежнему считать, что параметр λ мал. Тогда, сравнивая эти уравнения с (20) и (21), легко заметить, что механизм достижения двухмодового состояния отличен от одномодового случая: ему соответствует подавление быстрорастущими модами друг друга. При этом величина x^* оказывается вблизи первого корня ν_0 функции Бесселя J_0 , а не вблизи ν_1 . Как видно из (26), в этом случае возбуждение паразитной моды существенно затрудняется. Таким образом, состояние с генерацией двух быстрорастущих мод более устойчиво по отношению к возбуждению третьей, паразитной моды, чем одномодовый стационар. Это означает, что несколько основных мод подавляют конкурентов сильнее, чем одна. Однако, как показывает анализ, такое состояние неустойчиво по отношению к подавлению одной из них второй модой.

Динамика возбуждения ЛСЭ при малом превышении критического значения надпороговости

Учитывая полученные результаты и анализируя зависимость мощности выходного излучения от времени (рис. 2, б), можно выделить пять стадий процесса возбуждения (рис. 5).

1 — ливневая стадия. Происходит усиление из шумов широкого спектра всех продольных мод, для которых линейное усиление превышает потери.

2 — подавление группой мод с наибольшими инкрементами медленно растущих мод. Несколько быстрорастущих мод, частоты которых близки к частоте точного синхронизма с пучком ω_0 , выходят в нелинейный режим и, согласно (25), (26), подавляют медленно растущие моды.

3 — конкуренция быстрорастущих мод. В начале третьей стадии остаются лишь моды с близкими к ω_0 частотами. Но это состояние неустойчиво и одна из мод подавляет остальные.

4 — возбуждение паразитной моды. В начале четвертой стадии генератор находится вблизи одномодового режима моды, имеющей максимальное линейное усиление. При превышении критической надпороговости L_{cr} этот режим неустойчив по отношению к возбуждению паразитных мод с достаточно сильно отличающимися от ω_0 частотами. Возбуждается паразитная мода с наибольшим усилением, которая была подавлена на стадии 2 группой быстрорастущих мод (единственная выжившая основная мода не в состоянии препятствовать ее возбуждению).

5 — установление двухмодового режима. Последняя стадия представляет собой установившийся режим с генерацией двух продольных мод.

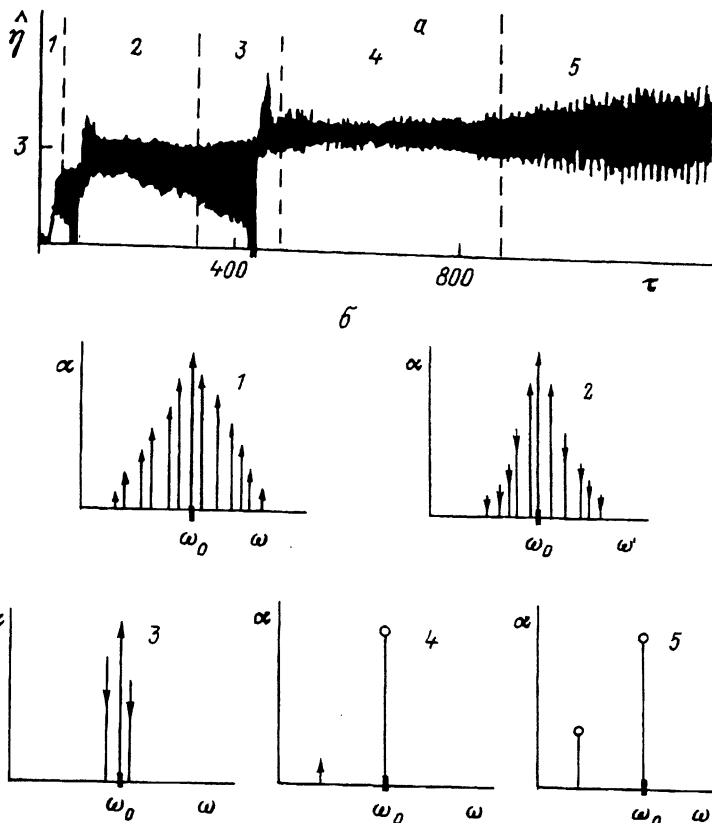


Рис. 5. Возбуждение ЛСЭ генератора при малом превышении критической надпороговости.

$R = 0.5$, $L = 3.2$; a — фрагмент рис. 2 в увеличенном масштабе, b — схема текущих спектров в процессе конкуренции продольных мод.

Приведенный сценарий имеет место лишь при небольшом превышении параметром L критического значения. В этом случае спектр установившегося режима определяется поведением системы на стадии 4, т.е. устойчивостью стационара моды точного синхронизма по отношению к возбуждению паразитной моды. Двухмодовая модель, применимая начиная с этой стадии, может использоваться для анализа установившегося режима генератора: с помощью уравнений (10)–(15) решается вопрос об устойчивости одномодового стационара, находится частота паразитной моды и амплитуды мод в установившемся режиме.

Влияние дисперсии обратной связи на динамику системы

Как следует из приведенных выше соображений, при небольшом превышении параметром надпороговости L критического значения для анализа спектра установившегося режима генератора с низкодобротной электродинамической системой вместо достаточно сложных нестационарных уравнений (1)–(5) можно использовать более простые уравнения двухмодового приближения (10)–(15). Продемонстрируем это на

примере задачи о дисперсии обратной связи, когда коэффициент передачи является функцией частоты $R = R(\omega)$, существенно меняющейся в полосе усиления. В этом случае динамика возбуждения генератора может существенно упроститься. Так, для примера, приведенного на рис. 2,б, где в установившемся режиме в отсутствие дисперсии обратной связи возбуждается лишь одна паразитная мода с расстройкой $\tilde{\Delta}$, при наличии дисперсии

$$R(\Delta) = \begin{cases} R_0, & \Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2, \\ 0, & \Delta < \Delta_1, \Delta > \Delta_2, \end{cases}$$

которая не обеспечивает обратную связь для этой моды ($\tilde{\Delta} < \Delta_1$ или $\tilde{\Delta} > \Delta_2$), установившийся режим может оказаться одномодовым, т.е. не возбуждается никакая другая паразитная мода.

Граничное условие для поля сводится в этом случае к виду

$$\alpha_{n+1}(0) = R(\Delta)\alpha_n(L), \quad \tilde{\alpha}_{n+1}(0) = R(\tilde{\Delta})\tilde{\alpha}_n(L). \quad (27)$$

Предположим, что основной по-прежнему является мода, имеющая максимальную скорость роста в линейном режиме, и для нее обеспечена обратная связь. Рассмотрим усиление паразитной моды

$$G(\tilde{\Delta}) = \left| \frac{\tilde{\alpha}(L)}{\tilde{\alpha}(0)} \right|; \quad \tilde{\alpha} \ll \alpha; \quad \alpha(L) = R_0^{-1}\alpha(0) \quad (28)$$

в режиме, когда ее амплитуда $\tilde{\alpha}$ мала, а основная мода α находится в своем одномодовом стационаре. Покажем, что одномодовый стационар основной моды устойчив и, следовательно, установившийся режим будет одномодовым, если для всех паразитных мод, частоты которых лежат в полосе частот обратной связи $[\Delta_1, \Delta_2]$, усиление меньше потерь

$$G(\tilde{\Delta}) < R_0^{-1}. \quad (29)$$

Представим входящее в систему уравнений (10)–(14) изменение фазы электрона Φ в виде суммы изменения фазы в одномодовом стационаре моды α и малого возмущения, вносимого паразитной модой

$$\Phi(\zeta, \varphi, \tilde{\varphi}) \approx \Phi_0(\zeta, \varphi) + \Phi_1(\zeta, \varphi, \tilde{\varphi}).$$

Для фазы Φ_0 и амплитуды основной моды α справедливы одномодовые стационарные уравнения

$$\frac{d^2 \Phi_0}{d\zeta^2} = \text{Im} \left\{ \alpha \exp(i\varphi + i\Phi_0) \right\}, \quad (30)$$

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} + i\Delta\alpha_n = 2i \langle \exp(-i\varphi - i\Phi_0) \rangle_{\varphi}, \quad (31)$$

$$\Phi_0(0) = \Phi'_0(0) = 0, \quad \alpha(L) = R_0^{-1}\alpha(0). \quad (32)$$

Для возмущения Φ_1 и поля паразитной моды $\tilde{\alpha}$ имеем

$$\frac{d^2 \Phi_1}{d\zeta^2} = \text{Im} \left\{ \left(i\Phi_1 \alpha + \tilde{\alpha} \right) \exp \left(i\tilde{\varphi} + i\Phi_0 \right) + \alpha' \exp \left(i\varphi + i\Phi_0 \right) \right\}, \quad (33)$$

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{d\zeta} + i\tilde{\Delta}\tilde{\alpha} = 2 \left\langle \exp(-i\Phi_0) \langle \Phi_1 \exp(-i\tilde{\varphi}) \rangle_{\tilde{\varphi}} \right\rangle_{\varphi}, \quad (34)$$

где α' — возмущение основной моды, вносимое паразитным полем. Тогда, введя следующие величины:

$$f(\zeta, \varphi) = \tilde{\alpha}^{-1}(0) \langle \Phi_1 \exp(-i\tilde{\varphi}) \rangle_{\tilde{\varphi}}, \quad \tilde{g}(\zeta) = \frac{\tilde{\alpha}(\zeta)}{\tilde{\alpha}(0)},$$

получим систему уравнений, описывающую текущее усиление паразитной моды \tilde{g} ,

$$\frac{d^2 f}{d\zeta^2} = \frac{\tilde{g}}{2i} \exp(i\Phi_0) + f \text{Re} \left\{ \alpha \exp(i\varphi + i\Phi_0) \right\}, \quad (35)$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\zeta} + i\tilde{\Delta}\tilde{g} = 2 \langle f \exp(-i\Phi_0) \rangle_{\varphi} \quad (36)$$

с начальными условиями

$$\tilde{g}(0) = 1, \quad f(0, \varphi) = f'(0, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (37)$$

Системы уравнений (30)–(32), (35)–(37) значительно проще системы (10)–(15), поскольку в ней произведено усреднение по фазе $\tilde{\varphi}$. Численное интегрирование этой системы дает линейное усиление паразитной моды в режиме одномодового стационара основной моды $G(\tilde{\Delta}) = |\tilde{g}(L)|$ как функцию расстройки паразитной моды ($\tilde{\Delta}$).

Для иллюстрации вновь рассмотрим приведенный на рис. 2 пример $R_0 = 0.5$. Как и следовало ожидать, при $L < L_{\text{cr}}$ условие (29) выполняется для всех паразитных мод (рис. 6,а). Однако с увеличением длины L появляются моды, для которых $G(\tilde{\Delta}) > R_0^{-1}$. Как видно из рис. 6,б, при небольшом превышении параметром L определяющегося из (24) порогового значения L_{cr} эти моды лежат в достаточно узкой полосе частот, которые довольно сильно отличаются от частоты основной моды. При этом, как можно убедиться из сравнения этого рисунка с рис. 2,б, расстройка моды с максимальным усилением G примерно соответствует расстройке паразитной моды двухмодового режима. Таким образом, при соответствующей частотной полосе обратной связи, когда $\Delta_2 < 2$, установившийся режим будет одномодовым. С увеличением параметра L (рис. 6,в) эта полоса уменьшается, однако обеспечение одномодовой генерации остается по-прежнему возможным.

Хотя приведенная теория справедлива лишь для достаточно низкодобротных систем и не учитывает процесс четырехфотонного взаимодействия, который приводит к возбуждению основной модой сразу двух равноотстоящих от нее сателлитов [2,3], в ее рамках можно

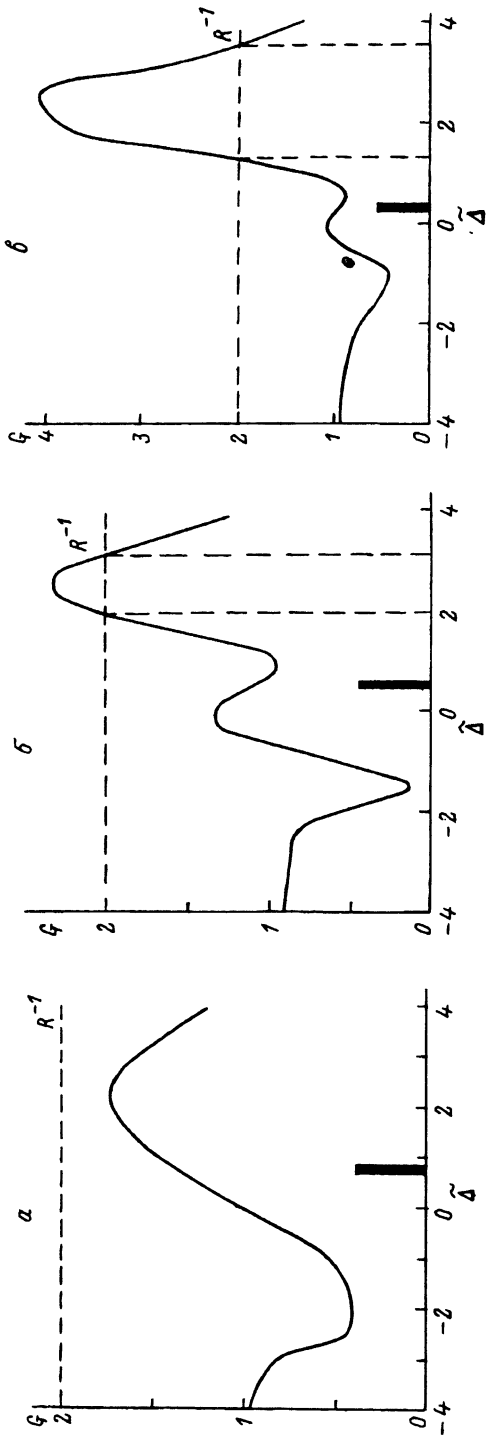


Рис. 6. Низкодобротная система ($R = 0.5$).

Усиление паразитных мод на фоне стационарной генерации основной моды G в зависимости от их расстройк $\tilde{\Delta}$ (вертикальная черта — расстройка основной моды); a — $L = 2.5$, $б$ — 3.2 , $в$ — 4.5 .

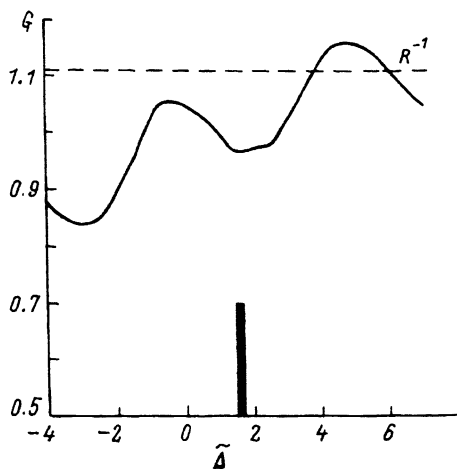


Рис. 7. Высокодобротная система ($R = 0.9$).

Усиление паразитных мод на фоне стационарной генерации основной моды G в зависимости от их расстройек Δ (вертикальная черта — расстройка основной моды) при небольшом превышении критической надпороговости ($L = 1.6$).

проследить переход к высокой добротности. Например, как видно из рис. 6, даже при низкой добротности генератора основная мода усиливает ($G > 1$) сразу две группы мод, расположенных как справа, так и слева от нее. Однако поскольку расстройка основной моды близка к нулю, то левая группа мод оказывается в области отрицательных расстроек и поэтому взаимодействует с электронным пучком значительно менее эффективно, чем правая. В результате усиление этих мод оказывается недостаточным для компенсации потерь ($G < R^{-1}$). С увеличением добротности расстройка основной моды сдвигается в сторону положительных значений, при этом разница между усилениями левых и правых паразитных мод и между их расстояниями до основной моды заметно сокращается (рис. 7).

Заключение

При надпороговости, несильно превышающей критическое значение, динамика возбуждения ЛСЭ генератора довольно проста и достаточно хорошо описывается приближением двух мод. При этом тип установившегося режима (спектр выходного излучения) определяется устойчивостью одномодового режима основной моды, имеющей максимальное линейное усиление, по отношению к возбуждению второй продольной моды. Это позволяет при анализе системы использовать гораздо более простые по сравнению с полными нестационарными уравнениями пространственно-временного подхода уравнения двухмодового приближения. Анализ показывает, что довольно широкая частотная полоса обратной связи (порядка полосы усиления) может обеспечить одномодовый режим генерации даже при превышении критической надпороговости.

Авторы признательны М.Дж.Ван-дер-Вилу, А.А.Варфоломееву, А.Г.А.Верховену, М.Каплану, А.В.Тулупову, В.Н.Урбанусу за полезные дискуссии, а также Н.С.Гинзбургу, Г.Г.Ленисову и А.С.Сергееву за помощь в работе.

- [1] Bogomolov Ya.L., Bratman V.L., Ginzburg N.S. et al. // Opt. Commun. 1981. Vol. 36. N 3. P. 209-212.
- [2] Ginzburg N.S., Petelin M.I., Shapiro M.A. // Proc. of 10th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics. Moscow, 1981. Vol. 1. P. M2.
- [3] Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1981. Вып. 2. С. 101-144.
- [4] Ginzburg N.S., Petelin M.I. // Int. J. Electronics. 1985. Vol. 59. N 3. P. 291-314.
- [5] Antonsen T.M., Jr., Levush B. // Phys. Fluids B. 1989. Vol. 1. N 5. P. 1097-1108.
- [6] Гинзбург Н.С., Сергеев А.С. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 6. С. 133-140.
- [7] Блюг Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г. и др. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1. № 1-2. С. 34-49.
- [8] Stanford E.R., Antonsen T.M., Jr. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1991. Vol. A304. P. 659-662.
- [9] Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Ковалев Н.Ф. и др. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1979. Вып. 1. С. 249-274.
- [10] Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И., Сморгонский А.В. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, 1979. Вып. 1. С. 217-248.
- [11] Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Новожилова Ю.В., Сергеев А.С. // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11. Вып. 8. С. 504-509.
- [12] Davidson R.C., McMullin W.A. // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 29. N 2. P. 791-798.
- [13] Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.

