1988 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 30, в. 3
1988 SOLID STATE PHYSICS Vol. 30, № 3

УДК 537.311

О ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВАХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛЕНОК С МАЛОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ ВКЛЮЧЕНИЙ

В. А. Кашин

В квадратичном по концентрации включений приближении вычислен эффективный тензор проводимости двумерных систем в поперечном магнитном поле H. Показано, что в сильных магнитных полях ($H \to \infty$) в составляющих эффективного тензора проводимости σ_{xe} и σ_{ae} появляется неаналитическая зависимость от магнитного поля. Обсуждены гальваномагнитные свойства системы с диэлектрическими и с идеально-проводящими включениями.

1. Изучение гальваномагнитных свойств неоднородных пленок представляет значительный интерес. В [1] для двумерных двухкомпонентных систем в поперечном магнитном поле при критической концентрации $p=1/2$ найдено точное выражение для эффективного тензора проводимости $\hat{\sigma}_e$. В [2-4] представлена последовательная схема вычисления эффективных характеристик двухкомпонентных сред при произвольном соотношении между свойствами компонент. В [4] в c^2-приближении было получено общее выражение для эффективной проводимости σ_e при $\mathbf{H}=0$. Квадратичная по концентрации c поправка выражена через тензор поляризуемости $\hat{\Lambda}$ пары включений во внешнем электрическом поле. Для двумерной системы с включениями круговой формы этот тензор может быть найден точно, что позволяет в c^2-приближении вычислить эффективную проводимость σ_e в явном виде [4].

В настоящей работе метод работы [4] применен для вычисления в c^2-приближении эффективного тензора проводимости $\hat{\sigma}_e$ двумерных систем в поперечном магнитном поле H. Получено соответствующее общее выражение для тензора $\hat{\sigma}_e$ (см. формулу (2) в тексте). Для системы с включениями круговой формы вычислен тензор поляризуемости, что позволяет найти $\hat{\sigma}_e$ в явном виде. Проведено сравнение с результатами, полученными в [2, 3]. Рассмотрен случай сильных магнитных полей ($H \to \infty$). При этом в составляющих эффективного тензора проводимости σ_{xe} и σ_{ae} появляется неаналитическая зависимость от магнитного поля. Обсуждены также гальваномагнитные свойства системы с диэлектрическими ($\hat{\sigma}_2=0$) и с идеально проводящими включениями ($\hat{\sigma}_2 \to \infty$).

2. Рассмотрим неоднородную изотропную двумерную систему в поперечном магнитном поле $\mathbf{H}$ с тензором проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$ вида

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_a \\ -\sigma_a & \sigma_x \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $\sigma_a(\mathbf{r})$ — холловская составляющая тензора $\hat{\sigma}'(\mathbf{r})$.

Метод работы [4] может быть обобщен и на случай $\mathbf{H} \neq 0$. В результате для составляющих эффективного тензора проводимости $\hat{\sigma}_e$ получаем

$$(\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_1)_{\alpha\beta} = \sigma_{x1} \left\{ 4\pi N \overline{\Lambda^{(1)}_{\alpha\beta}} + 2\pi N^2 \left[\overline{\overline{\frac{1}{N} \left(\Lambda^{(2)}_{\alpha\beta} - 2\Lambda^{(1)}_{\alpha\beta}\right)}} + 4\pi \overline{\Lambda^{(1)}_{\alpha\gamma} \Lambda^{(1)}_{\gamma\beta}} \right] \right\}. \tag{2}$$

Здесь N — размерная концентрация включений.

В линейном по N приближении (2) совпадает с выражением, полученным в [5].[1] Здесь одной чертой обозначено усреднение по углам [5]

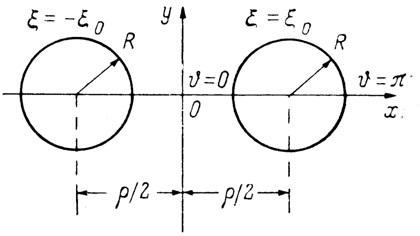
$$\bar{\Lambda}_{xx}=\bar{\Lambda}_{yy}=\frac{1}{2}(\Lambda_{xx}+\Lambda_{yy})=\frac{1}{2}\,Sp\,\hat{\Lambda},\quad \bar{\Lambda}_{xy}=-\bar{\Lambda}_{yx}=\frac{1}{2}(\Lambda_{xy}-\Lambda_{yx}). \tag{3}$$

Двойная черта, как и в [4], обозначает как усреднение по углам, так и по расстояниям между включениями

$$\overline{\overline{\frac{1}{N}(\Lambda^{(2)}_{\alpha\beta}-2\Lambda^{(1)}_{\alpha\beta})}}=\int\limits_{\rho\geqslant\rho_0}(\overline{\Lambda^{(2)}_{\alpha\beta}}-2\overline{\Lambda^{(1)}_{\alpha\beta}})\,d\rho, \tag{4}$$

где ρ_0 — минимальное расстояние, на которое могут сблизиться два включения (так, $\rho_0=2R$ для круговых включений радиуса R).

Как следует из формул (2)—(4), для расчета квадратичной по концентрации поправки необходимо найти тензор поляризуемости $\hat{\Lambda}^{(2)}$ пары включений в поперечном магнитном поле. Задача об определении тензора поляризуемости двух кругов может быть аналогично [4] решена точно в биполярной системе координат. Для этого выберем координатную систему (x, y), согласно рисунку. Биполярные координаты (ξ, ϑ) вводятся с помощью соотношений [6]



$$x=\frac{a\,\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi+\cos\vartheta},\quad y=\frac{a\sin\vartheta}{\mathrm{ch}\,\xi+\cos\vartheta}. \tag{5}$$

Линия $\xi=\mathrm{const}$ есть окружность радиуса $a/\mathrm{sh}\,\xi$ с центром в точке $x=a\,\mathrm{cth}\,\xi$, $y=0$. Следовательно, границам включений отвечают $\xi=\xi_0$ (для правого круга) и $\xi=-\xi_0$ (для левого), причем

$$\xi_0=\ln\{[\rho+(\rho^2-4R^2)^{1/2}]/2R\};\quad a=\frac{1}{2}(\rho^2-4R^2)^{1/2}. \tag{6}$$

Пусть вдали от включений (в матрице с тензором проводимости $\hat{\sigma}_1$) задано однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, потенциал которого есть $\varphi_0=-\mathbf{E}_0\mathbf{r}=-E_0(x\cos\alpha+y\sin\alpha)$. Потенциал вне включений ($|\xi|\leqslant\xi_0$, где ξ_0 определено согласно (6)) ищем в виде

$$\varphi_e=\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,\mathrm{ch}\,n\xi\sin n\vartheta+b_n\,\mathrm{sh}\,n\xi\cos n\vartheta),\quad |\xi|\leqslant\xi_0; \tag{7}$$

внутри правого включения

$$\varphi_i^{(1)}=a_0^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(1)}e^{-n\xi}\sin n\vartheta+b_n^{(1)}e^{-n\xi}\cos n\vartheta),\quad \xi\geqslant\xi_0; \tag{8}$$

внутри левого включения

$$\varphi_i^{(2)}=a_0^{(2)}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(2)}e^{n\xi}\sin n\vartheta+b_n^{(2)}e^{n\xi}\cos n\vartheta),\quad \xi\leqslant-\xi_0. \tag{9}$$

Граничные условия на правом включении обычные — непрерывность потенциала и нормальной составляющей плотности тока

$$\xi=\xi_0:\varphi_e=\varphi_i^{(1)},\quad \sigma_{x1}\frac{\partial\varphi_e}{\partial\xi}+\sigma_{a1}\frac{\partial\varphi_e}{\partial\vartheta}=\sigma_{x2}\frac{\partial\varphi_i^{(1)}}{\partial\xi}+\sigma_{a2}\frac{\partial\varphi_i^{(1)}}{\partial\vartheta}, \tag{10}$$

[1] При сравнении нужно учесть, что из-за опечатки в формуле (39) работы [5] выпал множитель σ_{x1} перед $\langle\hat{A}\rangle$. Кроме этого, определенный здесь дипольный момент $\mathbf{p}$ вдвое меньше, чем в [5].

где $\hat{\sigma}_2$ — тензор проводимости включения. Аналогичные граничные условия должны выполняться и на левом ($\xi = -\xi_0$) включении.

Удовлетворяя граничным условиям при $\xi = \pm\xi_0$, находим коэффициенты разложений (7)—(9)

$$a_n = D_n\left[-2B\cos\alpha + \left(A + \delta_H^2 e^{-2n\xi_0}\right)\sin\alpha\right],$$

$$b_n = -D_n\left[\left(A - \delta_H^2 e^{-2n\xi_0}\right)\cos\alpha + 2B\sin\alpha\right], \tag{11}$$

$$\delta_H^2 = \frac{(\sigma_{x1} - \sigma_{x2})^2 + (\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2}{(\sigma_{x1} + \sigma_{x2})^2 + (\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2}, \quad A = \frac{\sigma_{x1}^2 - \sigma_{x2}^2 - (\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2}{(\sigma_{x1} + \sigma_{x2})^2 + (\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2},$$

$$B = \frac{\sigma_{x1}(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})}{(\sigma_{x1} + \sigma_{x2})^2 + (\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2}, \tag{12}$$

$$a_n^{(1)} = 2aE_0(-1)^n \sin\alpha + a_n e^{n\xi_0}\operatorname{ch} n\xi_0, \quad b_n^{(1)} = -2aE_0(-1)^n\cos\alpha + b_n e^{n\xi_0}\operatorname{sh} n\xi_0, \tag{13}$$

$$D_n = \frac{4aE_0(-1)^n e^{-2n\xi_0}}{1 - \delta_H^2 e^{-4n\xi_0}}, \quad a_n^{(2)} = a_n^{(1)}, \; b_n^{(2)} = -b_n^{(1)}, \; a_0^{(2)} = -a_0^{(1)} = aE_0\cos\alpha. \tag{14}$$

Находя асимптотическое выражение для φ_e из (7) ($\xi \simeq 2axr^{-2}$, $\vartheta \simeq \pi - 2ayr^{-2}$ при $r \to \infty$) и сравнивая его с выражением для потенциала на больших расстояниях

$$\varphi = -\mathbf{E}_0\mathbf{r} + 2\frac{\mathbf{pr}}{r^2} + \ldots, \quad p_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}E_{0\beta}, \tag{15}$$

определяем значения составляющих тензора $\hat{\Lambda}^{(2)}$

$$\Lambda_{xx}^{(2)} = -4a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-2n\xi_0}}{1 - \delta_H^2 e^{-4n\xi_0}}\left(A - \delta_H^2 e^{-2n\xi_0}\right), \quad \Lambda_{xy}^{(2)} = -8a^2B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-2n\xi_0}}{1 - \delta_H^2 e^{-4n\xi_0}}, \tag{16}$$

$$\Lambda_{yy}^{(2)} = -4a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-2n\xi_0}}{1 - \delta_H^2 e^{-4n\xi_0}}\left(A + \delta_H^2 e^{-2n\xi_0}\right), \quad \Lambda_{xy}^{(2)} = -\Lambda_{yx}^{(2)}, \tag{17}$$

где ξ_0 и a даются выражениями (6); A, B и δ_H^2 определены согласно (12). При $\rho \to \infty$ имеем: $\xi_0 \to \ln(\rho/R)$, $a \to \rho/2$, так что

$$\Lambda_{xx}^{(2)}(\infty) = \Lambda_{yy}^{(2)}(\infty) = 2\Lambda_{xx}^{(1)} = -AR^2, \quad \Lambda_{xy}^{(2)}(\infty) = -\Lambda_{yx}^{(2)}(\infty) = 2\Lambda_{xy}^{(1)} = -2BR^2. \tag{18}$$

В результате из (2)—(4) с учетом (16)—(18) для составляющих эффективного тензора проводимости получаем

$$(\sigma_{xe} - \sigma_{x1})/\sigma_{x1} = -2cA + 2c^2\left[-A\delta_H^2 F(\delta_H) + A^2 - 4B^2\right], \tag{19}$$

$$(\sigma_{ae} - \sigma_{a1})/\sigma_{a1} = -B\frac{\sigma_{x1}}{\sigma_{a1}}\left\{4c + 4c^2\left[\delta_H^2 F(\delta_H) - 2A\right]\right\}, \tag{20}$$

$$F(\delta_H) = \sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^1 \frac{x^{3n-3}(1-x^2)(1-x)^2}{1 - \delta_H^2 x^{2n}}\,dx. \tag{21}$$

Здесь $c = \pi NR^2$ — безразмерная концентрация (доля занимаемого объема) включений.

3. Выразим теперь эффективные характеристики среды σ_{xe} и σ_{ae} из (19) и (20) через гальваномагнитные свойства отдельных компонент и функцию f, которая описывает эффективную проводимость системы той же структуры при $\mathbf{H}=0$ (будем называть ее нулевой). Нулевая система, согласно [3], фактически та же исходная (при $\mathbf{H}=0$) с измененными, в общем случае, проводимостями компонент. Воспользуемся формулами, полученными в [3], которые устанавливают изоморфизм задач об электропроводности произвольной двумерной двухкомпонентной системы и о ее гальваномагнитных свойствах, и функцией f, полученной в c^2-приближении в [4]

$$f(p, h) = 1 - 2c\delta_0 + 2c^2\delta_0^2\left[1 - \delta_0 F(\delta_0)\right], \quad \delta_0 = (1-h)/(1+h), \quad h = \sigma_2/\sigma_1, \tag{22}$$

где σ_1 и σ_2 — проводимости первой и второй компонент, p — концентрация первой компоненты, $p=1-c$. Кроме этого, в качестве нулевой системы (т. е. без холловских составляющих) выбирается такая, для которой вместо параметра h взят параметр λ ($h \to \lambda$), определяемый соотношением

$$\lambda = \frac{1}{4\sigma_{x1}\sigma_{x2}} \left\{ [(\sigma_{x1}+\sigma_{x2})^2 + (\sigma_{a1}-\sigma_{a2})^2]^{1/2} - [(\sigma_{x1}-\sigma_{x2})^2 + (\sigma_{a1}-\sigma_{a2})^2]^{1/2} \right\}^2. \qquad (23)$$

Следовательно,

$$\delta_H = (1-\lambda)(1+\lambda). \qquad (24)$$

Если вычислить теперь δ_H^2 по формуле (24), куда надо подставить λ из (23), то получим величину δ_H^2, определенную ранее (12).

Подставляя в упомянутые выше формулы из [3] функцию f из (22), в которой необходимо сделать замену $\delta_0 \to \delta_H$, и величину λ из (23), получаем составляющие эффективного тензора проводимости системы (19) и (20), что подтверждает справедливость проделанного расчета.

Для дальнейших оценок будем использовать следующие модельные выражения для величин σ_{xi} и σ_{ai}, справедливые в изотропном случае и в τ-приближении при произвольных $\mathbf{H}$ [4]

$$\sigma_{xi} = \sigma_i/(1+\beta_i^2), \qquad \sigma_{ai} = \sigma_i\beta_i/(1+\beta_i^2).$$

Здесь $\sigma_i \backsim n_i\mu_i$ — проводимость i-й компоненты при $\mathbf{H}=0$; n_i и μ_i — концентрация и подвижность носителей; $\beta_i \sim \mu_i H$. Рассмотрим случай сильных магнитных полей ($H \to \infty$). Тогда $\sigma_{xi} \approx \sigma_i\beta_i^{-2} \backsim H^{-2}$, $\sigma_{ai} \approx \sigma_i\beta_i^{-1} \backsim$ $\backsim H^{-1}$. Пусть концентрация носителей n_1 и n_2 в обеих компонентах различаются, тогда $\delta_H^2 \simeq 1$, $A \simeq -1$, $B \backsim H^{-1}$, $\lambda \backsim H^{-2}$. В сильных магнитных полях при $\lambda \to 0$ в разложении функции F по степеням λ имеется неаналитический член

$$\Delta F = 8\zeta(3)\,\lambda^3 \ln\lambda, \quad \lambda \to 0. \qquad (25)$$

Здесь $\zeta(3)=1.202.$ — дзета-функция Римана. Это приводит к неаналитической зависимости от магнитного поля (при $H \sim \infty$) величин σ_{xe} и σ_{ae}

$$\Delta\sigma_{xe} \backsim H^{-8}\ln(H^{-2}), \quad \Delta\sigma_{ae} \backsim H^{-9}\ln(H^{-2}), \quad H \to \infty. \qquad (26)$$

4. Рассмотрим систему с идеально проводящими включениями: $\hat{\sigma}_2 \to \infty$. В этом случае из (19) и (20) с учетом (12) получаем

$$\sigma_{xe}^{(s)} = \sigma_{x1}f_s, \quad \sigma_{ae}^{(s)} = \sigma_{a1}. \qquad (27)$$

Здесь введена функция

$$f_s = 1 + 2c + 2c^2[1+F(1)]. \qquad (28)$$

Индекс s означает идеально проводящие включения.

Диэлектрические включения $\hat{\sigma}_2=0$ рассмотрим в случае сильных магнитных полей $H \to \infty$, когда диагональной составляющей σ_{x1} можно пренебречь по сравнению с σ_{a1}. Тогда из (12), (19, (20) получаем

$$\sigma_{xe}^{(d)} = \sigma_{x1}f_s, \quad \sigma_{ae}^{(d)} = \sigma_{a1}, \qquad (29)$$

где индекс d означает диэлектрические включения.

Формулы (27) и (29) совпадают с соответствующими результатами, полученными в [2, 3] другим способом. Из [2, 3] для диэлектрического включения при $H \to \infty$ следует $\sigma_{xe}^{(d)} = \sigma_{x1}/f_d$. Но функции f_s и f_d, свойства которых исследованы в [4], в квадратичном по c приближении связаны между собой соотношением $f_s f_d=1$.

Аналогия между формулами (27) и (29) не должна вызывать недоумение, так как в достаточно сильном магнитном поле, как было отмечено в [3], граничное условие для диэлектрического включения становится таким же, как и для идеально проводящего.

В заключение выражаю благодарность Б. Я. Балагурову за обсуждение настоящей работы.

Литература

[1] *Дыхне А. М.* ЖЭТФ, 1970, т. 59, № 8, с. 641—647
[2] *Балагуров Б. Я.* ЖЭТФ, 1981, т. 81, № 8, с. 665—671.
[3] *Балагуров Б. Я.* ЖЭТФ, 1982, т. 82, № 4, с. 1333—1346.
[4] *Балагуров Б. Я.* ЖЭТФ, 1985, т. 89, № 11, с. 1796—1809.
[5] *Балагуров Б. Я.* ЖТФ, 1983, т. 53, № 3, с. 428—435.
[6] *Морс Ф. М., Фешбах Г* Методы теоретической физики, т. 2, М.: ИЛ, 1960. 896 с.
[7] *Лифшиц И. М., Азбель М. Я Каганов М. И.* Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 416 С.

ВНИПКТИ источников тока
Москва

Поступило в Редакцию
1 июля 1987 г.