УДК 537.226

ОБ ОБОБЩЕННОМ ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ КОНФИГУРАЦИОННОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ГРАНИЦУ ДОМЕНОВ В СЕГНЕТОЭЛАСТИКАХ—СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАХ

В. Н. Нечаев, А. М. Рощупкин

Получено выражение для силы, действующей на границу доменов в сегнетоэластиках с учетом различия их электрофизических свойств. Показано, что дополнительный вклад в конфигурационную силу, связанный с различием пьезоэлектрических констант доменов, приводит к возможности параметрического возбуждения изгибных колебаний границы переменным внешним полем.

Выражение для конфигурационной силы, действующей на границу доменов, важно как для анализа возможных статических доменных конфигураций в кристаллах [1, 2], расчета взаимодействия границ с различными дефектами структуры [3], так и для решения динамических задач, например, о колебаниях границ [4], о взаимодействии доменных границ с ультразвуком [5], с электромагнитными полями [6].

Конфигурационная сила, действующая на границу, разделяющую области кристалла, отличающиеся спонтанной деформацией, рассчитана в [7]. В [8] дано обобщение этой силы на динамический случай. В работах [2], а затем в [9] получено выражение для силы, действующей на доменную границу в сегнетоэлектриках и ферромагнетиках. В [10] эта же задача решена для динамического случая.

В настоящей работе выводится выражение для силы, действующей на произвольным образом движущуюся границу доменов в сегнетоэластике-сегнетоэлектрике с учетом различия электрофизических и упругих свойств доменов.

1. Вывод выражения для конфигурационной силы из принципа стационарного действия

Будем исходить из следующего выражения для свободной энергии Гиббса Ф [11]:

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm} - \sigma_{ik}w^s_{ik} - \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}E_iE_k - \frac{1}{4\pi}E_iD_{0i} - \gamma_{i,\,kl}E_i\sigma_{kl}, \tag{1}$$

где μ_{iklm} — тензор упругих податливостей; $\gamma_{i,\,kl}$ — тензор пьезоэлектрических констант; ε_{ik} — тензор диэлектрической проницаемости; $\mathbf{D}_0 = 4\pi\mathbf{P}_0$ — постоянный вектор электрической индукции; $\mathbf{P}_0$ — вектор спонтанной поляризации; w^s_{ik} — спонтанная дисторсия, связанная с фазовым превращением в кристалле.

Учитывая, что

$$u_{ik} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ik}}\right)_{T,\,\mathbf{E}} = \mu_{iklm}\sigma_{lm} + \gamma_{l,\,ik}E_l + w^s_{ik},$$

для свободной энергии Гельмгольца $F = \Phi + \sigma_{ik}u_{ik}$ имеем

$$F = \Phi_0 + \frac{1}{2}\lambda_{iklm}w_{ik}w_{lm} - \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}E_iE_k - \frac{1}{4\pi}E_iD_{0i}. \tag{2}$$

Здесь λ_{iklm} — тензор упругих модулей,

$$w_{ik} = u_{ik} - \gamma_{j,\,ik}E_j - w^s_{ik} \tag{3}$$

— тензор упругих дисторсий; $u_{ik} = \partial u_k/\partial x_i$ — тензор полной дисторсии.

Воспользовавшись выражением (2) для свободной энергии F, запишем действие $\mathcal{J}$ в следующем виде:

$$\mathcal{J} = \int \mathcal{L}dvdt, \tag{4}$$

$$\mathcal{L} = 1/2\cdot\rho v_i^2 - F, \tag{5}$$

где ρ — плотность вещества кристалла; $v_i = \partial u_i/\partial t$ — скорость элементов среды.

Рассмотрение удобно проводить, так же как и в [8, 10], в 4-мерном пространстве — времени, где положение границы доменов в любой момент времени изображается гиперповерхностью $\Sigma(\mathbf{r}, t)$, разделяющей 4-мерные объемы контактирующих фаз Ω_1 и Ω_2.

Полная вариация действия $\delta\mathcal{J}$ связана как с варьированием поля смещений $u_i(x)$, так и с варьированием скалярного потенциала $\varphi(x)$ электрического поля и самой гиперповерхности $\Sigma(\mathbf{r}, t)$

$$\delta\mathcal{J} = \int \left\{\mathcal{L}\left(u_{i,\,\alpha} + \delta u_{i,\,\alpha};\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \delta\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\left(1 + \frac{\partial\delta x_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) - \mathcal{L}\left(u_{i,\,\alpha},\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right\}d\Omega. \tag{6}$$

Здесь запятая перед индексом, обозначенном греческой буквой, означает дифференцирование по соответствующей компоненте 4-радиус-вектора $x_\alpha = (t, \mathbf{r})$.

Представляя полные вариации функций $u_{i,\alpha}(x)$ и $\partial\varphi/\partial x_i$ в следующем виде:

$$\delta u_{i,\,\alpha} = \bar{\delta}u_{i,\,\alpha} + u_{i,\,\alpha,\,\beta}\delta x_\beta, \tag{7}$$

$$\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \bar{\delta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + \varphi_{,\,i,\,\alpha}\delta x_\alpha, \tag{8}$$

где $\bar{\delta}u_{i,\alpha}$ — вариация формы функции $u_{i,\,\alpha}$, $\bar{\delta}(\partial\varphi/\partial x_i)$ — вариация формы функции $\partial\varphi/\partial x_i$, и подставляя $\delta u_{i,\,\alpha}$, $\delta(\partial\varphi/\partial x_i)$ в (6), находим

$$\delta\mathcal{J} = \int\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\mathcal{L}\delta x_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\,\alpha}}\bar{\delta}u_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}\bar{\delta}\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\,\alpha}}\right)\bar{\delta}u_i - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,i}}\right)\bar{\delta}\varphi\right\}d\Omega. \tag{9}$$

Первые три слагаемых в выражении (9) с помощью теоремы, обобщающей теорему Гаусса на 4-мерный случай, преобразуются к интегралу по гиперповерхности Σ

$$\delta\mathcal{J}' = \int_\Sigma\left[\mathcal{L}\delta x_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\,\alpha}}\bar{\delta}u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,\alpha}}\bar{\delta}\varphi\right]d\Sigma_\alpha. \tag{10}$$

Здесь $d\Sigma_\alpha = n_\alpha d\Sigma$; $n_\alpha = (-V/c,\ \mathbf{n})$ (см. подробнее [8]) — единичный 4-вектор нормали к гиперповерхности Σ; V — скорость границы; V — величина положительная, если движение происходит в направлении n, и отрицательная в противном случае. Введено обозначение: $[a] = a_2 - a_1$. Скачок подынтегральной функции в выражении (10) появляется при двукратном прохождении по разным сторонам гиперповерхности Σ при варьировании действия $\mathcal{J}$ в фазах I и II.

Требуя обращения в нуль объемной части вариации $\delta\mathcal{J}$ из последних двух слагаемых в выражении (9) в силу произвольности вариаций $\bar{\delta}u_i$,

$\delta\varphi$, получаем уравнения движения элементов объема сегнетоэластика—сегнетоэлектрика

$$-\rho\dot{v}_i + \lambda_{iklm}\frac{\partial}{\partial x_k}(u_{l,\,m} - \gamma_{j,\,lm}E_j - w^s_{lm}) = 0, \tag{11}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0. \tag{12}$$

Выражение (10) для поверхностной части вариации $\delta\mathcal{J}'$, учитывая, что

$$\bar{\delta}u_i = \delta u_i - u_{i,\,\beta}\delta x_\beta,$$
$$\bar{\delta}\varphi = \delta\varphi - \varphi_{,\,\beta}\delta x_\beta,$$

преобразуем к виду

$$\delta\mathcal{J}' = \int\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\,\alpha}}\bar{\delta}u_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,\alpha}}\bar{\delta}\varphi\right]n_\alpha d\Sigma - \int\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\,\alpha}}u_{i,\,\beta} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,\alpha}}\varphi_{,\,\beta} - \mathcal{L}\delta_{\alpha\beta}\right]\delta x_\beta n_\alpha d\Sigma. \tag{13}$$

Требуя обращения в нуль этой части вариации действия, получаем граничные условия к уравнениям (11), (12)

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\,\alpha}}\right]n_\alpha = [\rho v_i]\,V + [\sigma_{ik}]\,n_k = 0, \tag{14}$$

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{E}}\right]\cdot\mathbf{n} = [D_n] = 0 \tag{15}$$

и уравнение

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\,\alpha}}u_{i,\,\beta} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,\alpha}}\varphi_{,\,\beta} - \mathcal{L}\delta_{\alpha\beta}\right] = n_\alpha = 0, \tag{16}$$

описывающее динамику доменных границ.

Учитывая алгебраическое соотношение

$$[ab] = \{a\}\,[b] + [a]\,\{b\},$$

где фигурные скобки обозначают полусумму значений $\{a\} = (a_1 + a_2)/2$, стоящей в них величины по обе стороны от границы, уравнение упругого равновесия (11) и равенство [8]

$$n_\alpha\,[u_{i,\,\beta}] = n_\beta\,[u_{i,\,\alpha}],$$

являющееся следствием того, что скачок 4-мерного градиента функции $u_i(x)$ направлен по нормали к гиперповерхности Σ, приводим первое слагаемое в (16) к виду

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\,\alpha}}u_{i,\,\beta}\right]n_\alpha = \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\,\alpha}}\right\}[u_{i,\,\alpha}]\,n_\beta. \tag{17}$$

Используя электродинамические граничные условия $[D_n] = 0$, $[\mathbf{E}_\tau] = 0$, где $\mathbf{E}_\tau$ — касательная составляющая вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, и уравнение электростатики (12), преобразуем аналогичным образом второе слагаемое в (16)

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,\alpha}}\varphi_{,\,\beta}\right]n_\alpha = \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,i}}\right\}[\varphi_{,\,i}]\,n_\beta. \tag{18}$$

Подставляя (18), (17) в (16), находим выражение для конфигурационной силы, действующей на границу в сегнетоэластике—сегнетоэлектрике

$$\boldsymbol{\Phi} = \left(\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i,\,\alpha}}\right\}[u_{i,\,\alpha}] + \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\,i}}\right\}[\varphi_{,\,i}] - [\mathcal{L}]\right)\mathbf{n}. \tag{19}$$

В условиях равновесия конфигурационная сила (19) в каждой точке доменной границы должна обращаться в нуль.

Переходя к 3-мерным обозначениям и учитывая явный вид $\mathcal{L}$ (5) и соотношения

$$\{\rho v_i\}[v_i]-\frac{1}{2}\cdot[\rho v_i^2]=-\frac{1}{2}\cdot[\rho]\,v_i^{(1)}v_i^{(2)},$$

$$\frac{1}{2}\cdot[\sigma_{ik}w_{ik}]-\{\sigma_{ik}\}[u_{ik}]=\frac{1}{2}\cdot[\lambda_{iklm}]\,w_{ik}^{(1)}w_{lm}^{(2)}-\{\sigma_{ik}\}[\gamma_{j,\,ik}E_j]-\{\sigma_{ik}\}[w_{ik}^s],$$

$$\frac{1}{8\pi}[\varepsilon_{ik}E_iE_k]-\frac{1}{4\pi}\{\varepsilon_{ik}E_k\}[E_i]=\frac{1}{8\pi}[\varepsilon_{ik}]\,E_i^{(1)}E_k^{(2)},$$

$$\frac{1}{4\pi}\{D_{0i}\}[E_i]-\frac{1}{4\pi}[E_iD_{0i}]=-\{E_i\}[P_{0i}],$$

получающиеся в результате несложных алгебраических преобразований, приводим (19) к виду

$$\psi=\varphi\cdot\mathrm{n}=-\frac{1}{2}[\rho]\,v_i^{(1)}v_i^{(2)}+\frac{1}{2}[\lambda_{iklm}]\,w_{ik}^{(1)}w_{lm}^{(2)}-\{\sigma_{ik}\}[w_{ik}^s]-\{\sigma_{ik}\}[\gamma_{j,\,ik}E_j]+$$
$$+\{\sigma_{kl}\gamma_{i,\,kl}\}[E_i]-\frac{1}{8\pi}[\varepsilon_{ik}]\,E_i^{(1)}E_k^{(2)}-\{E_i\}[P_{0i}]+[\Phi_0]. \qquad (20)$$

Представляя слагаемое $\{\sigma_{jk}\gamma_{i,\,jk}\}[E_i]$ в виде

$$\{\gamma_{i,\,jk}\sigma_{jk}\}[E_i]=[\gamma_{i,\,jk}\sigma_{jk}E_i]-[\gamma_{i,\,jk}\sigma_{jk}]\{E_i\},$$

легко видеть, что, согласно (20), различие пьезоэлектрических свойств доменов проявляется следующим образом: во-первых, изменяется значение спонтанной дисторсии на величину $\Delta w_{ik}^s=\gamma_{j,\,ik}E_j$ и спонтанной поляризации на величину $\Delta P_{0i}=\gamma_{i,\,jk}\sigma_{jk}$; во-вторых, возрастает потенциальная энергия W кристалла в электрическом поле: $\Delta W=[E_i\gamma_{i,\,jk}\sigma_{jk}]$.

Используя далее равенство

$$\{\sigma_{jk}\gamma_{i,\,jk}\}[E_i]-\{\sigma_{ik}\}[\gamma_{j,\,ik}E_j]=-\frac{1}{2}[\gamma_{i,\,jk}]\left(E_i^{(1)}\sigma_{jk}^{(2)}+E_i^{(2)}\sigma_{jk}^{(1)}\right),$$

в справедливости которого нетрудно убедиться прямой проверкой, для силы ψ окончательно будем иметь

$$\psi=-\frac{1}{2}[\rho]\,\overset{\frown}{v_i v_i}+\frac{1}{2}[\lambda_{iklm}]\,\overset{\frown}{w_{ik}w_{lm}}-\{\sigma_{ik}\}[w_{ik}^s]-$$
$$-[\gamma_{i,jk}]\,\overset{\frown}{E_i\sigma_{jk}}-\frac{1}{8\pi}[\varepsilon_{ik}]\,\overset{\frown}{E_iE_k}-\{E_i\}[P_{0i}]+[\Phi_0]. \qquad (21)$$

Здесь введено обозначение

$$\overset{\frown}{a\cdot b}=\frac{1}{2}(a_1b_2+a_2b_1).$$

Сравнивая полученный результат с работами [8, 10], видим, что учет различия электрофизических свойств доменов приводит к двум дополнительным слагаемым

$$[\gamma_{i,jk}]\,\overset{\frown}{E_i\sigma_{jk}}-\frac{1}{8\pi}[\varepsilon_{ik}]\,\overset{\frown}{E_iE_k}$$

в выражении для конфигурационной силы, действующей на границу. При $\psi=0$ соотношение (21) есть уравнение движения границы.

2. Изгибные колебания границ во внешних полях

Для упрощения выкладок рассмотрим конкретную ситуацию, а именно колебания 180°-ных доменных стенок в кристаллах типа $BaTiO_3$. Пусть вектор спонтанной поляризации в доменах направлен вдоль оси OX, а плоскость доменной границы совпадает с плоскостью XOY. Фазовый переход из высокотемпературной кубической фазы в низкотемпературную тетрагональную фазу сопровождается спонтанной деформацией u^s_{xx}, $u^s_{yy}=$ $=u^s_{zz}$, которая одинакова в обоих доменах, разделенных границей. В тетрагональной фазе появляются также отличные от нуля компоненты тензора пьезоконстант $\gamma_{1,\,11}$, $\gamma_{1,\,22}=\gamma_{1,\,33}$, $\gamma_{2,\,21}=\gamma_{3,\,31}$, которые отличаются знаком в контактирующих доменах.

Рассмотрим колебания 180°-ных доменных границ в присутствии механических напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} либо при наличии одной из этих компонент тензора напряжений. Учитывая, что плотность, упругие и диэлектрические характеристики доменов, а также спонтанная деформация в доменах не различаются, запишем уравнение колебаний границы в виде (см. (21))

$$[P_0]\{E_x\}+[\gamma]\,\sigma\,\{E_x\}=0, \tag{22}$$

где введено обозначение

$$[\gamma]\,\sigma=[\gamma_{1,\,11}]\,\sigma_{11}+[\gamma_{1,\,22}]\,\sigma_{22}+[\gamma_{1,\,33}]\,\sigma_{33}.$$

Полусумма $\{E_x\}$ в выражении (22) берется на поверхности доменной границы $z=\xi\,(x,\ y)$; ξ — координата, определяющая положение границы. Определяя электрическое поле $\mathbf{E}$, индуцируемое колебаниями доменной границы, из совместного решения уравнений динамической теории упругости с уравнениями электростатики и подставляя $\mathbf{E}$ в (22), запишем уравнение колебаний границы в явном виде

$$m_\psi(\mathbf{k})\,\ddot{\xi}+c_\psi(\mathbf{k})\,k^2\xi=0. \tag{23}$$

Соответствующие выкладки в точности совпадают с аналогичными в [10], поэтому в данной работе не приводятся. Здесь m_ψ ($\mathbf{k}$) — полевая масса доменной границы, обусловленная запаздыванием электрического поля, связанными через пьезоэлектрическую связь с инерцией среды; c_ψ ($\mathbf{k}$) — полевая жесткость, имеющая электростатическое происхождение. Как эффективная масса m_ψ, так и эффективная жесткость c_ψ зависят от волнового вектора $\mathbf{k}$ [10]. Учет различия пьезоэлектрических свойств доменов приводит к изменению эффективной массы $m_\psi\to m_\psi\,(1+[\gamma]\,\sigma/2P_0)$ и эффективной жесткости $c_\psi\to c_\psi\,(1+[\gamma]\,\sigma/2P_0)$ по сравнению с [10]. Добавляя, как указано в [10], к m_ψ и c_ψ локальную массу m_l и локальную жесткость c_l, учитывающие микроструктуру границы, находим изменение собственных частот колебаний границы

$$\omega^2=\omega_0^2\left[1+(a-b)\frac{[\gamma]\,\sigma}{2P_0}+b\left(\frac{[\gamma]\,\sigma}{2P_0}\right)^2\right], \tag{24}$$

где

$$\omega_0^2=\frac{c_\psi+c_l}{m_\psi+m_l},\quad a=\frac{c_\psi}{c_\psi+c_l},\quad b=\frac{m_\psi}{m_\psi+m_l}.$$

Таким образом, имеется принципиальная возможность изменения заданным образом собственных частот изгибных колебаний доменной границы внешними механическими напряжениями.

Переменные механические напряжения приводят к параметрическому возбуждению колебаний доменных границ. Действительно, полагая $\sigma=\sigma\,(t)=\sigma_0\cos 2\nu t$, имеем $m=m\,(t)$, $c=c\,(t)$. Проводя замену переменной [12] $t\to\tau$, $d\tau=dt\Big/\left(1+b\,\dfrac{[\gamma]\,\sigma}{2P_0}\right)$, сводим уравнение (23) к виду

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+\omega_0^2\,(1+h\cos 2\nu t)\,\xi=0, \tag{25}$$

где введено обозначение

$$h=(a+b)\frac{[\gamma]\,\sigma_0}{2P_0}.$$

При записи (25) опущены слагаемые, пропорциональные квадрату малого параметра $\alpha = [\gamma]\sigma_0/2P_0$. Уравнение (25) подробно исследовано в [12]. Согласно [12], амплитуды колебаний доменной границы, частоты которых лежат в интервале

$$-\frac{1}{4}(a+b)[\gamma]\frac{\sigma_0}{P_0}\omega_0 < \omega_0(\mathbf{k}) - \nu < \frac{1}{4}(a+b)\frac{[\gamma]\,\omega_0}{P_0}\sigma_0 \qquad (26)$$

вблизи половинной частоты ν внешнего возмущения, неограниченно возрастают в рамках линейной по ξ теории. Наличие в системе сил трения сужает этот интервал, причем если

$$\sigma_0 < 4\lambda P_0/(a+b)[\gamma]\,\nu, \qquad (27)$$

где λ — коэффициент затухания волны, то резонанс исчезает вообще. Поскольку колебания границ носят квазиакустический характер, а отношение λ/ν для акустических колебаний всегда мало [13], то условие возникновения параметрического резонанса может быть выполнено при относительно небольших механических напряжениях $\sigma_0 \sim 10^7 \div 10^8$ дин/см^2.

Описанные эффекты, разумеется, не являются специфическими для данных типов кристаллов и доменных границ. Они являются общими для доменных и межфазных границ (если таковые имеются) в сегнетоэлектриках и сегнетоэластиках при соответствующем выборе механических или электрических полей. Полученный дополнительный вклад в конфигурационную силу вследствие различия электрофизических свойств доменов будет проявляться также в других случаях взаимодействия границ с электромагнитными и упругими полями, которые составляют предмет отдельной работы.

В заключение авторы выражают благодарность А. Л. Ройтбурду за обсуждение работы.

Литература

[1] *Смоленский Г. А., Боков В. А., Исупов В. А.* и др. Физика сегнетоэлектрических явлений. Л.: Наука, 1985. 396 с.

[2] *Ройтбурд А. Л.* ФТТ, 1968, т. 10, № 8, с. 3619—3627; *Марченко В. И.* ЖЭТФ, 1986, т. 90, № 6, с. 2241—2246; *Ченский Е. В.* ФТТ, 1972, т. 14, № 8, с. 2241—2246; *Привороцкий И. А.* УФН, 1972, т. 108, № 1, с. 43—61.

[3] *Косилов А. Т., Перевозников А. М., Рощупкин А. М.* Поверхность, 1983, № 9, с. 25—30; ФММ, 1984, т. 58, № 1, с. 5—10; *Гриднев С. А., Попов В. М., Шувалов Л. А., Нечаев В. Н.* ФТТ, 1985, т. 27, № 1, с. 3—7.

[4] *Лайхтман Б. Д.* ФТТ, 1973, т. 15, № 1, с. 93—102.

[5] *Лайхтман Б. Д.* ФТТ, 1973, т. 15, № 5, с. 1501—1507; *Лайхтман В. Д., Таганцев А. К.* ФТТ, 1975, т. 17, № 6, с. 1734—1743.

[6] *Лайхтман Б. Д., Петров В. Ю.* ЖЭТФ, 1977, т. 73, № 9, с. 1188—1197.

[7] *Ройтбурд А. Л.* УФН, 1974, т. 113, с. 69—103. Ройтбурд А. Л. ДАН СССР, 1971, т. 107, № 5, с. 1051—1054.

[8] *Косилов А. Т., Перевозников А. М., Рощупкин А. М.* Поверхность, 1983, № 10, с. 36—50.

[9] *Ройтбурд А. Л.* ФТТ, 1986, т. 28, № 10, с. 3051—3054.

[10] *Нечаев В. Н., Рощупкин А. М.* ФТТ, 1988, т. 30, № 6, с. 1908—1910.

[11] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

[12] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.

[13] *Гуревич В. Л.* Кинетика фононных систем. М.: Наука, 1980. 400 с.

Воронежский политехнический институт
Воронеж

Поступило в Редакцию
21 декабря 1987 г.