УДК 537.312.62

# ТЕРМОДИНАМИКА ТОКОВЫХ СОСТОЯНИЙ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

*Е. К. Кудинов*

На основе феноменологических соображений построена термодинамика стационарных токовых состояний в сверхпроводниках. Токовые состояния характеризуются парой термодинамически сопряженных переменных: одна из них, играющая роль обобщенной координаты, — «фазовая» переменная (обобщающая понятие градиента фазы, «сверхтекучей» скорости), другая (обобщенная сила) пропорциональна полному току. Состояние с заданной фазовой переменной может быть определено лишь при дополнительных условиях на калибровку и не может быть реализовано на эксперименте, но состояние с заданной токовой переменной реально.

Получено условие термодинамической устойчивости токового состояния.

Общая термодинамическая схема иллюстрируется на примере теории Ландау—Гинзбурга. Развитый подход может служить основой для рассмотрения токового состояния сложных конфигураций сверхпроводников.

Стационарное токовое состояние сверхпроводника, включенного в токовую цепь, несомненно является термодинамически равновесным состоянием, а ток $J$, создаваемый внешней цепью, играет роль макроскопического внешнего параметра (подобно $P$, $V$, $\mu$ и т. п.). Представляет интерес описание такого состояния в рамках феноменологической термодинамики. Нам неизвестны попытки такого рода. В то же время такой подход может оказаться полезным при решении ряда конкретных задач.

В настоящей работе предпринята попытка построения термодинамики токового состояния на чисто феноменологической основе. Делается лишь предположение, что такое состояние является равновесным в обычном смысле. Формулируется первое начало термодинамики для равновесных токовых состояний и находятся условия термодинамического равновесия. При этом с необходимостью возникает в качестве новой термодинамической координаты, соответствующей токовой степени свободы, «фазовая» переменная $k$ (обобщение понятия градиента фазы). С точностью до множителя ток оказывается координатой, термодинамически сопряженной $k$. Примечательно, что переменная $k$ входит в виде $k\nabla\chi$ (т. е. в виде градиента некоторой функции) таким образом, что она может быть исключена выбором калибровки вектор-потенциала $\mathbf{A}$, поэтому существование токового равновесного состояния неизбежно связано с нарушением калибровочной инвариантности. Это заключение следует из чисто феноменологических соображений и не связано с какими-либо соображениями о природе механизма явления.

Общие термодинамические соображения детально иллюстрируются на примере теории Ландау—Гинзбурга (ЛГ). Мы ограничиваемся случаем отсутствия внешнего магнитного поля, т. е. $\mathbf{A}$ порождается самим сверхпроводящим током.

Проведенное рассмотрение с небольшими изменениями применимо и к сверхтекучести.

Данная работа генетически связана с работой [1], где на основе первых принципов было показано, как ODLRO приводит к появлению новой (токовой) термодинамической степени свободы.

## 1. Первое начало термодинамики для токовых равновесных состояний

Цель раздела — получить первое начало термодинамики для токовых равновесных процессов. Ток $J$ предполагается термодинамической координатой, и основной вопрос: какая переменная термодинамически сопряжена $J$?

В приложении термодинамики к конкретным системам исходным пунктом является определение бесконечно малой работы $\delta\mathscr{A}$, совершенной над системой. Исходим из известного соотношения

$$\delta\mathscr{A} \equiv \langle \delta\hat{H} \rangle = -\frac{1}{c} \int\limits_V \mathbf{j}(\mathbf{r})\, \delta\mathbf{A}\, dV, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \langle \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \rangle. \tag{1}$$

Интегрирование ведется по объему тела $V$, $\langle \ldots \rangle$ — усреднение по состоянию системы, $\hat{H}$ — гамильтониан системы, $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ — оператор плотности тока, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — вектор-потенциал. Для стационарного состояния $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Выберем $\mathbf{A}$ в виде $\mathbf{A} - \frac{c\hbar}{q} k \nabla \chi_0$, где $\chi_0(\mathbf{r})$ — некоторая фикси-

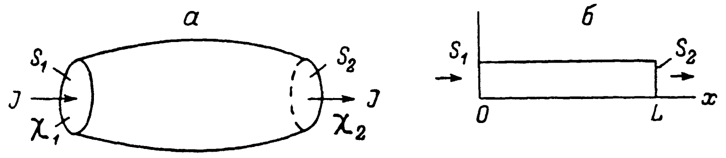

Рис. 1. Схема подвода тока. $\chi_1 = p_1$, $\chi_2 = p_2$, $p_2 > p_1$.

рованная функция координат; $k$ — «внешний» параметр, подлежащий варьированию (число); $q$ — заряд частицы (для электрона $q = -e$). В дальнейшем $k$ будем называть фазовой переменной. Имеем

$$\delta\mathscr{A} = \frac{\hbar}{q} \int\limits_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \nabla\chi_0(\mathbf{r})\, dV \delta k. \tag{2}$$

Пусть ток протекает через участки $S_1$, $S_2$ поверхности тела $S$, на остальной части поверхности $j_n = 0$ (рис. 1, $a$). Выберем функцию $\chi_0(\mathbf{r})$ так, чтобы на $S_1$, $S_2$ она принимала бы постоянные значения $p_1$, $p_2$ соответственно. Воспользовавшись соотношением $\mathbf{j}\Delta\chi_0 = \operatorname{div} \chi_0 \mathbf{j}$ (поскольку $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$), перепишем (2) следующим образом:

$$\delta\mathscr{A} = \frac{\hbar}{q} \delta k \int\limits_V \operatorname{div}(\chi_0 \mathbf{j})\, dV = \frac{\hbar}{q} \left( \int\limits_{S_1} \chi_0 j_n dS + \int\limits_{S_2} \chi_0 j_n dS \right) = \frac{\hbar}{q} (p_2 - p_1) J \delta k, \quad p_2 > p_1,$$

где $J = -\int\limits_{S_1} j_n dS = \int\limits_{S_2} j_n dS$ — полный ток, входящий в тело. Тогда

$$\delta\mathscr{A} = \frac{\hbar}{q} (p_2 - p_1) J \delta k. \tag{3}$$

В частности, если тело имеет форму прямой призмы, а ток подводится через основания (рис. 1, $б$), $\chi_0$ можно выбрать в виде $\chi_0 = x$, $p_1 = 0$, $p_2 = L$ и

$$\delta\mathscr{A} = \frac{\hbar}{q} L J \delta k. \tag{4}$$

Выражение (3) можно получить более наглядным путем. Пусть постоянное электрическое поле приложено в течение времени $\delta t$. Работа, совершенная полем над системой с током $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ за время $\delta t$, есть [2]

$$\delta\mathscr{A} = \int dV \mathbf{E}(\mathbf{r})\, \mathbf{j}(\mathbf{r})\, \delta t. \tag{5}$$

Полагая $\varphi=0$, имеем $\mathbf{E}=-1/c\cdot\partial\mathbf{A}/dt$, тогда

$$\delta\mathscr{A}=-\frac{1}{c}\int dV\mathbf{j}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\delta t\right)=-\frac{1}{c}\int dV\mathbf{j}(\mathbf{r})\,\delta\mathbf{A}. \tag{6}$$

Выберем $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ в виде $\mathbf{A}=-\frac{\hbar c}{q}k(t)\nabla\chi_0$, где $\chi_0$ определено, как выше, а $k(t)$ линейно растет на интервале $t_0$, $t_0+\delta t$; вне его $k(t)$ постоянно (рис. 2). Имеем

$$\mathbf{A}=-\frac{\hbar c}{q}\nabla\chi_0\begin{cases}k, & t<t_0,\\ k+(t-t_0)\dfrac{\delta k}{\delta t}, & t_0<t<t_0+\delta t,\\ k+\delta k, & t>t_0+\delta t,\end{cases} \tag{7}$$

$$\mathbf{E}=\frac{\hbar}{q}\nabla\chi_0\begin{cases}0, & t<t_0,\\ \delta k/\delta t, & t_0<t<t_0+\delta t,\\ 0, & t>t_0+\delta t.\end{cases} \tag{8}$$

Поэтому

$$\delta\mathbf{A}=\mathbf{A}\,|_{t>t_0+\delta t}-\mathbf{A}\,|_{t<t_0}=-\frac{\hbar c}{q}\nabla\chi_0\delta k \tag{9}$$

и мы приходим к (3). Этот вывод показывает, что соотношение (3) имеет место при приложении к системе в течение $\delta t$ поля $\mathbf{E}$ специальной конфигурации. (Полезно заметить, что $d\mathscr{A}=-PdV$ для газа также реализуется как результат малого изменения внешнего поля специальной конфигурации).

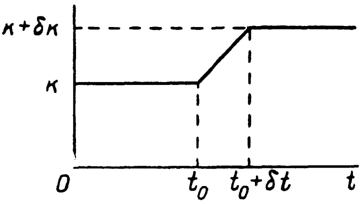

Рис. 2.

Соотношение (3) определяет дифференциал переменной $k$, термодинамически сопряженной величине $I=\frac{\hbar}{q}(p_2-p_1)J$, пропорциональной току. Если допустить, что $k$ можно хотя бы формально определить в качестве термодинамической координаты, то внутренняя энергия $E$ является функцией энтропии $S$ и $k$. Первое начало имеет вид

$$dE=-TdS+Idk,\quad I=\frac{\hbar}{q}(p_2-p_1)J=\frac{\hbar}{q}\int\mathbf{j}(\mathbf{r})\nabla\chi_0 dV, \tag{10}$$

откуда

$$I(S, k)=(\partial E/\partial k)_S. \tag{11}$$

Переменная $k$ заведомо ненаблюдаема, так как она порождена независящим от времени градиентным членом в $\mathbf{A}$ (см. вывод (1)—(3)). В разделе 2 показано, как в рамках теории Ландау—Гинзбурга построить явное выражение для $F(T, k)$ (содержащей тот же объем информации, что и $E(S, k)$). Заметим, что введение $k$ связано с некоторыми условиями на калибровку $\mathbf{A}$. Без них член $-\frac{c\hbar}{q}k\nabla\chi_0$ устраняется изменением калибровки, откуда следовало бы, что $E$ не зависит от $k$, т. е. всегда $I=\partial E/\partial k=0$.

Задание функции $E(S, k)$ полностью определяет термодинамику токовых равновесных состояний. Обычным образом можно ввести термодинамические потенциалы для других наборов переменных, свободную энергию $F(T, k)=E-TS$ и потенциал $\Phi(T, I)=F-kI$. При этом

$$I=(\partial F/\partial k)_T,\quad k=-(\partial\Phi/\partial I)_T. \tag{11a}$$

Функции $F$ и $\Phi$ в равновесии минимальны соответственно при постоянных $T$, $k$ и $T$, $I$.

Хотя переменная $k$ играет фундаментальную роль, являясь одной из термодинамически сопряженных переменных, описывающих токовые состояния (из (10) видно, что она играет роль обобщенной координаты), она не может контролироваться на опыте и характеризуемый ею ансамбль не реализуется. Реализуется лишь ансамбль с токовой переменной $I$ посредством включения системы в токовую цепь. Поэтому в наблюдаемых соотношениях может фигурировать лишь $I$, но не $k$, в частности ненаблюдаемо термическое уравнение состояния $I=f(T, k)$. Обычные термодинамические соображения дают следующие условия устойчивости токового состояния:

$$(\partial I/\partial k)_T > 0, \tag{12а}$$

$$c_k = T(\partial S/\partial T)_k > 0 \tag{12б}$$

(аналоги $(\partial P/\partial V)_T > 0$, $c_v > 0$).

Аппарат статистической механики определяет $F(T, k)$ — характеристическую функцию $T$ и обобщенной координаты $k$ (но не $\Phi(T, I)$). Однако в конкретных задачах часто проще найти $F(I)$. В этих переменных невозможно получить уравнение состояния и теплоемкость. Однако можно определить наиболее важное условие устойчивости (12а). Из тождества

$$\left(\frac{\partial F(T, I)}{\partial I}\right)_T = \left(\frac{\partial(\Phi + kI)}{\partial I}\right)_T = I\left(\frac{\partial k}{\partial I}\right)_T \tag{13}$$

непосредственно видно, что (12а) эквивалентно

$$\left(\frac{\partial F(T, I)}{\partial |I|}\right)_T > 0. \tag{14}$$

Условие (12б) не слишком критично, так как в теплоемкость дают вклад не только токовые степени свободы. Условие же (12а) играет фундаментальную роль в термодинамике токовых состояний. Если с увеличением тока $I$ обращается в нуль при некотором значении $I_c$, то реализуется альтернатива: либо система переходит в другое токовое состояние, устойчивое при $I > I_c$, а переход может быть как I (потеря устойчивости метастабильного состояния), так и II рода; либо при $I > I_c$ не существует устойчивого токового состояния. Последнее значит, что при $I > I_c$ система находится в резистивном (неравновесном) состоянии. В области вблизи $I_c$ должны иметь место развитые флуктуации $k$.

## 2. Токовые состояния в теории Ландау—Гинзбурга

Продемонстрируем на примере теории ЛГ формальную процедуру нахождения равновесной функции $F(T, k)$. Функционал ЛГ имеет вид ($\psi=\varphi e^{i\chi}$)

$$\tilde{F} = \int\limits_V \left\{\frac{\hbar^2}{2m}\left[(\nabla\varphi)^2 + \left(\nabla\chi - \frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\varphi^2\right] - a\varphi^2 + \frac{b}{2}\varphi^4\right\} dV + \frac{1}{8\pi}\int (\operatorname{rot}\mathbf{A})^2 dV, \tag{15}$$

$\varphi$, $\chi$, $\mathbf{A}$ определяются уравнениями ЛГ

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\nabla^2\varphi + \left(\nabla\chi - \frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\varphi\right] - a\varphi + b\varphi^3 = 0, \tag{16}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{17), (18}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{q\hbar}{m}\left(\nabla\chi - \frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\varphi^2. \tag{19}$$

Поскольку термодинамика рассматривает системы конечного объема, для описания токового состояния надо ввести определенные граничные условия на границе тела $S$. Естественные граничные условия для функционала (15), приведенные в [3], имеют вид

$$\left(i\hbar\nabla + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)_n \psi\Big|_S = 0. \tag{20}$$

В наших обозначениях (индекс «$n$» означает нормальную проекцию)

$$\nabla_n \varphi |_S = 0, \tag{20а}$$

$$\left(\nabla\chi - \frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)_n \varphi \Big|_S = 0. \tag{20б}$$

Условие (20а) мы сохраним. Условие (20б) означает равенство нулю нормальной компоненты плотности тока на поверхности $S$, и на токонесущих поверхностях $S_1$, $S_2$ (рис. 1) его надо модифицировать.[1] Эта модификация может быть сделана двумя способами.

1) Можно задать поток $Q$ калибровочно-инвариантного вектора $\nabla\chi - q/\hbar c \cdot \mathbf{A}$ через одну из границ ($S_1$)

$$\int\limits_{S_1} \left(\nabla\chi - \frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)_n dS = Q. \tag{21}$$

2) Можно задать ток $J$ через одну из поверхностей

$$\frac{q\hbar}{m}\int\limits_{S_1} \left(\nabla\chi - \frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)_n \varphi^2 dS = J. \tag{22}$$

Задавать условие на второй поверхности нет надобности, так как уравнения ЛГ содержат уравнение непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$. В обоих случаях полагаем, что $j_n=0$ на боковой поверхности $S_{\text{бок}}$. Хотя в случае «1» ток не задается, отличие $Q$ от нуля заведомо приведет к $J\neq 0$, если только $\varphi$ не равно нулю на $S_1$. В то же время (21) при $Q=0$ в результате минимизации даст бестоковое (основное) состояние.

Покажем, что в случае «1» свободная энергия ЛГ $F$ (значение $\bar{F}$ на экстремалях) может быть представлена как функция $F(k)$ со свойствами свободной энергии феноменологической теории раздела 1, если наложить некоторые условия на калибровку. Представим $\chi$ в виде $k\chi_0+\bar{\chi}$, где $\chi_0$ определена, как ранее, с дополнительным условием $\nabla_n\chi_0=0$ на боковой поверхности. Подставим $\chi=k\chi_0+\bar{\chi}$ в (15)—(19) и продифференцируем $F$ по $k$ при условии, что $\varphi$, $\bar{\chi}$, $\mathbf{A}$ удовлетворяют уравнениям (16)—(19). Получаем

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{\hbar^2}{m}\int\limits_V \operatorname{div}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial k}\nabla\varphi\right)dV + \frac{\hbar}{q}\int\limits_V \operatorname{div}(\chi_0\mathbf{j})\,dV +$$

$$+\frac{\hbar}{q}\int\limits_V \operatorname{div}\left(\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial k}\mathbf{j}\right)dV + \frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial k}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)dV. \tag{23}$$

В последнем интеграле интегрирование ведется по всему пространству. Очевидно, он равен нулю, поскольку $\mathbf{H}|_{r\to\infty}\to 0$. Преобразуя $\int\limits_V$ в $\int\limits_S$, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{\hbar^2}{m}\int\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial k}\nabla_n\varphi dS + \frac{\hbar}{q}\int\limits_S \chi_0 j_n dS + \frac{\hbar}{q}\int\limits_S \frac{\partial\bar{\chi}}{\partial k} j_n dS. \tag{24}$$

Учитывая (20а) и $j_n|_{S_{\text{бок}}}=0$, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{\hbar^2}{m}\left(\int\limits_{S_1}\chi_0 j_n dS + \int\limits_{S_2}\chi_0 j_n dS\right) + \frac{\hbar}{q}\left(\int\limits_{S_1}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial k} j_n dS + \int\limits_{S_2}\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial k} j_n dS\right). \tag{25}$$

Выберем граничные условия для $\bar{\chi}$ в виде

$$\nabla_n\bar{\chi}|_{S_{\text{бок}}} = 0,\ \bar{\chi}|_{S_1} = \bar{\chi}|_{S_2} = C = \text{const}, \tag{26}$$

где $C$ не зависит от $k$. Тогда (25) примет вид $I=\partial F/\partial k$, т. е. термодинамического соотношения (11а). Налагая условия на $\mathbf{A}$

[1] Далее мы наложим определенные граничные условия, поэтому функционал $\bar{F}$ должен варьироваться при нулевых значениях вариации $\varphi$, $\chi$, $\mathbf{A}$ на границах.

$$\operatorname{div} \mathbf{A}=0, \quad A_n|_{S_{бок}} = 0, \quad \int\limits_{S_1} A_n dS = 0, \tag{27}$$

обеспечиваем выполнение (21) условием

$$\int\limits_{S_1} (\nabla\bar{\chi} + k\nabla\chi_0)_n \, dS = Q. \tag{28}$$

Условия (26), (27) (не зависящие явно от $Q$, $k$) не избыточны для уравнений ЛГ и подобраны так, чтобы фиксировать градиентный член $k\Delta\chi_0$. (Если снять ограничения на $\mathbf{A}$, то $k\Delta\chi_0$ можно было бы включить в $\mathbf{A}$ и минимизация привела бы к бестоковому состоянию).[2] Всю процедуру перехода от $Q$ к $k$ можно рассматривать как обобщение «галилеева перехода в систему, где сверхтекучая компонента покоится», а $k\nabla\chi_0$ — как обобщение «сверхтекучей скорости», когда трансляционная инвариантность отсутствует. Итак, мы получили в рамках теории ЛГ свободную энергию $F(T, k)$ токового состояния. Нетрудно видеть, что она не зависит от вида $\chi_0$ $\left(\text{при фиксации условий } \chi_0|_{S_1} = p_1, \ \chi_0|_{S_2} = p_2, \ \nabla_n\chi_0|_{S_{бок}} = 0\right)$, так как разность двух таких функций $\chi_{01} - \chi_{02}$ удовлетворяет условиям (26) и может быть включена в $\bar{\chi}$.

Рассмотренная процедура основывалась главным образом на калибровочно-инвариантной форме функционала ЛГ. Есть все основания думать, что такая процедура может быть проведена без каких-либо приближений, если использовать общее выражение для свободной энергии как функционала от функций Грина и точные уравнения Дайсона с учетом аномальных спариваний, а дополнительные условия налагать на модуль и фазу аномальных спариваний $\langle\psi_\uparrow^+(\mathbf{r})\,\psi_\downarrow^+(\mathbf{r})\rangle$ (это и было намечено в [1]).

Условие (27) интегральное, т. е. оно эквивалентно

$$\left(\nabla\bar{\chi} - \frac{q}{\hbar c}\right)_n\Big|_{S_1} = g(\mathbf{r}), \tag{29}$$

где $g(\mathbf{r})$ — произвольная функция, удовлетворяющая $\int\limits_{S_1} g\,dS = 0$, т. е. $F(k)$ будет функционалом от $g$. Определив $F(k, \{g\})$, можно перейти к реальному токовому ансамблю, находя $\Phi(I, \{g\}) = F - kI$. Функция $g$ определяется минимизацией $\Phi$ по $g$ при заданном $I$, что окончательно решает задачу. (Ясно, что точное определение $g(\mathbf{r})$ означает учет поверхностного вклада в термодинамические величины и во многих случаях не представляет особого интереса).[3]

В отличие от случая «1», где на $S_1$ задана ненаблюдаемая величина $Q$, в случае «2» (22) задает ток через границу. Очевидно, что условие (22) значительно упрощает решение уравнений ЛГ (в них не фигурирует $\chi_0$). Однако в результате мы получим $F$ как функцию $I$, которая не содержит полной информации. В частности, процедуры для определения функции $g$ в условии (22) не существует, так как $F(I)$ не обладает необходимыми экстремальными свойствами. Поэтому решение задачи с условием (22) определяет $F$ с точностью до упомянутого поверхностного вклада, и оно применимо, лишь когда этот вклад несуществен. Так будет, когда длина $L$ образца в направлении распространения тока много больше характерного поперечного размера $l$, т. е. $l/L \ll 1$. Для пленок толщиной $\delta \lesssim \lambda$

---

[2] Заметим, что условие (28) (при выполнении (26), 27)) не гарантирует автоматически $Q \neq 0$ при $k \neq 0$. Но при $Q=0$ минимизация должна привести к основному (бестоковому) состоянию. Для него всегда можно положить $\mathbf{A}=0$. В бестоковом состоянии $j=(\nabla\bar{\chi}+k\nabla\chi_0)\varphi^2=0$, и если $\varphi\neq 0$, во всех точках тела должно быть $\nabla\bar{\chi}+k\nabla\chi_0=0$. Но это невозможно, так как $\bar{\chi}$ и $\chi_0$ удовлетворяют разным граничным условиям, т. е. допущение $Q=0$ при $k\neq 0$ ведет к противоречию.

[3] Понятно, что в пренебрежении поверхностным вкладом условие устойчивости гарантирует лишь отсутствие диссипации в объеме, а приграничные области могут находиться в резистивном состоянии.

условие облегчается, $\lambda/L \ll 1$.[4] Как упоминалось выше, хотя $F(I)$ и не дает полного описания, самое главное — устойчивость — оно определяет.

В рассмотрение могут быть включены вихревые состояния. Они задаются конфигурацией вихревых линий и заданием $\chi$ в виде $\bar{\chi}+k\nabla\chi_0+\nabla\chi_1$, где $\chi_1$ — многозначный потенциал, который можно определить как решение уравнения Лапласа с заданными (квантованными) приращениями при обходе вихревых линий. В этом случае функционал ЛГ принимает вид

$$\bar{F}=\int\left\{\frac{\hbar^2}{2m}\left[(\nabla\varphi)^2+\left(k\nabla\chi_0+\nabla\chi_1+\nabla\bar{\chi}-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\varphi^2\right]-a\varphi^2+\right.$$
$$\left.+\frac{b}{2}\varphi^4\right\}dV+\frac{1}{8\pi}\int(\operatorname{rot}\mathbf{A})^2\,dV, \tag{30}$$

где $k$, $\chi_0$, $\chi_1$ заданы, а минимизация проводится при упомянутых выше условиях и дополнительном условии однозначности

$$\int\limits_l\left(\nabla\bar{\chi}-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)dl=0 \tag{31}$$

по любому контуру $l$. Реальная конфигурация вихревых линий определяется условием минимальности $F$, а устойчивость токового состояния — опять условием (12а). Хотя, как и ранее, функцию $F$ можно определять в переменных $T$, $I$, в этих переменных определение равновесной вихревой конфигурации невозможно (нельзя произвести выбор, когда имеется несколько конфигураций, удовлетворяющих условию (12а)).

## 3. Некоторые примеры

1. Лондоновский предел. В этом случае $\varphi^2=n_0=\text{const}$ и (15)—(19) примут вид

$$\bar{F}=\frac{\hbar^2 n_0}{2m}\int\limits_V\left(\nabla\chi-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2dV+\frac{1}{8\pi}\int(\operatorname{rot}\mathbf{A})^2\,dV,\quad \mathbf{j}=\frac{q\hbar n_0}{m}\left(\nabla\chi-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right),$$
$$\operatorname{div}\mathbf{j}=0,\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{4\pi q\hbar n_0}{mc}\left(\nabla\chi-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right). \tag{32}$$

Условие на токонесущей границе есть

$$J=\frac{q\hbar n_0}{m}\int\limits_{S_1}\left(\nabla\chi-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)_n dS.$$

Из линейности уравнений (32) следует, что величина $\frac{q\hbar n_0}{m}\left(\nabla\chi-\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}\right)$ линейна по $J$, т. е.

$$F(J)=BJ^2, \tag{33}$$

где $B>0$. Поэтому $\partial F/\partial\,|J|=2B\,|J|>0$, т. е. в лондоновском пределе токовое состояние всегда устойчиво (без внешнего магнитного поля).

2. Тонкая пленка (см., например, [4]). Задача о токовом состоянии пленки толщиной $\delta$, когда $\delta\ll\xi$, $\lambda$ ($\xi$, $\lambda$ — длина корреляции и глубина проникновения соответственно), в рамках теории ЛГ решается точно. На этом примере легко продемонстрировать применение развитого подхода к решению конкретных задач. При $\delta\ll\xi$, $\lambda$ можно считать $\varphi$ постоянным, а $\chi$ меняющейся вдоль направления тока $x$. Также при $\delta\ll\lambda$ можно пренебречь магнитным полем, создаваемым током во всей области значений тока, включая критическое значение, т. е. положить $\mathbf{A}=0$. Таким образом, задача становится задачей о сверхтекучести (и одномерной).

Функционал ЛГ имеет вид

$$\bar{\bar{F}}=\bar{F}\,\frac{b}{a^2}=\int\limits_0^L\left(f'^2+\chi'^2f^2-f^2+\frac{1}{2}f^4\right)dx. \tag{34}$$

---

[4] $\lambda$ — глубина проникновения.

Мы ввели $\varphi^2=af^2/b$, длины измеряются в единицах $\xi=\sqrt{\hbar^2/2ma}$, $L$ — длина образца. Уравнения ЛГ есть

$$-f''+\chi'^2 f - f + f^3 = 0, \tag{35}$$

$$j(x) = 2\chi' f^2, \quad \frac{d}{dx} j(x) = 0. \tag{36}$$

Токовая переменная $I$ в соответствии с определением (10) равна

$$I = 2L\chi' f^2. \tag{37}$$

Рассмотрим случаи «1» и «2» (раздел 2) для этой задачи.

1) Задана фазовая переменная $k$. В нашем случае $\chi_0=x$, а решение, удовлетворяющее граничным условиям, есть $f^2=1-k^2=\mathrm{const}$, $\chi=\mathrm{const}$. Для свободной энергии $\tilde{F}(k)$ получаем

$$\tilde{F}(k) = -\frac{L}{2}(1-k^2)^2. \tag{38}$$

Находим токовую переменную

$$I = \partial\tilde{F}/\partial k = 2L(k-k^3) \tag{39}$$

и получаем условие устойчивости

$$\partial I/\partial k = 2L(1-3k^2) > 0, \tag{40}$$

состояние устойчиво при $k < k_c = 1/3$, т. е. при $I < I_c$, где

$$I_c = 4L/3\sqrt{3}. \tag{41}$$

Можно показать, что условие положительности второй вариации $\tilde{F}$ совпадает с условием (41). При $I > I_c$ $\tilde{F}$ не имеет минимума и состояние при $I > I_c$ следует интерпретировать как резистивное.

2) Задана токовая переменная. Условие (22) в силу (36), (37) принимает вид

$$2L\chi' f^2 = I, \tag{42}$$

решение (35) есть $f^2=u$ постоянная, определяемая уравнением

$$I^2/4L^2 = u^2 - u^3. \tag{43}$$

Получаем для свободной энергии

$$\tilde{F} = -Lu^2/2. \tag{44}$$

Она определена как функция $I$ параметрически (43). Критерий устойчивости (14) принимает вид

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial|I|} = -2\frac{u\sqrt{1-u}}{2-3u} > 0, \tag{45}$$

откуда следует $u > u_c = 2/3$. Подставляя это в (43), получаем для $I_c$ опять (41). Нетрудно видеть, что при $I < I_c$ имеются два решения (43) для данного значения тока, соответственно две ветви $\tilde{F}(I)$ как функции $I$ (рис. 3). Значения $u$ нижней ветви лежат в интервале $u_c < u < 1$, а верхней $0 < u < u_c$, т. е. устойчивым состояниям отвечает нижняя ветвь. Точка $I_c$ является точкой окончания функции $F(I)$. (Представляется интересным выяснить, не может ли реализовываться случай, показанный на рис. 3 штриховой линией: он соответствует появлению новой ветви токовых состояний при $I > I'_c$, $I'_c > I_c$. В этом случае при возрастании тока от нуля наблюдалась бы последовательность: сверхпроводящее состояние—резистивное—сверхпроводящее).

Когда ранее (раздел 1) утверждалось, что $F(I)$ не дает полного термодинамического описания, имелось в виду, что $F(I)$ не позволяет определить термодинамические характеристики при заданных $T$, $I$ локально (посредством дифференцирований). Однако если $F(I)$ определена для достаточно широкой области изменения $I$, оказывается возможными определить уравнение состояния в форме $k=k(T, I)$ посредством интегрирования уравнения типа Гиббса—Гельмгольца и, используя соображения, аналогичные постулату Нернста, полностью определить уравнение состояния по заданному виду $F(T, I)$. В соответствии с определением $\Phi(T, I)$ имеем

$$F(T, I)=\Phi(T, I)+kI=\Phi(T, I)-I\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I}\right)_T=-I^2\left(\frac{\partial}{\partial I}\frac{\Phi}{I}\right)_T. \quad (46)$$

Интегрируя, получаем

$$\Phi(T, I)=-I\int^I\frac{dI'}{I'^2}F(T, I')+IC(T)=F(I)-I\int^I\frac{dI'}{I'}\left(\frac{\partial F}{\partial I'}\right)_T+IC(T), \quad (47)$$

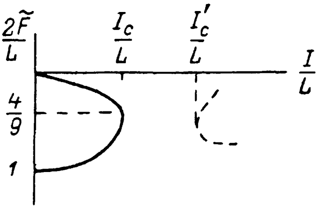


Рис. 3. Свободная энергия пленки как функция $I$.

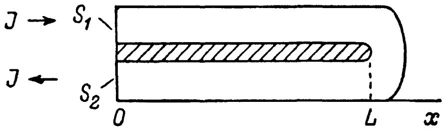


Рис. 4. Система двух пленок со слабой связью.

Заштрихован джозефсоновский туннельный слой.

$C(T)$ — неопределенная функция температуры. Дифференцируя по $I$, имеем

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I}\right)_T=-k=-\int^I\frac{\partial I'}{I'}\left(\frac{\partial F}{\partial I'}\right)_T+C(T). \quad (48)$$

Перейдем от интегрирования по $I'$ к интегрированию по $u$. Учитывая (43), (44), получаем

$$k=\frac{1}{2}\int^u\frac{du}{\sqrt{1-u}}-C=\sqrt{1-u}-C(T). \quad (49)$$

Наложим условие, чтобы устойчивому бестоковому состоянию (как нетрудно убедиться, для него $u=1$) соответствовало бы $k=0$. Это обеспечивается выбором $C=0$. Условие носит универсальный характер, оно соответствует такому выбору калибровки гамильтониана, при котором оператор кинетической энергии вещественен $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right.$, но не $-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla+i\mathbf{a})^2$, $\left.\mathbf{a}\neq 0\right)$. В силу этой универсальности указанное условие будет выполняться при всех температурах (если бы мы приписали бестоковому состоянию значение $k\neq 0$, то оно зависело бы от температуры). Очевидно, (49) совпадает с полученным для случая «1» соотношением $u=f^2=1-k^2$.

Ясно, что область применимости указанного приема (как и постулата Нернста) ограничена, поскольку требует знания $F(I)$ в достаточно широкой области значений $I$, включая окрестность бестокового состояния. К тому же информация об уравнении состояния играет второстепенную роль по сравнению с условием устойчивости. Отметим известное сходство этого приема с использованием постулата Нернста.

3) Две тонкие пленки со слабой связью (рис. 4). Пленки толщиной $\ll \xi, \lambda$ связаны джозефсоновским слоем и соединены на правом конце. Такая система включена в токовую цепь, как показано на рис. 4. Ток приводит к градиенту фазы $\nabla\chi_1(x)$, $\nabla\chi_2(x)$ в каждой из пленок. Разность фаз $\chi_1(x)-\chi_2(x)$ приводит к джозефсоновскому току с плотностью $j(x)\sim$

$\sim \sin(\chi_1-\chi_2)$. Можно сказать, что в возникшем состоянии имеется фазовая корреляция токов в пленках 1, 2. Такую задачу можно рассмотреть в рамках теории ЛГ (хотя она непригодна в области джозефсоновского слоя, можно надеяться, что фазовые соотношения, приводящие к указанной корреляции, она описывает правильно). Решение этой задачи при заданном $k$ затруднительно, так как соответствующий потенциал $\chi_0$ имеет сложный вид. В то же время при заданной токовой переменной $I$ в разумном приближении свободная энергия $F(I)$ может быть найдена, а устойчивые состояния определяются условием (14). Решение этой задачи здесь не приводится.[5] Укажем лишь, что в некоторой области значений $J$ с изменением тока система проходит цепочку фазовых переходов I рода с возможной реализацией метастабильных состояний. Такой переход соответствует N-образной (ван-дер-ваальсовой) особенности уравнения состояния (рис. 5, *а*). (Картина имеет некоторое сходство с поведением кольца с одним джозефсоновским переходом [5], но там особенность порождена индуктивностью кольца).

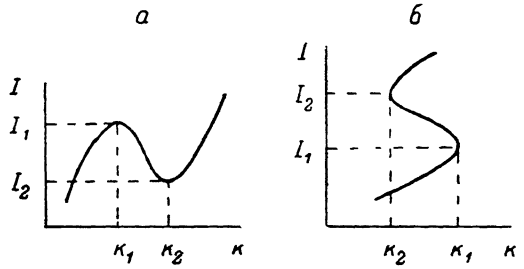


Рис. 5. Ван-дер-ваальсовы особенности токовых состояний.

Отметим, что S-образная особенность уравнения остояния привела бы к упоминавшейся выше резистивной «щели» в области $I_1$, $I_2$ (рис. 5, *б*).

## 4. Обсуждение результатов

Своеобразие термодинамики токового состояния сверхпроводника заключено в том, что статистический ($k$-) ансамбль с заданной фазовой переменной $k$ не реализуется (это обнаруживается уже при чисто феноменологическом подходе). Это неудивительно, так как введение $k$ связано с условиями на калибровку, и реализация состояния с заданным $k$ означала бы существование наблюдаемых эффектов, зависящих от калибровки. В то же время эти условия имеют макроскопический характер: переменная $k$ имеет смысл интенсивной термодинамической величины, а условия (26), (27) явно макроскопические, т. е. во всех прочих отношениях — это обычный термодинамический ансамбль. Однако термодинамически сопряженный токовый ансамбль реализуется условиями, которые можно осуществить в эксперименте; эти условия не связаны с калибровкой. Таким образом, фиктивный $k$-ансамбль, который может быть построен на основе принципов статистической механики, играет роль необходимого промежуточного звена при построении токового ансамбля. $k$- и $I$-ансамбли связаны уравнением состояния, которое является ненаблюдаемым. Основным результатом в приложениях является условие устойчивости (12а). Оно дает возможность отбирать реализующиеся токовые состояния, сводя эту задачу к нахождению свободной энергии. Без этого условия задачу об устойчивости пришлось бы решать «в лоб» путем исследования второй вариации функционала ЛГ (или устойчивости уравнений Горькова и т. п.), что затруднительно для достаточно сложных систем. Важно, что условие устойчивости кон-

[5] Такая задача была поставлена в [6], однако использованное там условие устойчивости ошибочно и результат неверен (см. исправление [7]).

тролируется и тогда, когда $F$ задана в переменных $T$, $I$ (14). (Решение уравнений ЛГ значительно упрощается, если задано $I$, а не $k$). При отборе решений надо учитывать, что при заданном $k$ состоянием термодинамического равновесия является состояние с минимальным $F$, а при заданном $I$ — с минимальным $\Phi = F - kI$.

Статические флуктуации $k$, имеющие место в $I$-состоянии, не проявляются физически. Однако временны́е флуктуации $k$ реализуются как электрическое поле и могут в принципе наблюдаться в окрестности точек неустойчивости. Условие устойчивости (12а) имеет наглядный смысл. Пусть во включенном в токовую цепь сверхпроводнике произошло флуктуационное возрастание $k$ ($\dot{k} \neq 0$). Согласно (8), это сопровождается появлением электрического поля $\mathbf{E}$, совпадающего по направлению с током (рис. 1, *а*). Если $(\partial I/\partial k)_T > 0$, тогда и ток в сверхпроводнике возрастет, что выведет его из равновесия с токовой цепью; вследствие этого на границах сверхпроводника возникнут заряженные области, создающие поле $\mathbf{E}'$, направленное противоположно $\mathbf{E}$. В результате флуктуации $k$ будут затухать. При $(\partial I/\partial k)_T < 0$ указанный механизм приведет к росту флуктуации $k$, т. е. к неустойчивости токового состояния.

Заметим, что статический эффект Джозефсона полностью описывается в рамках приведенной в статье термодинамической схемы. Здесь в уравнении состояния $I = f(T, k)$ $f$ является периодической функцией фазовой переменной $k$.

Развитый в статье подход представляется практически полезным при исследовании токовых состояний систем со слабой связью. Как видно из рассмотрения простейшей задачи такого рода (раздел 3, п. 3), в таких системах возможны нетривиальные эффекты. Особый интерес представило бы обнаружение систем с упомянутой в разделе 3 резистивной «щелью».[6]

Набор стационарных состояний, подобных токовым, существует не только в случае ODLRO. Так, $xy$-ферромагнетик феноменологически описывается моделью ЛГ (при $\mathbf{A} = 0$). Параметр порядка есть $\psi = S_x + iS_y$, $S_x$, $S_y$ — проекции плотности спинового момента. Состояние с заданным $k$ является спиральной конфигурацией спинов вдоль направления $z$

$$S_x = S_0 \cos kz, \quad S_y = S_0 \sin kz.$$

В $I$-состоянии магнитной модели (как нетрудно убедиться, рассматривая соответствующую микроскопическую модель) роль тока играет спиновый ток $\left(\text{с плотностью } j_s = \frac{i\hbar}{2m}(\psi_\uparrow^+ \nabla_z \psi_\uparrow - \psi_\downarrow^+ \nabla_z \psi_\downarrow - \text{э. с})\right)$. Поскольку реализовать токовую цепь для спинового тока невозможно (к тому же в отличие от обычного тока спиновый ток не сохраняется при учете спин-орбитального взаимодействия; это несохранение может быть интерпретировано как нарушение соответствующей калибровочной инвариантности), то в магнитном случае токовый ансамбль не реализуется, т. е. нет макроскопических условий (соответствующей внешней токовой цепи), при которых мог бы существовать равновесный спиновый сверхпоток. Хотя $k$-ансамбль в магнитном случае в принципе и может быть реализован, он также не приведет к стационарному токовому состоянию из-за несохранения спинового тока.

Ради курьеза отметим следующее обстоятельство. Термодинамическое рассмотрение токового состояния (в духе раздела 1) вполне могло бы быть проведено сразу после открытия сверхпроводимости (1911 г.). В доквантовую эпоху соображения, подобные теореме Бора—ван Левен (о несуществовании равновесного магнетизма), немедленно привели бы к заключению о принципиальной невозможности токового равновесного состояния. Однако после создания квантовой механики вытекающая из термодинамического рассмотрения необходимость условий на калибровку

[6] Подобный эффект наблюдался на $S$—$N$—$S$ переходе [8].

могла бы способствовать тому, что идея ODLRO родилась бы значительно раньше, чем это случилось в действительности.

Автор благодарен В. В. Брыскину, С. Н. Дороговцеву, С. А. Ктиторову, С. Т. Павлову, Ю. А. Фирсову, Г. Ю. Яшину за полезные обсуждения. Определяющую роль в формированиях термодинамических представлений автора сыграло общение с покойным Ю. Н. Образцовым.

## Литература

[1] *Кудинов Е. К.* ФТТ, 1984, т. 26, № 10, с. 3122—3130; 1985, т. 27, № 6, с. 1915.
[2] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 166 с.
[3] *Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.* ЖЭТФ, 1950, т. 20, № 12, с. 1064—1082.
[4] *Де Жен П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
[5] *Солимар Л.* Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М.: Мир, 1974.
[6] *Кудинов Е. К., Яшин Г. Ю.* ФТТ, 1987, т. 29, № 7, с. 1937—1942.
[7] *Кудинов Е. К., Яшин Г. Ю.* ФТТ, 1988, т. 30, № 6, с. 1916.
[8] *Mitani M., Aihara K., Hara N.* Appl. Phys. Lett., 1971, vol. 18, p. 489.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
1 февраля 1988 г.