

УДК 538.22

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ И СОПРОТИВЛЕНИЕ МНОГОЗАТВОРНЫХ ХОЛЛОВСКИХ СТРУКТУР

Ф. О. Александров, Е. Л. Альтшулер, Н. Н. Трунов

Рассмотрена многозатворная МДП структура, разные части которой находятся в различных холловских режимах. Показано, что аналогично случаю однозатворной структуры ток может попадать в область с иной холловской проводимостью лишь через точки стыков границ областей. Предложен метод, позволяющий вычислять распределение токов между этими точками и полное сопротивление структуры в зависимости от соотношения между холловскими проводимостями составляющих структуру областей. Приведен расчет для нескольких простых случаев.

В работах [1, 2] было показано, что в условиях квантового эффекта Холла ( $\sigma_{xx}=0$ ,  $\sigma_{xy}=ne^2/h$ ) ток в образец может втекать и вытекать из него лишь через особые точки на стыках электродов и границ образца (рис. 1). Электроды и границы образца между этими точками образуют эквипотенциальную линию. В работе [1] также было показано, что асимптотика потенциала вблизи особой точки имеет вид ( $\sigma_{xx} \ll \sigma_{xy}$ )

$$\varphi_{A,B}(r; \theta) = \varphi_{s,d} + A_{A,B} r^{s_{A,B}} \sin s_{A,B} \theta, \quad (1)$$

где  $\operatorname{tg} s_{A,B} \delta_{A,B} = \sigma_{xx}/\sigma_{xy}$ , следовательно,

$$s_{A,B} \approx \frac{1}{\delta_{A,B}} \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}}, \quad (2)$$

$\delta_{A,B}$  — угол между электродом и свободной границей (рис. 1)

$$A_{A,B} = I/\sigma_{xx}, \quad (3)$$

$I$  — ток исток—сток. В холловском режиме ( $\sigma_{xx}=0$ ) в точках  $A, B$  потенциал испытывает скачок, связанный с током  $I = \sigma_{xy} U_{A,B} = \sigma_{xy} U_{s,d}$ , где  $U_{A,B}$  — скачок потенциала в точках  $A, B$  между электродом и свободной границей образца,  $U_{s,d}$  — напряжение между электродами исток—сток.

Вблизи точки  $E$  уравнение для  $s$  принимает вид

$$\operatorname{tg} s \delta = -\sigma_{xx}/\sigma_{xy},$$

и так как  $s$  должно быть больше нуля (потенциал не может иметь особенности), то наименьшее возможное значение  $s$  берется с другой ветви тангенса  $s_E \approx \tau/\delta_E$  и напряженность и ток в точке  $E$  равны нулю. При изменении направления магнитного поля ( $\sigma_{xy} \rightarrow -\sigma_{xy}$ ) потенциал будет испытывать скачки в точках  $C, E$ .

Как показано в [1], диссипация энергии в особых точках  $A, B$

$$W_A = W_B = \int ds j \cdot E = \frac{I^2}{2\sigma_{xy}}. \quad (4)$$

В работе [3] экспериментально исследовалась двухзатворная МДП структура, две части которой находились в различных холловских режимах. Было обнаружено, что в точке  $G$  имеется скачок потенциала  $\varphi_{G'} - \varphi_{G''} = I (1/\sigma_{xy_1} - 1/\sigma_{xy_2})$  (рис. 2). Это явление в [3] ошибочно связывалось с разностью химических потенциалов электронов в областях с разными  $\sigma_{xy}$ . Энергия электронов в различных областях образца равна энергии Ферми электронов в полупроводнике. Поэтому основное граничное условие для такой структуры  $\varphi_1 = \varphi_2$ , где  $\varphi_1, \varphi_2$  — потенциалы по разную сторону границы.

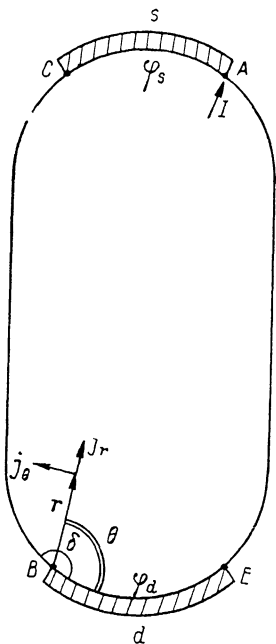


Рис. 1. Однозатворная МДП структура.  $s, d$  — электроды исток—сток;  $\varphi_s, \varphi_d$  — потенциалы электродов  $s, d$ ;  $I$  — ток, протекающий через точки  $A, B$ ;  $j_r, j_\theta$  — проекции плотности тока на единичные орты вдоль  $dr$  и  $d\theta$ .

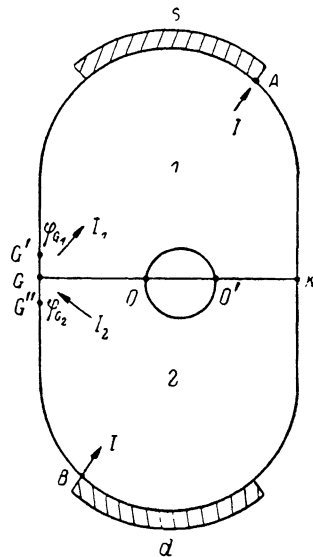


Рис. 2. Двухзатворная МДП структура, последовательное соединение.

$I$  — полный ток исток—сток, протекающий через точки  $A, B$ ;  $I_1, I_2$  — токи, текущие через точку  $G$  в областях 1 и 2 соответственно, стрелками показаны их направления;  $\varphi_{G_1}, \varphi_{G_2}$  — потенциалы границ  $GA, GB$  соответственно.

Как показано в [1], в холловском режиме ( $\sigma_{xx_{1,2}} = 0$ )

$$I = \sigma_{xy_1} (\varphi_0 - \varphi_{0'}), \quad (5)$$

где  $I$  — ток, протекающий через контур  $OO'$ ;  $\varphi_0, \varphi_{0'}$  — потенциалы на концах этого контура. Путь точки  $O'$  и  $O$  лежат на границе двух холловских структур, тогда, проводя контур  $OO'$  двумя способами (рис. 2), получим

$$I = \sigma_{xy_1} (\varphi_0 - \varphi_{0'}) = \sigma_{xy_2} (\varphi_0 - \varphi_{0'}), \quad (6)$$

откуда видно, что при  $\sigma_{xy_1} \neq \sigma_{xy_2}$  ток через границу может протекать лишь через особые точки  $G$  и  $K$  на стыках границ, а сама граница является эквипотенциальной линией (в пределе  $\sigma_{xx} = 0$ ).

В данной работе исследуются многозатворные МДП структуры и предлагается метод, позволяющий высчитать сопротивление структуры  $R_{sd}$  и распределение токов для случая сколь угодно большого числа областей с различными  $\sigma_{xy}$ . В случае образца произвольной формы это можно сделать, находя из уравнения  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  асимптотики  $\mathbf{j}(r; \theta)$  плотностей токов в окрестностях особых точек и полные токи, протекающие через них. При этом ток, протекающий через особую точку, отличен от нуля только

при выполнении определенного неравенства на  $\sigma_{xy}$  для прилегающих областей. Затем, написав систему уравнений Кирхгофа и решив ее, можно связать эти токи с полным током исток—сток.

Этот способ оказывается слишком сложным уже для случая контакта с числом областей, большим трех. Напишем поэтому систему уравнений Кирхгофа для токов, текущих через особые точки, не решая локального уравнения  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ . Оказывается, что в этой системе неизвестных токов больше, чем уравнений. Но поскольку для токов, текущих в различных частях образца, из уравнения  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  не может возникнуть никаких других соотношений, кроме законов Кирхгофа, то это означает, что часть из них должна быть равна нулю. Поэтому можно полагать произвольно выбранные токи равными нулю (столько, сколько нужно, чтобы система уравнений однозначно решалась), а потом находить, какому соотношению между  $\sigma_{xy}$  для различных областей это соответствует.

1. Рассмотрим контакт, изображенный на рис. 2. Записав асимптотики потенциалов в окрестности точки  $G$  в виде (1) и поставив в качестве граничных условий  $\varphi_1 = \varphi_2$  и  $j_{\theta_1} = j_{\theta_2}$  (равенство нормальных компонент плотности тока через границу), получим систему

$$\begin{aligned} \varphi_1(r; \theta) &= A_1 r^s \sin s(\theta - \alpha_1), \quad \varphi_2(r; \theta) = A_2 r^s \sin s(\theta - \alpha_2), \\ \varphi_1\left(r; \frac{\pi}{2}\right) &= \varphi_2\left(r; \frac{\pi}{2}\right), \quad j_{\theta_1}\left(r; \frac{\pi}{2}\right) = j_{\theta_2}\left(r; \frac{\pi}{2}\right), \quad j_{\theta_1}(\infty) = j_{\theta_2}(\infty) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$j_{\theta_i} = -\sigma_{xy_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} - \sigma_{xx_i} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta}. \quad (8)$$

Эту систему можно решить, считая  $s$  малым и разлагая по  $s$  и  $\sigma_{xx}$  до первого порядка. При этом если окажется, что  $s < 0$ , то это означает, что предположение о малости  $s$  было неверным, истинное значение  $s$  надо брать с другой ветви функции тангенса и особенности в соответствующей точке нет. Коэффициенты  $A_1, A_2$  можно выразить через соответствующие токи и  $s$  (предполагая, что  $s \sim \sigma_{xx}$  и  $s > 0$ ) из формул для токов

$$I_1 = - \int_0^{\pi/2} r d\theta j_{r_1}(r; \theta), \quad I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} r d\theta j_{r_2}(r; \theta) \quad (9)$$

и можно вместо одного из уравнений системы граничных условий использовать уравнение

$$I_1 = I_2 = I, \quad (10)$$

где  $I$  — полный ток через образец. Из (9) и (10) имеем

$$-A_1 \sigma_{xy_1} s \frac{\pi}{2} = A_2 \sigma_{xy_2} s \frac{\pi}{2} = I. \quad (11)$$

Отметим также, что диссипацию энергии в точке  $G$  ( $K$ ) можно выразить через  $s$ , не решая систему (7), а воспользовавшись соотношением (11)

$$W_G = \frac{I^2}{\pi s} \frac{\sigma_{xy_1}^2 \sigma_{xx_2} + \sigma_{xy_2}^2 \sigma_{xx_1}}{\sigma_{xy_1}^2 \sigma_{xy_2}}. \quad (12)$$

Решая (7), имеем

$$s_G \approx \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_{xy_1}^2 \sigma_{xx_1} + \sigma_{xy_2}^2 \sigma_{xx_2}}{\sigma_{xy_1} \sigma_{xy_2} (\sigma_{xy_2} - \sigma_{xy_1})}. \quad (13)$$

При решении аналогичной системы для точки  $K$  найдем

$$s_K \approx \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_{xy_1}^2 \sigma_{xx_1} + \sigma_{xy_2}^2 \sigma_{xx_2}}{\sigma_{xy_1} \sigma_{xy_2} (\sigma_{xy_1} - \sigma_{xy_2})}. \quad (14)$$

Ток, как и для случая простых структур, протекает через точку, для которой  $s > 0$  ( $\operatorname{tg} s\pi/2 > 0$ ). Пусть для определенности это точка  $G$  ( $\sigma_{xy_2} > \sigma_{xy_1}$ ). Рассмотрим контур  $G'G''$  (рис. 2). Из (5) следует, что скачок потенциала в точке  $G$

$$\varphi_{G'} - \varphi_{G''} = I \left( \frac{1}{\sigma_{xy_1}} - \frac{1}{\sigma_{xy_2}} \right), \quad (15)$$

что соответствует [3]. Суммируя скачки потенциала в точках  $B$  и  $G$  и зная, что эта сумма равна полному напряжению  $U_{sd}$ , найдем полное сопротивление структуры

$$R_{sd} = 1/\sigma_{xy_1}. \quad (16)$$

Как и указывалось в [3], оно равно большему из холловских сопротивлений. Вычислим также диссипацию энергии в точке  $G$

$$W_G = \frac{1}{2} I^2 \left( \frac{1}{\sigma_{xy_1}} - \frac{1}{\sigma_{xy_2}} \right) \quad (17)$$

и, суммируя с диссипацией энергии на электродах, получим  $W = I^2 R_{sd}$ . Отметим, что поправки к наблюдаемым величинам (ток, напряжение), связанные с неидеальностью, имеют порядок  $\sigma_{xx}/\sigma_{xy}$  [4].

2. Аналогично решается задача о двух параллельно соединенных холловских проводниках (рис. 3). Ток может втекать в образец и вытекать из него через точки  $A, B$  и одну из двух точек  $G$  и  $K$ . В окрестности точки  $G$  (рис. 3) асимптотики потенциалов в первой и второй областях выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r; \theta) &= \varphi_d + A_1 r^s \sin s(\pi - \theta), \\ \varphi_2(r; \theta) &= \varphi_d + A_2 r^s \sin s\theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Граничные условия

$$\varphi_1(r; \pi/2) = \varphi_2(r; \pi/2),$$

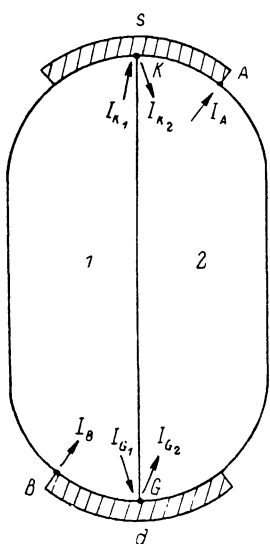


Рис. 3. Двухзатворная МДП структура, параллельное соединение.

Стрелками показаны направления токов, протекающих через точки  $A, B, G, K$ .

$$j_{\theta_1}(r; \pi/2) = j_{\theta_2}(r; \pi/2). \quad (19)$$

Отсюда находим

$$s_G \approx \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_{xx_1} + \sigma_{xx_2}}{\sigma_{xy_2} - \sigma_{xy_1}}. \quad (20)$$

Аналогичные условия для точки  $K$  дают

$$s_K \approx \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_{xx_1} + \sigma_{xx_2}}{\sigma_{xy_1} - \sigma_{xy_2}}. \quad (21)$$

Ток в холловском режиме будет протекать через ту точку, в которой  $s > 0$ . При этом в отличие от предыдущего случая (рис. 2), в котором ток по разные стороны границы был одинаков, а испытывал скачок потенциал, здесь потенциал электрода слева и справа один и тот же, а в точке  $G$  ( $K$ ) происходит дополнительное натекание (стекание) тока в образец. В случае  $s_G > 0$  ( $\sigma_{xy_2} > \sigma_{xy_1}$ )  $I_{G_{1,2}} = \sigma_{xy_{1,2}} U_G$ , где  $U_G$  — напряжение между электродом  $d$  и границей раздела областей;  $I_{G_{1,2}}$  — токи, текущие в точке  $G$  в областях 1, 2,

$$I_{G_2} = \frac{\sigma_{xy_2}}{\sigma_{xy_1}} I_{G_1}. \quad (22)$$

Разность потенциалов между электродами исток—сток |

$$U_{sd} = I_{G_2} / \tau_{xy_2} = I / \tau_{xy_2}, \quad (23)$$

и, следовательно, сопротивление структуры

$$R_{sd} = 1 / \sigma_{xy_2} \quad (24)$$

равно меньшему из холловских сопротивлений, как и указывалось в [3]. При этом диссипация в точке  $G$

$$W_G = \frac{1}{2\sigma_{xy_2}^2} (\sigma_{xy_2} - \tau_{xy_1})^2 I^2. \quad (25)$$

Суммируя диссипации в точках  $B$ ,  $G$ ,  $A$ , получим

$$W = \frac{1}{\sigma_{xy_2}} I^2 = I^2 R_{sd}. \quad (26)$$

Приведенные выше результаты могут быть получены и другим способом — непосредственно из уравнений Кирхгофа. Для вычисления распределения токов в более сложных, чем рассмотренные выше, структурах этот способ значительно проще. Для примера рассмотрим уже изученное соединение (рис. 3) и напишем для токов, текущих в окрестностях особых точек, правила Кирхгофа

$$\begin{aligned} -I_B + I_{G_1} + I_{K_1} &= 0, \quad I_A - I_{G_2} - I_{K_2} = 0, \quad I_B + I_{G_2} - I_{G_1} = I, \\ I_{G_2} &= \frac{\sigma_{xy_2}}{\sigma_{xy_1}} I_{G_1}, \quad I_{K_1} = \frac{\sigma_{xy_1}}{\sigma_{xy_2}} I_{K_2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Эта система из шести уравнений с шестью неизвестными вырождена и, как уже указывалось выше, не может быть дополнена никакими уравнениями, кроме равенства нулю токов в окрестности некоторых особых точек. Положим произвольно  $I_{K_1} = I_{K_2} = 0$ . Тогда система перестает быть вырожденной и мы приходим к результатам (23), (24). Теперь остается установить, какому соотношению между  $\sigma_{xy_1}$  и  $\sigma_{xy_2}$  соответствует предположение  $I_{K_{1,2}} = 0$ . Для этого, используя потенциал вида (18) и формулы (9), не решая системы граничных условий (19), выразим диссипацию в точке  $G$  через неизвестную функцию проводимостей  $s_G$

$$W_G = \frac{\pi}{4} s_G \frac{(\sigma_{xy_2} - \tau_{xy_1})^2}{\sigma_{xx_1} + \tau_{xx_2}} \frac{I^2}{\sigma_{xy_2}^2}. \quad (28)$$

Полная диссипация

$$W = W_A + W_B + W_G = I^2 R_{sd}, \quad (29)$$

и, зная (4),

$$W_A = I_A^2 / 2\sigma_{xy_2}, \quad W_B = I_B^2 / 2\tau_{xy_1},$$

$I_A = I$ ,  $I_B = (\sigma_{xy_1} / \sigma_{xy_2}) I$ , находим из (29)  $s_G$ . И поскольку для того чтобы ток тек в точке  $G$ , необходимо выполнение условия  $s_G > 0$ , то  $\sigma_{xy_2} > \sigma_{xy_1}$ . Аналогично можно решить задачу и для структуры на рис. 2.

3. Рассмотрим теперь контакт трех различных холловских проводников (рис. 4). Распределение токов в таком образце также можно найти, действуя двумя описанными выше способами. Асимптотики потенциалов в окрестности точки  $L$  (рис. 4) ищем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(r; \theta) &= A_1 r^s \sin s(\theta - \alpha_1), \\ \varphi_2(r; \theta) &= A_2 r^s \sin s(\theta - \alpha_2), \\ \varphi_3(r; \theta) &= A_3 r^s \sin s(\theta - \alpha_3). \end{aligned} \quad (30)$$

Решая задачу первым способом, запишем систему граничных условий, выражающую равенство потенциалов вдоль границ и равенство нормальных компонент плотности тока  $j_{\theta_2}$

$$\varphi_1\left(r; \frac{\pi}{2}\right) = \varphi_2\left(r; \frac{\pi}{2}\right), \quad \varphi_1(r; 0) = \varphi_3(r; 2\pi), \quad \varphi_2(r; \pi) = \varphi_3(r; \pi),$$

$$j_{\theta_1}\left(r; \frac{\pi}{2}\right) = j_{\theta_2}\left(r; \frac{\pi}{2}\right); \quad j_{\theta_1}(r; 0) = j_{\theta_3}(r; 2\pi), \quad j_{\theta_2}(r; \pi) = j_{\theta_3}(r; \pi). \quad (31)$$

Коэффициенты  $A_i$  можно связать с токами  $I_i$  соотношениями, аналогичными (9), откуда получим

$$I_1 = -A_1 s_L \frac{\pi}{2} \sigma_{xy_1}, \quad I_2 = -A_2 s_L \frac{\pi}{2} \sigma_{xy_2}, \quad I_3 = -A_3 s_L \pi \sigma_{xy_3}. \quad (32)$$

Выразив коэффициенты  $A_i$  через токи, можно вместо двух уравнений системы (31) решать более простые уравнения Кирхгофа для токов, текущих в окрестности точки  $L$

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= 0, \\ \frac{I_1}{\sigma_{xy_1}} + \frac{I_2}{\sigma_{xy_2}} + \frac{I_3}{\sigma_{xy_3}} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Решая систему (31) с учетом (33) и в первом порядке по  $s_L$  и  $\sigma_{xx}$ , получим

$$s_L \simeq \frac{1}{\pi} \frac{2\sigma_{xx_1} \Delta_{21}^2 + 2\sigma_{xx_2} \Delta_{13}^2 + \sigma_{xx_3} \Delta_{21}^2}{\Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{23}}, \quad (34)$$

$$\Delta_{ik} = \sigma_{xy_i} - \sigma_{xy_k}. \quad (35)$$

Теперь, зная  $s_L$  и асимптотики потенциалов в окрестностях точек  $A, B, G, K, \Gamma$ , нетрудно, используя закон сохранения тока, найти распределение токов во всем образце.

Отметим, что все «боковые» точки  $G, K, \Gamma$  не могут быть открыты или закрыты одновременно, так как невозможно написать соответствующего неравенства на  $\sigma_{xy_{1,2,3}}$  из условий  $s_{G, K, \Gamma} > 0$ . Следовательно, всегда хотя бы один из токов  $I_{G, K, \Gamma}$  равен нулю.

Важно также понимать, что условие  $s > 0$  является необходимым для возможности протекания тока в соответствующей точке, но недостаточным, так как еще необходимо, чтобы выполнялось  $A \sim 1/\sigma_{xx}$ . Поэтому течет ток в окрестности данной точки или нет, определяется только из решения системы уравнений Кирхгофа.

Можно найти распределение токов в этом образце и не находя  $s_L$  из системы (31). Для этого выпишем систему уравнений Кирхгофа для токов,

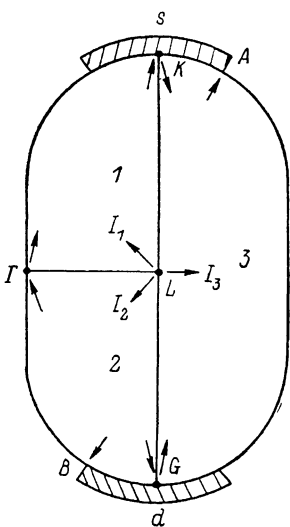


Рис. 4. Трехзатворная МДП структура.

Стрелками показаны направления токов.  $I_1, I_2, I_3$  — токи, текущие через точку  $L$  в областях 1, 2, 3 соответственно.

протекающих во всем образце (рис. 4). Из десяти токов  $I_{L_{1,2,3}}, I_{G_{2,3}}, I_G, I_{K_{1,3}}, I_A, I_B$  шесть протекает в окрестностях разных точек, а четыре других выражаются через них из (22) и (33)

$$\begin{aligned} I_{G_3} &= \frac{\sigma_{xy_3}}{\sigma_{xy_2}} I_{G_2}, \quad I_{K_3} = \frac{\sigma_{xy_3}}{\sigma_{xy_1}} I_{K_1}, \\ I_{L_2} &= \frac{\sigma_{xy_2}}{\sigma_{xy_1}} \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{32}} I_{L_1}, \quad I_{L_3} = \frac{\sigma_{xy_3}}{\sigma_{xy_1}} \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{32}} I_{L_1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Для шести токов, текущих в разных точках структуры, из закона сохранения тока имеем систему

$$\begin{aligned}
I_B + I_\Gamma + I_{G_2} - I_{L_1} \frac{\sigma_{xy_2}}{\sigma_{xy_1}} \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{32}} &= 0, \\
I_{K_1} - I_\Gamma - I_{L_1} &= 0, \\
I_A - \frac{\sigma_{xy_2}}{\sigma_{xy_1}} I_{K_1} - I_{L_1} \frac{\tau_{xy_2}}{\sigma_{xy_1}} \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{32}} - \frac{\sigma_{xy_2}}{\sigma_{xy_1}} I_{G_2} &= 0, \\
\frac{\Delta_{32}}{\sigma_{xy_2}} I_{G_2} - I_B &= I, \\
\frac{\Delta_{13}}{\sigma_{xy_1}} I_{K_1} + I_A &= I.
\end{aligned} \tag{37}$$

Очевидно, что последнее уравнение следует из четырех первых. Неполнота этой системы, как было объяснено, означает то, что при любом соотношении между  $\sigma_{xy_1}$ ,  $\sigma_{xy_2}$ ,  $\sigma_{xy_3}$  две точки являются закрытыми ( $s < 0$ ). Поэтому мы можем произвольно положить нулями любые два из шести токов, а затем, найдя распределение токов и  $R_{sd}$  и вычислив диссипацию энергии во всех точках, узнать, при каком соотношении между  $\sigma_{xy}$  выполняются условия закрывания этих точек. Разберем для примера один случай. Пусть  $I_{G_2} = I_\Gamma = 0$ . Тогда, решая систему, имеем

$$\begin{aligned}
I_B &= -I, \quad I_A = \frac{\sigma_{xy_2}}{\sigma_{xy_1}} I, \\
I_{K_1} &= \frac{\sigma_{xy_1}}{\sigma_{xy_2}} \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} I, \quad I_{L_1} = \frac{\tau_{xy_1}}{\sigma_{xy_2}} \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} I.
\end{aligned} \tag{38}$$

Сумма скачков потенциала в точках  $B$  и  $\Gamma$  равна напряжению между контактами исток—сток  $U_{sd}$ . И так как точка  $\Gamma$  закрыта, то в ней потенциал непрерывен и  $I_B = -\sigma_{xy_2} U_{sd}$ , а так как  $I_B = -I$ , следовательно,  $I = \sigma_{xy_2} U_{sd}$  и, значит,

$$R_{sd} = 1/\sigma_{xy_2}. \tag{39}$$

Для структуры на рис. 4, зная, что ток не течет в точках  $G$  и  $\Gamma$  в силу  $s_G, s_\Gamma < 0$ , [получаем  $\sigma_{xy_1} > \sigma_{xy_2} > \tau_{xy_2}$ , что согласуется с  $s_K > 0$ ].

Для более сложных структур информации о показателе степени асимптотики потенциала в окрестности боковых точек недостаточно для восстановления неравенства на  $\sigma_{xy}$  и надо знать  $s$  в центральных точках. Поэтому покажем, как вычислить  $s_L$  из диссипации для нашего случая. Диссипация

$$W = W_A + W_B + W_K + W_L = I^2 R_{sd}. \tag{40}$$

Из (4) и (25) знаем

$$W_A = \frac{1}{2} I_A^2 \frac{1}{\sigma_{xy_1}}, \quad W_B = \frac{1}{2} I_B^2 \frac{1}{\sigma_{xy_2}}, \quad W_K = \frac{1}{2} I_K^2 \frac{\Delta_{13}}{\sigma_{xy_1}^2}, \tag{41}$$

а используя (30), найдем

$$W_L = \frac{1}{\pi} \frac{1}{s_L} \frac{I_{L_1}^2}{\sigma_{xy_1}^2} \frac{\sigma_{xx_1} \Delta_{32}^2 \sigma + \tau_{xx_2} \Delta_{13}^2 + 1/2 \cdot \sigma_{xx_2} \Delta_{21}^2}{\Delta_{32}^3}. \tag{42}$$

В итоге получим для  $s_L^1$  формулу (34). Разумеется, так можно действовать лишь в ситуации, когда через точку  $L$  протекает ток и  $W_L \neq 0$ . В противном случае  $W_L = 0$  найти таким способом  $s_L$  не удастся. Для центральной особой точки, к которой прилегают три области с различными  $\sigma_{xy}$  (рис. 4), это замечание несущественно, так как вид функциональной зависимости  $s_L$  ( $\sigma_{xy} : \sigma_{xx}$ ) не зависит от неравенства на  $\sigma_{xy}$ . Для более сложных случаев (рис. 5) ниже будет объяснено, что в случае, когда центральная точка закрыта, неравенство на  $\sigma_{xy}$  удастся восстановить, не находя  $s_L$ .

Приведем без детальных вычислений все варианты для структуры, изображенной на рис. 4,

$$\begin{aligned} \sigma_{xy_1} > \sigma_{xy_2} > \sigma_{xy_3}, \quad R_{sd} = \frac{1}{\sigma_{xy_2}}, \quad I_G = I_\Gamma = 0, \\ \sigma_{xy_1} > \sigma_{xy_3} > \sigma_{xy_2}, \quad R_{sd} = \frac{1}{\sigma_{xy_3}}, \quad I_\Gamma = I_{L_1} = 0, \\ \sigma_{xy_2} > \sigma_{xy_1} > \sigma_{xy_3}, \quad R_{sd} = \frac{1}{\sigma_{xy_1}}, \quad I_G = I_{L_1} = 0, \\ \sigma_{xy_2} > \sigma_{xy_3} > \sigma_{xy_1}, \quad R_{sd} = \frac{1}{\sigma_{xy_3}}, \quad I_G = I_K = 0, \\ \sigma_{xy_3} > \sigma_{xy_2} > \sigma_{xy_1}, \quad R_{sd} = \frac{1}{\sigma_{xy_3}}, \quad I_K = I_{L_1} = 0, \\ \sigma_{xy_3} > \sigma_{xy_1} > \sigma_{xy_2}, \quad R_{sd} = \frac{1}{\sigma_{xy_3}}, \quad I_\Gamma = I_K = 0. \end{aligned}$$

В правом столбце указаны токи, при положении нулями которых система дает соответствующее значение  $R_{sd}$  и неравенство на  $\sigma_{xy_1}$ ,  $\sigma_{xy_2}$ ,  $\sigma_{xy_3}$ .

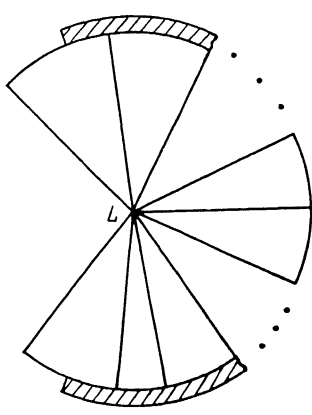


Рис. 5.  $N$ -затворная МДП структура с одной центральной точкой.

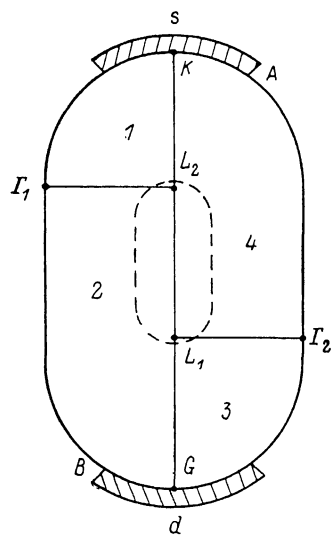


Рис. 6. Четырехзатворная МДП структура с двумя центральными точками.

4. Для нахождения распределения токов и сопротивления для контакта  $N$  различных холловских проводников (рис. 5) следует поступать аналогично. Для  $2N+2$  независимых токов имеем  $N+3$  независимых уравнений Кирхгофа ( $N$  уравнений получаем, двигаясь по замкнутым контурам вдоль границ областей, два уравнения в окрестности центральной точки и одно, связывающее токи, стекающие с электрода, с полным током исток—сток). Положив  $N-1$  ток нулем, найдем распределение токов для этого случая. Если при этом ток течет через центральную точку, то из уравнения баланса энергии найдем  $s_L$  и, написав неравенство  $s_L > 0$ , восстановим соотношение между  $\sigma_{xy_i}$ , которое приводит к такому распределению токов. Однако если ток не течет через центральную точку, то найти  $s_L$  невозможно. Тем не менее и в этом случае можно восстановить неравенство на  $\sigma_{xy_i}$ . Дело в том, что возможны два случая, когда токи, текущие в окрестности центральной точки, равны нулю.

Во-первых, когда мы положим нулями  $N-2$  тока, текущих в центральной точке (вообще говоря, там протекает  $N$  токов, но на них два уравнения типа (33)). Тогда из  $N$  токов, текущих через боковые точки стыка границ, можно положить нулем еще только один ток. В оставшихся боковых точках  $s_i > 0$  и таких условий  $N-1$ , т. е. столько, сколько и нужно, чтобы



восстановить неравенство на  $\sigma_{xy}$ , причем очевидно, что это неравенство согласуется с условием  $s < 0$  для единственной закрытой боковой точки.

Во-вторых, возможна ситуация, когда мы, положив нулями часть токов через «боковые» точки и часть токов через центральную точку, из решения системы уравнений Кирхгофа получим, что все токи, текущие в окрестности центральной точки, равны нулю. При этом условия  $s_i < 0$  для боковых точек, через которые мы положили токи нулями, и  $s_k > 0$  для оставшихся боковых точек недостаточно, чтобы однозначно определить соответствующее неравенство на  $\sigma_{xy}$ . Но дело в том, что распределение токов не зависит от оставшегося произвола в неравенстве на  $\sigma_{xy}$ . Действительно, ведь мы ищем ответ на вопрос, при каком неравенстве на  $\sigma_{xy}$  обращаются в нуль заданные токи. Часть неравенства мы получаем, зная, что  $s < 0$  в тех боковых точках, в которых мы положили токи нулями, и  $s > 0$  в оставшихся боковых точках. От того, как дописать это неравенство, зависит, какие именно токи, текущие в центральной точке, окажутся нулями. Но, поскольку мы получили, что все токи в окрестности точки  $L$  (рис. 5) равны нулю и в силу линейности уравнений Кирхгофа это совершенно не зависит от того, какая часть токов была положена равной нулю, то картина распределения токов не зависит от того, как дописать исходное неравенство. На самом деле подобное явление имеет место и в ситуации с  $s_L > 0$ . Суммируя скачки потенциала от одного электрода к другому, найдем  $R_{sd}$ .

Отметим также, что  $s_L$  для структуры на рис. 5 не является аналитической функцией  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{xx}$  и поэтому решение системы граничных условий для таких сложных контактов становится нецелесообразным.

И наконец, проиллюстрируем случай с более чем одной особой точкой в центре. Рассмотрим, например, случай с двумя центральными точками (рис. 6). Если написать для этого случая систему уравнений Кирхгофа, обходя по замкнутому контуру, охватывающему обе точки  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 6), то получившаяся система уравнений будет в точности той же, что и для структуры с одной особой точкой в центре и четырьмя прилегающими к ней областями, и должна решаться точно так же, как для структур на рис. 5. Сами  $s_{L_1}$  и  $s_{L_2}$  нам известны из решения для контакта на рис. 4. Таким образом, умея решать задачу с произвольной одиночной центральной точкой, можно вычислить распределение токов и сопротивление для контакта с любым числом произвольных особенностей в центре.

#### Л и т е р а т у р а

- [1] Усов Н. А., Улинич Ф. Р. Письма в ЖЭТФ, 1984, т. 40, № 7, с. 306—308.
- [2] Альтшулер Е. Л., Трунов Н. Н. Письма в ЖЭТФ, 1985, т. 42, № 3, с. 99—100.
- [3] Беркут А. Б., Дубровский Ю. В., Нунупаров М. С. и др. Письма в ЖЭТФ, 1986, т. 44, № 5, с. 252—254.
- [4] Альтшулер Е. Л., Трунов Н. Н. Измерительная техника, 1986, № 9, с. 4—6.

НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева»  
Ленинград

Поступило в Редакцию  
15 апреля 1988 г.