

УДК 621.315.592

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Н. М. Гусейнов

Рассмотрена фононная теплопроводность тонких пластины при низкой температуре, когда основными источниками рассеяния фононов являются трехфононный ангармонизм, рассеяние на статических дефектах и границах пластины. Проведена классификация различных режимов теплопроводности на плоскости параметров  $L$  и  $1/T_0$ , где  $L$  — характерный размер фононной неоднородности,  $T_0$  — температура равновесного состояния пластины. Картина режимов теплопроводности существенно зависит от отношения толщины пластины с характерным размером  $d_0$ , зависящим от характеристик кристалла.

Известны различные режимы фононной теплопроводности объемных кристаллов полупроводников и диэлектриков при температурах, много меньших дебаевской, когда основными источниками рассеяния фононов являются трехфононный ангармонизм и рассеяние на статических дефектах. В работе [1] была проведена подробная классификация режимов теплопроводности в плоскости параметров  $L/v\tau_0$  и  $\delta = \tau_0/\tau_0^*$ , где  $L$  — характерный макроскопический размер ( $L$  может быть размером кристалла [2] либо характерным размером фононной неравновесности [1, 3]);  $v$  — средняя скорость звука в кристалле;  $\delta$  — параметр, определяющий степень дефектности кристалла;  $\tau_0$  — время трехфононного взаимодействия тепловых фононов;  $\tau_0^*$  — время рассеяния тепловых фононов на дефектах.

При  $\delta > 1$ , когда рассеяние тепловых фононов на дефектах доминирует над фонон-фононным рассеянием, в теплопереносе в основном участвуют подтепловые фононы. Во-первых, у подтепловых фононов по сравнению с тепловыми в результате уменьшения частоты рассеяния на дефектах ослаблена релаксация импульса; во-вторых, в результате уменьшения частоты фонон-фононного рассеяния ослаблена релаксация к планковскому равновесию. Обе эти причины приводят к тому, что основной вклад в интеграл, определяющий поток энергии, дают фононы с энергиями  $\hbar\omega \ll T$ .

Цель настоящей работы — провести классификацию режимов теплопроводности в пластине, в которой отражение фононов на граничных плоскостях происходит диффузным образом. Время  $\tau^*$  свободного пролета фонона между границами пластины не зависит от частоты фононов. Ясно, что при достаточно малой толщине пластины граничное рассеяние может подавлять анизотропную часть функции распределения фононов на любом энергетическом уровне  $\hbar\omega < T$  и классификация режимов теплопроводности будет существенно зависеть от двух макроскопических размеров: характерного размера фононной неравновесности и толщины пластины.

Мы будем рассматривать пластину, в которой участок с характерным размером  $L$  равномерно прогрет по всей толщине  $d$  до температуры, превышающей температуру равновесного состояния  $T_0$ . Пластина считается тонкой в том смысле, что  $L > d$ . Такая ситуация была реализована, например, в экспериментах [4].

# 1. Система кинетических уравнений

Рассматривается неограниченная пластина при низкой температуре, когда процессами перебрса можно пренебречь, так что механизм диссипации импульса фононной системы является рассеяние на дефектах и диффузное отражение от граней пластины.

Отражение фононов от поверхности считается полным. В дальнейшем будут указаны необходимые ограничения, при которых теплопроводом через поверхность в термостат или подложку можно пренебречь.

Предполагается, что отклонение пластины от термодинамического равновесия (с температурой  $T_0$ ) невелико и может быть описано локальной температурой  $T = T_0 + \delta T(\mathbf{r}, t)$ ;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, лежащий в плоскости пластины.

Функцию распределения фононов представим в виде

$$n_{\sigma}(\omega_{\sigma}, \mathbf{e}, \mathbf{r}, z, t) = n_{0\sigma}(\omega_{\sigma}, \mathbf{r}, t) + \delta n'_{\sigma}(\omega_{\sigma}, \mathbf{e}, \mathbf{r}, z, t), \quad (1)$$

где  $\sigma$  — поляризация фонона;  $\mathbf{e}$  — единичный вектор направления импульса фонона  $\mathbf{q}$ ;  $z$  — координата в перпендикулярном плоскости пластины направлении ( $z = \pm d/2$  соответствует верхней и нижней граням пластины);  $n_{0\sigma}$  — изотропная по  $\mathbf{e}$  часть функции распределения;  $\delta n'_{\sigma}$  — анизотропная часть функции распределения. Функцию  $n_{0\sigma}$  запишем как

$$n_{0\sigma}(\omega_{\sigma}, \mathbf{r}, t) = n_T(\omega_{\sigma}) + \delta n_{0\sigma}(\omega_{\sigma}, \mathbf{r}, t),$$

где  $n_T$  — планковское распределение с температурой  $T$ . Малость отклонения от термодинамического равновесия означает, что  $\delta n_{0\sigma}, \delta n'_{\sigma} \ll n_{T\sigma}$ . Если на подтепловом уровне энергии  $\hbar\bar{\omega}_{\sigma}$  для фононов устанавливается планковское равновесие с температурой  $T$ , то  $\delta n_{0\sigma} \approx \delta T/\hbar\bar{\omega}_{\sigma}$  при  $\omega_{\sigma} \sim \bar{\omega}_{\sigma}$  и  $n_{0\sigma} = n_T(\omega_{\sigma})$  есть квазиравновесная функция Планка. Если же уровень  $\hbar\bar{\omega}_{\sigma}$  достаточно мал, то  $\delta n_{0\sigma}$  может существенно отличаться от  $\delta T/\hbar\bar{\omega}_{\sigma}$ .

Обычно, если в (1)  $n_{0\sigma}$  есть равновесная функция Планка, то на неравновесную добавку  $\delta n'_{\sigma}$  накладывают следующие условия: 1) вклад от  $\delta n'_{\sigma}$  в плотность энергии фононов равен нулю [5]

$$\sum_{\sigma} \int d^3q \hbar\omega_{\sigma} \delta n'_{\sigma} = 0, \quad (2)$$

2) при полном диффузном отражении фононов от граней пластины выполняются следующие граничные условия [6]:

$$\delta n'_{\sigma}(z = -d/2, \quad e_z > 0) = 0, \quad \delta n'_{\sigma}(z = d/2, \quad e_z < 0) = 0, \quad (3)$$

где  $e_z = \cos \alpha$ ,  $\alpha$  — угол между осью  $z$  и вектором  $\mathbf{e}$ .

Предположим, что и в более общем случае, когда  $n_{0\sigma}$  есть квазиравновесная функция Планка, и даже в том случае, когда  $\delta n_{0\sigma}$  отличается от  $\delta T/\hbar\bar{\omega}_{\sigma}$ , имеют место условия (2) и (3).

Функция  $n_{0\sigma}$ , определяющая плотность энергии фононов, не зависит от  $z$  по ранее сделанному предположению о том, что пластина считается равномерно прогретой по всей толщине.

Система линеаризованных по функции

$$\delta n_{\sigma}(\omega_{\sigma}, \mathbf{e}, \mathbf{r}, z, t) = \delta n_{\sigma}(\omega_{\sigma}, \mathbf{r}, t) + \delta n'_{\sigma}(\omega_{\sigma}, \mathbf{e}, \mathbf{r}, z, t)$$

кинетических уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_{\sigma} + \mathbf{v}_{\sigma\mathbf{q}} \nabla \delta n_{\sigma} = J_{\sigma} + S_{\sigma}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{v}_{\sigma\mathbf{q}}$  — скорость фонона;  $J_{\sigma}, S_{\sigma}$  — члены, описывающие упругое столкновение фононов с дефектами и трехфононные столкновения

$$J_{\sigma} = \frac{1}{\tau^*(\omega)} \left[ -a_{\sigma}(\mathbf{e}) \delta n_{\sigma}(\omega, \mathbf{e}) + \sum_{\sigma'} \int \frac{d\omega'}{4\pi} \delta n_{\sigma'}(\omega, \mathbf{e}') a_{\sigma' \rightarrow \sigma}(\mathbf{e}' \rightarrow \mathbf{e}) \right], \quad (5)$$

$\tau^*(\omega)$  — среднее по углам и поляризациям время рассеяния на дефектах;  $do$  — элемент телесного угла в направлении  $e$ ; коэффициенты  $a_\sigma$  и  $a_{\sigma' \rightarrow \sigma}$  порядка единицы. Для простоты положим, что  $a_\sigma$  и  $a_{\sigma' \rightarrow \sigma}$  не зависят от направлений  $e$  и  $e'$ , и учтем, что условие (2) приводит к тому, что

$$\int \frac{d\Omega'}{4\pi} \delta n_{\sigma'}(\omega, e') = \delta n_{0\sigma'}$$

Тогда из (5) получается

$$J_\sigma = \frac{1}{\tau^*(\omega)} \left[ -a_\sigma \delta n_\sigma(\omega, e) + \sum_{\sigma'} a_{\sigma' \rightarrow \sigma} \delta n_{0\sigma'} \right]. \quad (6)$$

Мы будем рассматривать рэлеевское рассеяние на дефектах

$$\frac{1}{\tau^*(\omega)} = \frac{1}{\tau_0^*} \left( \frac{\hbar\omega}{T_0} \right)^4. \quad (7)$$

Для кристаллов кубической симметрии при  $\hbar\omega \ll T_0$  выражение для  $S_\sigma$  имеет следующий вид:

$$S_\sigma = -\frac{1}{\tau_\sigma(\omega)} \left[ \delta n_\sigma(\omega, e) - \frac{\delta T}{\hbar\omega} \right], \quad (8)$$

где  $\tau_\sigma(\omega)$  — время поглощения поперечного либо продольного звука,

$$\frac{1}{\tau_\pm(\omega)} = \frac{1}{\tau_0} \frac{\hbar\omega}{T_0}, \quad \frac{1}{\tau_l(\omega)} = \frac{c_l}{\tau_0} \left( \frac{\hbar\omega}{T_0} \right)^2, \quad c_l \sim 1. \quad (9)$$

При решении системы (4) можно считать, как и в [1, 3], что перенос энергии происходит квазистационарно, т. е. характерное время процесса

$$t \gg \tau^*(\omega), \quad \tau_\sigma(\omega), \quad \omega \sim \bar{\omega}_\sigma. \quad (10)$$

Тогда в уравнениях (4) можно пренебречь членом  $(\partial/\partial t)\delta n_\sigma$ .

Отклонение пластины от термодинамического равновесия считается аксиально-симметричным относительно оси  $z$ .

Систему (4) удобно решать, сделав преобразование Фурье  $r \rightarrow k$ , после которого она принимает вид

$$ikv_\sigma \sin \alpha \cos \varphi \delta n_\sigma + v_\sigma \cos \alpha \frac{\partial \delta n'_\sigma}{\partial z} = J_\sigma + S_\sigma. \quad (11)$$

Здесь  $\delta n_\sigma$ ,  $\delta n'_\sigma$  — Фурье-образы;  $\varphi$  — угол между векторами  $e_r$  и  $r$ , где  $e_r$  — составляющая вектора  $e$  в плоскости пластины.

Решив систему уравнений (11), можно определить Фурье-компоненту усредненного по  $z$  потока энергии  $W$ . Фурье-компонента потока энергии записывается как

$$W = ik\chi\delta T, \quad (12)$$

где  $\chi$ ,  $\delta T$  — Фурье-компоненты теплопроводности и температурной добавки  $\delta T(r)$ .

Еще раз отметим, что все предположения, сделанные при выводе уравнений (11), справедливы при выполнении соотношения

$$\hbar\bar{\omega}_\sigma \ll T_0. \quad (13)$$

## 2. Классификация теплопроводности

Частоты трехфононного взаимодействия и рассеяния на дефектах тепловых фононов можно представить в виде

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_\Theta} \left( \frac{T_0}{\Theta} \right)^5, \quad \frac{1}{\tau_0^*} = \frac{1}{\tau_\Theta^*} \left( \frac{T_0}{\Theta} \right)^4, \quad (14)$$

где

$$\Theta = \hbar\omega_D, \quad \tau_\Theta = \tau_0(T_0 = \Theta), \quad \tau_\Theta^* = \tau_0^*(T_0 = \Theta).$$

Критерием для установления температуры в неравновесной фононной системе является малость длины свободного пробега тепловых фононов по сравнению с характерным размером фононной неоднородности  $l_0 \ll L$ .

При  $\delta > 1$   $l_0 = (1/3v^2\tau_0^*\tau_0)^{1/2}$ . Используя выражения (14), получим

$$l_0 = l_\Theta (\Theta/T_0)^{3/2}, \quad l_\Theta = (1/3v^2\tau_0^*\tau_\Theta)^{1/2}. \quad (15)$$

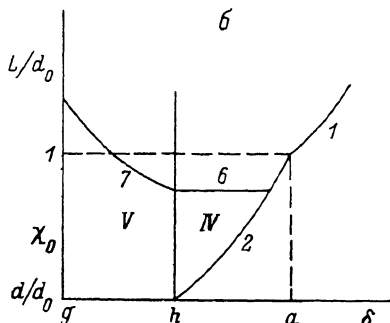
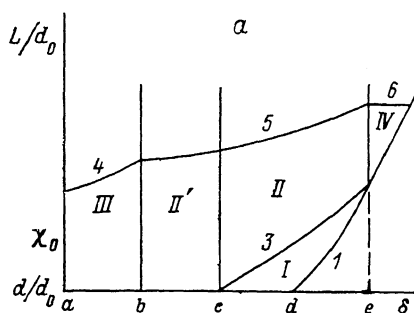
Температура установится при выполнении следующего условия:

$$L/d_0 \gg \delta^{5/2}, \quad (16)$$

где

$$d_0 = l_\Theta \delta_\Theta^{-3/2}, \quad \delta_\Theta = \tau_\Theta/\tau_0^*, \quad (17)$$

$d_0$  имеет смысл длины свободного пробега тепловых фононов при температуре, соответствующей  $\delta=1$ . Действительно,  $\delta = \delta_\Theta \Theta/T_0$  и из (15) получится  $l_0|_{\delta=1} = d_0$ .



Области, на которые разбивается плоскость параметров  $L/d_0$ ,  $\delta$  при  $d > d_0$  (а),  $d < d_0$  (б).

При  $\delta < 1$   $l_0 = v\tau_0$ . В этом случае температура будет устанавливаться при выполнении условия

$$L/d_0 \gg \delta^5. \quad (18)$$

Анализ кинетических уравнений удобно проводить в плоскости параметров  $L/d_0$ ,  $\delta$ .

При  $d > d_0$  плоскость параметров разбивается (см. рисунок, а) на области, в которых существенны те или иные члены кинетических уравнений (11). Точка а соответствует  $\delta=1$ . Слева от прямой, проходящей через точку а, располагается область, где справедлива обычная теплопроводность

$$\chi_0 = 1/3c_0v^2\tau_0^* \approx 1/T_0, \quad (19)$$

где  $c_0 \approx T_0^3$  — теплоемкость при  $T_0 \ll \Theta$ .

В областях I, II, II', III теплоперенос определяется подтепловыми фононами. Предполагается, что иерархия частот столкновений фононов актуальных в переносе энергии и величин  $1/\tau^r = v/d$ ,  $1/\tau_s^* = v_s/d$  такова:

$$\frac{1}{\tau_l(\bar{\omega})} \ll \frac{1}{\tau_f(\bar{\omega})} \ll \frac{1}{\tau^r} \ll \frac{1}{\tau^*(\bar{\omega})}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{\tau_l(\bar{\omega})} \ll \frac{1}{\tau_f(\bar{\omega})} \ll \frac{1}{\tau_r} \sim \frac{1}{\tau^*(\bar{\omega})}, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\tau_l(\bar{\omega}_l)} \ll \frac{1}{\tau_l^r} \sim \frac{1}{\tau^*(\bar{\omega}_l)} \ll \frac{1}{\tau_r(\bar{\omega}_l)}, \quad (22)$$

$$\frac{1}{\tau_l^r} \ll \frac{1}{\tau_l(\bar{\omega}_l)} \sim \frac{1}{\tau^*(\bar{\omega}_l)} \ll \frac{1}{\tau_r(\bar{\omega}_l)}. \quad (23)$$

В областях I и II для актуальных фононов преобладает либо рассеяние на дефектах, либо рассеяние на дефектах совместно с рассеянием на гра-

ницах, которые могут происходить с конверсией поляризации. Таким образом, происходит быстрое «перемешивание» поляризаций фононов, что приводит к единой актуальной частоте  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_z = \bar{\omega}_l$ .

В областях *II* и *III* упругое рассеяние фононов на дефектах и границах уже не является самым быстрым процессом. Следовательно, различие в трехфононном взаимодействии для низкочастотных поперечных и продольных фононов приводит к различной скорости восстановления планковского равновесия и к различному вкладу поперечных и продольных фононов в перенос энергии. Основной вклад в теплоперенос будет определяться продольными фононами, для которых фонон-фононные процессы происходят медленнее.

Очевидно, что в областях *I* и *II* вместо системы кинетических уравнений (11) можно будет рассмотреть одно уравнение, соответствующее модели с единственной поперечной ветвью

$$ikv \sin \alpha \cos \varphi \delta n + v \cos \alpha \frac{\partial \delta n'}{\partial z} = -\frac{1}{\tau_f} \left( \delta n - \frac{\delta T}{\hbar \omega} \right) - \frac{1}{\tau^*} \delta n'. \quad (24)$$

Решив (24) с граничными условиями (3), найдем величину

$$\delta \bar{n}' = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \delta n' dz,$$

$$\delta \bar{n}' = \frac{(1/\tau_f) (\delta T/\hbar \omega - \delta n_0) - ikv \sin \alpha \cos \varphi \delta n_0}{1/\tau_f + 1/\tau^* + ikv \sin \alpha \cos \varphi} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \left[ 1 - \exp \left( -\frac{1/\tau_f + 1/\tau^* + ikv \sin \alpha \cos \varphi}{(v/d) |\cos \alpha|} \right) \right] \frac{(v/d) |\cos \alpha|}{1/\tau_f + 1/\tau^* + ikv \sin \alpha \cos \varphi} \right\}. \quad (25)$$

Условие (2) приводит в модели с единственной фононной ветвью к следующему равенству:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\alpha \sin \delta \bar{n}' = 0. \quad (26)$$

Подставляя (25) в (26) и предполагая малость анизотропии  $kv \sin \alpha \cos \varphi \ll 1/\tau_f + 1/\tau^*$ , можно получить, что в области *I*

$$\delta n_0 = \frac{\delta T}{\hbar \omega} \left[ 1 + \frac{1}{3} (kv)^2 \tau_f(\omega) \tau^*(\omega) \right]^{-1}, \quad \omega \sim \bar{\omega}. \quad (27)$$

Предположим, что в области *II* величина

$$^{1/3} (kv)^2 \tau_f(\bar{\omega}) \tau^*(\bar{\omega}) \sim (l_0(\bar{\omega})/L)^2 \ll 1, \quad (28)$$

т. е. длина свободного пробега актуальных фононов мала по сравнению с длиной фононной неоднородности. В этом случае изотропная часть функции распределения есть квазиравновесная функция Планка и

$$\delta n_0 = \delta T/\hbar \omega, \quad \omega \sim \bar{\omega}. \quad (29)$$

Удобно сделать следующую замену переменной:

$$\hbar \omega/T_0 = (\xi/\delta)^{1/4} y, \quad \xi = kv \tau_0 \sim v \tau_0/L. \quad (30)$$

Средний по  $z$  поток энергии фононов равен

$$W = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q v \sin \alpha \cos \varphi \hbar \omega_z \delta \bar{n}'.$$

Переходя к интегрированию по частоте с плотностью состояний  $\rho(\omega) = 3\omega^2/2\pi^2 v^3$ , делая замену (30) и используя выражения (25), (27), (29) и (12), получим, что в областях *I* и *II* Фурье-компонента теплопроводности равна

$$\chi_1 = c_1 \chi_0 \left( \frac{\delta}{\xi} \right)^{1/4} \int_0^{\infty} \frac{dy y^3}{y^5 + 1/3\eta}, \quad (31)$$

где

$$\eta = \xi^{-3/4} \delta^{-1/4}, \quad c_1 \sim 1, \\ \chi_2 = c_2 \chi_0 \left( \frac{d}{v\tau_0^*} \right)^{1/4} \int_0^{\infty} dx x^{-3/4} \Phi(x), \quad (32)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2x^{1/2}} e^{-x/2} [W_{-3/2, -1}(x) - xW_{-1/2, -2}(x)],$$

$c_2 \sim 1$ ,  $x = y^4 d/L$ ,  $W_{\alpha, \beta}(x)$  — функция Уиттекера. Актуальные значения частоты  $\bar{\omega}$  в областях *I* и *II* можно определить, анализируя интегралы (31) и (32).

Формула теплопроводности, реализуемой в области *I*, была впервые получена Левинсоном [3].

Рассмотрим теперь области *II'* и *III*. Предполагая, что в области актуальной частоты  $\bar{\omega}_i$  поперечные фононы можно считать квазиравновесными  $\delta n_i = \delta T/\hbar\omega$ , рассмотрим из системы (11) лишь уравнение для продольных фононов

$$ikv_i \sin \alpha \cos \varphi \delta n_i + v_i \cos \alpha \frac{\partial \delta n_i'}{\partial z} = -\frac{1}{\tau_i} \left( \delta n_i - \frac{\delta T}{\hbar\omega} \right) - \\ - \frac{1}{\tau_i^*} \left( a_i \delta n_i - a_{i \rightarrow i'} \delta n_{0i} - a_{i \rightarrow i} \frac{\delta T}{\hbar\omega} \right),$$

где  $a_i = a_{i \rightarrow i'} + a_{i \rightarrow i}$ .

Сделав расчеты по аналогичной схеме, можно убедиться, что  $\delta n_{0i} = \delta T/\hbar\omega$ , а теплопроводность в области *II'*, определяемая продольными фононами, отличается от (32) лишь константой порядка единицы. Теплопроводность в областях *II* и *II'* одинакова, так как одинакова длина пробега фонона относительно потери импульса. В обоих случаях  $l_q \sim d$ , хотя актуальные фононы в *II* и *II'* двигаются существенно различным образом: в области *II* — диффузно с длиной пробега относительно потери энергии  $l_0(\bar{\omega}) = (1/3 v^2 \tau_i(\bar{\omega}) \tau_i^*(\bar{\omega}))^{1/2}$ , в области *II'* — баллистически с длиной пробега  $l_0(\bar{\omega}) = v_i \tau_{i \rightarrow i}^*(\bar{\omega})$ , где  $\tau_{i \rightarrow i}^*(\bar{\omega})$  — время рассеяния продольных фононов на дефектах с конверсией моды в поперечную.

В области *III*, согласно (23), рассеянием фононов на границах можно пренебречь. Реализуется теплопроводность, описанная в книге [5, с. 313].

Выражения теплопроводности и соответствующие значения актуальной энергии фононов приведены в табл. 1.

Используя выражения  $\bar{\omega}$ , можно проверить выполнение соотношений (10) и (13) в областях *I*, *II*, *II'*, *III*.

Все линии и точки на рисунке, *a* приведены в табл. 2. Точки *b*, *c* и кривую 3 можно получить, подставляя значения  $\bar{\omega}$  в предположенные неравенства (20) — (23) и (28). Справа к области *II* примыкает область *IV* казимировской теплопроводности  $\chi_K$ . Граница, разделяющая области *II* и *IV*, задается условием  $d = v\tau_0^*$ , определяющим точку *e*. Кривая 1 ограничивает область существования температуры (16).

При  $d < d_0$  возникает картина (см. рисунок, *б*). Температура существует слева от кривых 1 и 2, определяемых условиями (16) и (18). До точки *d* имеет место обычная теплопроводность  $\chi_0$ . Область *V* соответствует пуазейловому течению фононов. Точка *d* определяется условием пуазейлового течения  $d = v(\tau_0 \tau_0^*)^{1/2}$ . Справа от *h*, задаваемой условием  $d = v\tau_0$ , находится область *IV* с теплопроводностью  $\chi_K$ . Теплопроводность, определяемая подтепловыми фононами при  $d < d_0$ , отсутствует.

Таблица 1

Значения теплопроводности и энергии актуальных в теплопереносе фононов на плоскости параметров  $L/d_0$ ,  $\sigma$

	I	II, II'	III	IV	V
$\chi/\chi_0$	$\xi^{-2/3}\delta^{1/3}$	$(d/v\tau_0^*)^{1/4}$	$\delta^{1/2}$	$d/v\tau_0^*$	$d^2/v^2\tau_0^*$
$\hbar\omega/T_0$	$\xi^{2/3}\delta^{-1/3}$	$(v\tau_0^*/d)^{1/4}$	$\delta^{-1/2}$	1	1

Таблица 2

Координаты характерных точек и формулы кривых на рисунке

	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{L}{d_0}$	$\delta^{3/2}$	$\delta^5$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^{5/2} \delta^2$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^{1/2} \frac{\delta^{9/4}}{\gamma^{1/2}}$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^{5/8} \frac{\delta^{3/2}}{\gamma^{1/2}}$	$\frac{d}{d_0} \frac{1}{\gamma^{1/2}}$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^{3/2} \frac{\delta^{-3/2}}{\gamma^{1/2}}$
	a	b	c	d	e	h	
	1	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^{1/6}$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^{5/6}$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^{2/9}$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^{1/4}$	$\left(\frac{d}{d_0}\right)^{1/8}$	

Определим необходимые ограничения на величину теплоотода через поверхность пластины. Количество энергии, уходящей в единицу времени в термостат или подложку, определяется следующим интегралом по поверхности пластины:

$$P = \int dS \sum_q \hbar\omega_q v |\cos \alpha| \gamma (n_T - n_{T_0}), \quad (33)$$

где  $n_T$  и  $n_{T_0}$  — функции распределения фононов в пластине и окружающей среде на границе раздела,  $\gamma$  — коэффициент прохождения фононов через границу. Из (33) получим, что

$$P \sim \frac{\gamma L^2 T_0^3 \delta \bar{\delta T}}{v^2 \hbar^3}, \quad \bar{\delta T} = \frac{4}{\pi L^2} \int dS \delta T(\mathbf{r}).$$

Прогретый участок пластины можно представить себе в виде цилиндра, ось которого перпендикулярна граничным поверхностям пластины, высота равна  $d$ , диаметр  $L$ . Для сравнения с величиной  $P$  необходимо вычислить скорость уменьшения энергии  $Q$  внутри такого цилиндра в результате теплопереноса через его боковую поверхность. Получим

$$Q \sim \pi L d \chi (\bar{\delta T}/L) \sim d \chi \bar{\delta T}.$$

Ролью теплоотода можно пренебречь, если  $P \ll Q$ . Это ограничение определяют линии 4, 5, 6, 7 на рисунке. Условие того, что линии ограничения на теплоотвод будут проходить, так, как это изображено на рисунке, а (не будут пересекать ось  $\delta$  и область I), есть

$$\gamma^{-1/2} \gg (d/d_0)^{1/2}. \quad (34)$$

Если  $d < d_0$ , то линия 7 на рисунке, b не пересекает ось  $\delta$  при  $\gamma^{-1/2} \gg 1$ . Это условие выполняется всегда при достаточно малых значениях  $\gamma$ .

В заключение сделаем численные оценки для пластины кристалла Ge. Выражение для частоты  $1/\tau_i(\omega)$  приведено в книге [7]. Сравнивая его с (9) и (14), можно получить

$$\frac{1}{\tau_{\Theta}} = \frac{4! \zeta(4) \lambda^2 (1 - \lambda^2) \hbar \omega_D^5 (3c_{11} - c_{12})^2}{32\pi \rho^3 v_t v_l^2},$$

где  $\zeta$  — функция Римана;  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  — упругие константы;  $\rho$  — плотность кристалла;  $\lambda = v_t/v_l$ . Используя данные характеристик Ge, получим  $1/\tau_{\Theta} = 7 \cdot 10^{11}$  Гц. Выражение  $1/\tau^*(\omega)$  иногда записывают в виде  $\eta \omega_D$  ( $\hbar \omega/\Theta$ )<sup>4</sup>. Сравнивая его с (7) и (14), получим  $1/\tau_{\Theta}^* = \eta \omega_D$ . Для изотопического рассеяния фононов в Ge параметр  $\eta = 2.7 \cdot 10^{-3}$  (см., например, табл. 1 в работе [8]). Численное значение  $1/\tau_{\Theta}^*$  получается равным  $1.39 \cdot 10^{11}$  Гц. Подставляя найденные числа в (17), получим  $\delta_{\Theta} \approx 0.2$ ,  $d_0 \approx 9$  мкм. Температура выражается через параметр  $\delta$  следующим образом:  $T = \delta_{\Theta} \Theta / \delta$ . Например, если толщина пластины равна  $d = 10d_0$ , то точкам  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  на рисунке,  $a$  соответствуют значения температур 75, 50.7, 48.7, 44.9 и 42.1 К. При толщине  $d = 0.1d_0$  точкам  $a$ ,  $b$  и  $d$  на рисунке,  $b$  соответствуют значения 75, 119 и 125 К. Найденные величины температур имеют лишь оценочные значения.

Для конкретного случая  $d = 10d_0$  соотношение (34) выполняется, если  $\gamma \ll 0.1$ . Если пластина Ge находится в термостате с жидким гелием, то теоретическое значение величины  $\gamma$ , оцениваемое как коэффициент прохождения упругих волн на границе кристалла и жидкого гелия, равно  $1/300$ . В реальной экспериментальной ситуации, как известно [9], величина  $\gamma$  на один-два порядка больше своего теоретического значения и неравенство (34) может не выполняться. Однако для достижения интересующего нас интервала температур (42.1—75 К) необходимо либо нагревать образец (тогда вблизи поверхности пластины возникает пленка газообразного гелия), либо помещать пластину в пары гелия. При этом теплоотвод существенно уменьшится и ограничение (34) вероятнее всего будет выполняться.

#### Л и т е р а т у р а

- [1] Гусейнов Н. М., Левинсон И. Б. ЖЭТФ, 1982, т. 82, № 6, с. 1936—1943.
- [2] Померанчук И. Я. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1972, т. 1. 360 с.
- [3] Левинсон И. Б. ЖЭТФ, 1980, т. 79, № 4 (10), с. 1394—1406.
- [4] Максимов А. А., Тартаковский И. И. Письма в ЖЭТФ, 1985, т. 42, № 11, с. 458—461.
- [5] Гуревич В. Л. Кинетика фононных систем. М.: Наука, 1980. 400 с.
- [6] Займан Дж. Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962. 488 с.
- [7] Такер Дж., Рэмpton В. Гиперзвук в физике твердого тела. М.: Мир, 1975. 453 с.
- [8] Казаковцев Д. В., Левинсон И. Б. ЖЭТФ, 1985, т. 88, № 6, с. 2228—2243.
- [9] Schubert H., Leiderer P., Kindler H. Phys. Rev. B, 1982, vol. 26, N 4, p. 2317—2319.

Институт физики АН АзССР  
Баку

Поступило в редакцию  
14 марта 1988 г.  
В окончательной редакции  
6 июля 1988 г.