УДК 538.915

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ В НАКЛОННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ СПИН-ОРБИТАЛЬНОЙ СВЯЗИ

Ю. А. Бычков

Исследован энергетический спектр 2D-системы в наклонном магнитном поле при наличии спин-орбитального взаимодействия. Показано, что в этом случае отсутствует пересечение уровней Ландау, отвечающих различным ветвям спектра. Получено замкнутое выражение для определения спектра, удобное при использовании теории возмущений.

Теория [1, 2] и экспериментальные данные [3-5] показывают, что спин-орбитальное (СО) взаимодействие приводит к существенному изменению энергетического спектра двумерных электронов в гетероструктурах и инверсионных слоях МДП структур в сильном магнитном поле, которое проявляется в осцилляционных и резонансных явлениях. Однако найденный в [1] энергетический спектр относится только к случаю магнитного поля, перпендикулярного двумерному слою носителей тока. В то же время хорошо известно, что наклонное магнитное поле по-разному влияет на орбитальное движение и спиновый магнитный момент электронов. Если первое определяется только составляющей магнитного поля, перпендикулярной двумерному слою $H_\perp$, то на магнитный момент влияет все магнитное поле H. Как будет показано далее, при наличии СО взаимодействия наклон магнитного поля может существенно изменять характер энергетического спектра электронов. В частности, исчезает отмеченное в [2] пересечение уровней Ландау, принадлежащих различным ветвям спектра. Это обстоятельство обусловлено тем, что составляющая магнитного поля, лежащая в плоскости $2D$-системы ($H_\parallel$), перемешивает состояния, принадлежащие ветвям спектра, найденным при $H_\parallel=0$. Фактически при $H_\parallel\neq0$ понижается симметрия системы, и в этом случае невозможно точное решение задачи о нахождении энергетических уровней в магнитном поле. Поэтому далее исследованы только общие свойства энергетического спектра и некоторые предельные случаи.

1. Уравнения, определяющие спектр системы

Вследствие наличия инвариантного вектора ν-нормали к $2D$-слою, гамильтониан системы в магнитном поле имеет вид [1]

$$\hat{H}=\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}+\frac{\alpha}{\hbar}[\sigma,\ \hat{\mathbf{p}}]\,\nu+g\mu_{\text{Б}}\sigma\mathbf{H}/2,\qquad \hat{H}\tilde{\psi}=E\tilde{\psi},\tag{1}$$

где $\hat{\mathbf{p}}=\hat{\mathbf{P}}+e/c\mathbf{A}$, σ_i — матрицы Паули, m — эффективная масса, $\mu_{\text{Б}}$ — магнетон Бора, g есть g-фактор, α — постоянная СО взаимодействия. Согласно [1, 5], как в гетероструктурах, так и в дырочных МДП структурах на основе кремния величина α имеет порядок величины 10^{-10} эВ·см. В (1) g-фактор считается изотропным, хотя, по-видимому, нет оснований считать его одинаковым для полей $H_\parallel$ и $H_\perp$. Полагая магнитное поле

$\mathbf{H}=(H_x,\ 0,\ H_z)$, где ось $z \parallel \nu$, будем искать решение уравнения (1) в виде спинора

$$\tilde{\psi}(\rho)=e^{ip_y y/\hbar}\tilde{\varphi}\left(x+\frac{cp_y}{eH}\right). \tag{2}$$

Если ввести безразмерные переменные

$$\varepsilon=E/\hbar\omega_c, \quad u=\left(x+\frac{cp_y}{eH}\right)\Big/ l_H,$$

где магнитная длина $l_H=(c\hbar/eH)^{1/2}$, а частота $\omega_c=eH_z/mc$, то уравнение Шредингера для спинора $\tilde{\varphi}(u)$ принимает вид

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}+\frac{u^2}{2}+\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\left(u\sigma_x+i\sigma_y\frac{d}{du}\right)+A\sigma_x+\beta\sigma_z\right]\tilde{\varphi}(u)=\varepsilon\tilde{\varphi}(u), \tag{3}$$

где

$$\gamma=\sqrt{\frac{4\Delta}{\hbar\omega_c}}, \quad \beta=\frac{gm}{4m_0}, \quad A=\beta\frac{H_x}{H_z}, \quad \Delta=\frac{ma^2}{2\hbar^2}$$

и m_0 — масса свободного электрона. Аналогичное уравнение возникает и при наличии электрического поля $\mathbf{E}=(E,\ 0,\ 0)$ в плоскости двумерного слоя. С учетом сдвига уровней энергии (зависящих от импульса p_y) эффективная величина A', обусловленная полем E, есть ($H_\parallel=0$)

$$A'=\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\,l_H\frac{mcE}{\hbar H}.$$

Уравнение (3) близко к осцилляторному. В частности, операторы в скобках при величине γ являются понижающими и повышающими для осцилляторных функций. В связи с этим естественно искать решение уравнения (3) в виде

$$\tilde{\varphi}(u)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_m\varphi_m(u)\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n\varphi_n(u)\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\varphi_n(u)$ — нормированные осцилляторные функции. Легко получить систему уравнений для коэффициентов a_n, b_n

$$\left(\varepsilon-n-\frac{1}{2}-\beta\right)a_n=Ab_n+\gamma\sqrt{n+1}\,b_{n+1},$$

$$\left(\varepsilon-n-\frac{1}{2}+\beta\right)b_n=Aa_n+\gamma\sqrt{n}\,a_{n-1}. \tag{5}$$

Отсюда следует уравнение для величин $\{b_n\}$

$$\alpha_n b_{n-1}-\beta_n b_n+\alpha_{n+1}b_{n+1}=0. \tag{6}$$

Входящие в уравнения (6) величины α_n, β_n равны

$$\alpha_n(\varepsilon)=\frac{\gamma A\sqrt{n}}{\varepsilon-n+\delta}, \quad \beta_n(\varepsilon)=\varepsilon-n-\delta-\frac{\gamma^2 n}{\varepsilon-n+\delta}-\frac{A^2}{\varepsilon-n-1+\delta}, \tag{7}$$

$$\delta=\frac{1}{2}-\beta.$$

Уравнение, аналогичное (6), можно получить и для коэффициентов a_n. Однако в этом нет необходимости, так как спектр системы определяется из условия равенства нулю детерминанта симметричной якобиевой матрицы, следующего из уравнений (6). Детерминант, составленный из коэффициентов для величин $\{a_n\}$, совпадает с детерминантом, полученным из (6). Окончательно спектр системы определяется из условия

$$D = \det \begin{vmatrix} -\beta_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & . & . & . \\ \alpha_1 & -\beta_1 & \alpha_2 & 0 & . & . & . \\ 0 & \alpha_2 & -\beta_2 & \alpha_3 & . & . & . \\ & . & . & & & & . \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Отсюда видно, что отсутствует точное решение для уровней энергии в случае, когда $\{\alpha_i\} \neq 0$. Точное решение при $A\gamma = 0$ имеет вид

$$\varepsilon_n^{\pm} = n + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\beta^2 + A^2} = n + \frac{1}{2} \pm \beta \frac{H}{H_z} \tag{9}$$

в случае $\gamma = 0$ и

$$\varepsilon_0 = \delta, \quad \varepsilon_n^{\pm} = n \pm \sqrt{\delta^2 + \gamma^2 n}, \quad n \geqslant 1 \tag{9a}$$

в случае $A = 0$ [1].

Оба спектра (9), (9а) характеризуются тем, что возможно пересечение уровней, принадлежащих различным ветвям (отличающимся знаком перед корнем). Пересечение уровней в случае спектра (9) служит методом определения g-фактора. Подробная картина характера пересечения уровней в случае спектра (9) описана в [2]. Здесь простейшим примером может служить частота спинового резонанса. При $g > 0$ ($\delta < 1/2$) ее естественно определить с помощью соотношения ($A = 0$)

$$\omega_{\text{CP}} = \omega_c (\varepsilon_{n+1}^{-} - \varepsilon_n^{+}) = \omega_c \left(1 - \sqrt{\delta^2 + \gamma^2 n} - \sqrt{\delta^2 + \gamma^2 (n+1)}\right). \tag{10}$$

Она переходит в хорошо известное выражение $g\mu_{\text{Б}} H/\hbar$ при больших значениях поля H (когда $\gamma \to 0$), а при понижении поля проходит через нуль, меняет знак и снова обращается в нуль при $H = 0$.

2. Свойства энергетического спектра

Прежде всего покажем, что в общем случае $A\gamma \neq 0$ невозможно пересечение уровней. С этой целью предположим, что при заданном значении энергии ε имеются два решения системы уравнений (6), т. е., кроме решения с набором коэффициентов $\{b_n\}$, существует также решение с набором $\{b'_n\}$

$$\alpha_n b_{n-1} - \beta_n b_n + \alpha_{n+1} b_{n+1} = 0,$$
$$\alpha_n b'_{n-1} - \beta_n b'_n + \alpha_{n+1} b'_{n+1} = 0.$$

Умножая первое уравнение на b'_n, а второе — на b_n, вычитая одно уравнение из другого и суммируя от нуля до некоторого значения m, получим

$$\alpha_{m+1} (b_{m+1} b'_m - b_m b'_{m+1}) = 0,$$

т. е. при $\alpha_{m+1} \neq 0$ возникает условие

$$b'_{m+1}/b'_m = b_{m+1}/b_m. \tag{11}$$

Соотношения (6) при заданном $b_0 \neq 0$ и условии $A\gamma \neq 0$ определяют только отношения b_{n+1}/b_n. Таким образом, (11) означает, что при заданном ε возможно только одно единственное решение. Заметим, что в случае $A\gamma = 0$ возможно условие $\beta_{n_0}(\varepsilon) = \beta_{n_0+k}(\varepsilon) = 0$. При этом $b_n \sim \delta_{n, n_0}$ и $b'_n \sim \delta_{n, n_0+k}$. Характер расщепления уровней при $A\gamma \neq 0$ будет определен далее.

Остановимся теперь на некоторых общих свойствах детерминантов якобиевых матриц (у которых отличных от нуля элементы только на диагонали, первой наддиагонали и первой поддиагонали). Для матрицы, фигурирующей в (8), легко получить следующее не зависящее от номера n соотношение для детерминанта D:

$$D = d_n D_{n+1} - \alpha_{n+1}^2 d_{n-1} D_{n+2}, \tag{12}$$

где детерминант

$$d_n = \det \begin{vmatrix} -\beta_0 & \alpha_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \alpha_1 & -\beta_1 & \alpha_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -\beta_2 & . & . & . & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & . & . & . & & & \alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \alpha_n & -\beta_n \end{vmatrix},$$

а детерминант

$$D_n = \det \begin{vmatrix} -\beta_n & \alpha_{n+1} & 0 & . & . & . \\ -\alpha_{n+1} & -\beta_{n+1} & \alpha_{n+2} & . & . & . \\ 0 & \alpha_{n+2} & -\beta_{n+2} & . & . & . \\ & . & . & . & & \end{vmatrix}$$

является детерминантом бесконечной матрицы.

При любом значении энергии ε детерминанты d_n, D_n отличны от нуля. Для них существуют простые рекуррентные соотношения

$$d_n = -\beta_n d_{n-1} - \alpha_n^2 d_{n-2}, \qquad D_n = -\beta_n D_{n+1} - \alpha_{n+1}^2 D_{n+2}. \tag{13}$$

Условие (8) с учетом (12) эквивалентно равенству

$$\frac{d_n}{d_{n-1}} - \alpha_{n+1}^2 \frac{D_{n+2}}{D_{n+1}} = 0.$$

Воспользовавшись соотношениями (13), окончательно получим уравнение, определяющее спектр системы,

$$\beta_n = \cfrac{\alpha_n^2}{\beta_{n-1} - \cfrac{\alpha_{n-1}^2}{\beta_{n-2} - \dots}} + \cfrac{\alpha_{n+1}^2}{\beta_{n+1} - \cfrac{\alpha_{n+2}^2}{\beta_{n+2} - \dots}}, \tag{14}$$

причем первая дробь обрывается на $\alpha_0=0$, а вторая дробь является бесконечной. Отметим, что уравнение (14) не зависит от номера n. Оно является также удобным при нахождении спектра по теории возмущений, если один из параметров γ, A является малым. В этом случае с точностью до квадратичных членов уравнение (14) переходит в уравнение

$$\beta_n = \frac{\alpha_n^2}{\beta_{n-1}^{(0)}} + \frac{\alpha_{n+1}^2}{\beta_{n+1}^{(0)}}, \tag{15}$$

и в $\beta_k^{(0)}$ соответствующий малый параметр следует положить равным нулю. Конкретные вычисления выполним только для нахождения поправки к значению энергии (9) за счет СО взаимодействия. Она равна

$$\varepsilon_n^{(\pm)\prime} = -\frac{A^2\gamma^2}{4\varepsilon_0^2} + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_0^2}\left[\frac{n(\varepsilon_0 \mp \beta)^2}{1 \pm 2\varepsilon_0} - \frac{(n+1)(\varepsilon_0 \pm \beta)^2}{1 \mp 2\varepsilon_0}\right], \qquad \varepsilon_0 = \sqrt{\beta^2 + A^2}. \tag{16}$$

При этом предполагается, что $\gamma^2 n \ll 1$, и не происходит пересечения уровней различных ветвей спектра (9). Нетрудно получить поправку к спектру (9а) для случая $A \ll 1$ (небольшого угла наклона магнитного поля).

Разберем теперь вопрос о характере щелей в спектре при $\{\alpha_n\} \neq 0$ ($A\gamma \neq 0$). Ввиду отсутствия точного решения задачи ограничимся только предельным случаем, когда величины $\{\alpha_n\} \ll 1$. В нулевом приближении положим $\{\alpha_n\}=0$ (один из параметров γ, A равен нулю). В этом случае возможно выполнение соотношений

$$\beta_n^{(0)}(\varepsilon) = \beta_{n+k}^{(0)}(\varepsilon) = 0,$$

т. е. происходит пересечение уровней Ландау с номерами n и $n+k$, принадлежащих различным ветвям одного из спектров (9), (9а). Согласно теории возмущений для вырожденных уровней энергии, расщепление будет определяться матричным элементом взаимодействия между уровнями n, $n+k$. Согласно соотношениям (6), в первом порядке взаимодействие связывает только ближайшие уровни Ландау. Поэтому матричный элемент взаимодействия между уровнями n и $n+k$ возникает впервые только в k-м порядке теории возмущений. Таким образом, щель между первоначально вырожденными уровнями с номерами n, $n+k$ имеет порядок $(A\gamma)^k$ $(A\gamma \ll 1)$.

В заключение отметим, что в работе рассмотрены свойства энергетического спектра двумерного газа в наклонном магнитном поле при наличии СО взаимодействия. Показано, что в этом случае невозможно отмеченное ранее [2] пересечение уровней Ландау, принадлежащих различным ветвям энергетического спектра. При этом возникающая щель обусловлена совместным влиянием наклонного магнитного поля и СО взаимодействия. Это обстоятельство должно отражаться на характере осцилляционных явлений в наклонном магнитном поле. По-видимому, наиболее отчетливо явление квазипересечения уровней Ландау может проявляться для дырок в гетероструктурах на основе GaAs, где величина СО расщепления Δ может быть сравнимой с частотой циклотронного резонанса [1]. Получено замкнутое уравнение для нахождения спектра системы, позволяющее использовать теорию возмущений в любом порядке.

Литература

[1] *Бычков Ю. А., Рашба Э. И.* Письма в ЖЭТФ, 1984, т. 39, № 2, с. 66—69.
[2] *Bychkov Yu. A., Rashba E. I.* J. Phys. C, 1984, vol. 17, N 33, p. 6039—6045.
[3] *Stein D., v. Klitzing K., Weimann G.* Phys. Rev. Lett., 1983, vol. 51, N 2, p. 130—133.
[4] *Stormer H. L., Schlesinger Z., Chang A.* et al. Phys. Rev. Lett., 1983, vol. 51, N 2, p. 126—129.
[5] *Дорожкин С. И., Ольшанецкий Е. Б.* Письма в ЖЭТФ, 1987, т. 46, № 10, с. 399—402.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР
Черноголовка
Московская область

Поступило в Редакцию
14 июля 1988 г.