1989 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 31, в. 1
1989 SOLID STATE PHYSICS Vol. 31, № 1

УДК 537.311

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ДВУМЕРНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА С КУБИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Б. Н. Шалаев

Рассматривается фазовый переход II рода в двумерном n-компонентном гейзенберговском ферромагнетике с кубической анизотропией. Показано, что вблизи T_c эта система эквивалентна $O(n)$-инвариантной двумерной модели взаимодействующих фермионов (модели Гросса—Неве), в которой константа связи имеет «неправильный» знак, так что при $n > 2$ возникает нуль-заряд, а не асимптотическая свобода. Критические температурные зависимости основных термодинамических величин, найденные методом ренорм-группы, отличаются от изинговских логарифмическими множителями. Корреляционная функция, вычисленная в точке Кюри в области малых импульсов, имеет тот же вид, что и в модели Изинга, независимо от величины n.

Множество магнитных и структурных фазовых переходов описывается моделью n-компонентного поля с гиперкубической симметрией, гамильтониан которой имеет вид

$$H = \int dx^d \left[\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}\varkappa_0^2\Phi^2 + \frac{u_0}{8}(\Phi^2)^2 + \frac{v_0}{24}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i^4\right], \tag{1}$$

где

$$\varkappa_0^2 - \varkappa_{0c}^2 \sim \tau = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad \Phi^2 = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i^2, \quad (\nabla\Phi)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\nabla\Phi_i)^2.$$

В частности, при $n=0$, $u_0 < 0$ и $v_0 > 0$ (1) является эффективным гамильтонианом модели Изинга (МИ) с «замороженными» дефектами типа «случайная температура» [1, 2], а при $n \to \infty$ описывает МИ с равновесными примесями [3]. Двумерная ($2D$) модель (1) имитирует критическое поведение перовскитов $KMnF_3$, $SrTiO_3$ и ряда слоистых сегнетоэлектриков, динамика флуктуаций в которых носит отчетливо выраженный двумерный характер [4-6]. Трехмерная и ($4-\varepsilon$)-мерная версии рассматриваемой модели на сегодняшний день изучены весьма детально [2, 7-9] и в этой работе не обсуждаются. Что же касается критической термодинамики в случае $d=2$, $n > 2$, то здесь, к сожалению, мы располагаем довольно скудной информацией.

Поэтому представляет несомненный интерес решение задачи о фазовом переходе в $2D$ модели n-компонентного поля с кубической анизотропией для произвольного n, обобщающее результаты, полученные в работах Вик. С. Доценко и В. С. Доценко [10], Л. Онсагера [11] и А. А. Лушникова [3], соответственно для $n=0, 1, \infty$. Ниже найдены асимптотически точные (в пределе $T \to T_c$) формулы для основных термодинамических величин (1) в случае $d=2$, $n \neq 2$, переходящие в правильные выражения для указанных выше значений n.

Идея работы состоит в следующем. Рассмотрим ряд теории возмущений для произвольного коррелятора по степеням изотропного заряда в области малых τ. Масштабная размерность вершины u_0 на базисе изинговской фиксированной точки (ФТ) равна α/ν, где α, ν — критические индексы теплоемкости и корреляционного радиуса МИ. Для двумерной МИ $\alpha=0$, следовательно, теория возмущений по константе связи u_0 является логарифмической. Задачу о суммировании последовательности главных логарифмов можно решить сведением (1) к эквивалентной $2D$ фермионной модели.

Подчеркнем, что в обсуждаемой задаче теория возмущений по константе v_0 неприменима в принципе. Действительно, включение в изотропную систему сколь угодно слабой кубической анизотропии приводит к появлению фазового перехода при ненулевой температуре. По этой причине v_0 является сильно флуктуирующей величиной [12] и не может рассматриваться вблизи T_c как малое возмущение.

Преобразуем статистическую сумму Z системы (1) (u_0, $v_0>0$), используя известное тождество

$$Z=\int D\Phi\exp\left[-H(\Phi)\right]=\int D\lambda D\Phi\exp\left\{-\int d^2x\left[\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2+\frac{1}{2}\varkappa_0^2\Phi^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{v_0}{24}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i^4+i\lambda\Phi^2+\frac{\lambda^2}{2u_0}\right]\right\}=\int D\lambda\exp\left(-\frac{1}{2u_0}\int d^2x\lambda^2\right)Z_{IM}^n(\varkappa_0^2+i\lambda(\mathbf{x})), \qquad (2)$$

где Z_{IM} — точная статсумма $2D$ МИ, в которой роль затравочной массы играет величина $\varkappa_0^2+i\lambda$ ($\mathbf{x}$). Для Z_{IM} в окрестности T_c имеется представление в виде континуального интеграла по антикоммутирующим грассмановым переменным [10, 13]

$$Z_{IM}=\int D\bar{\psi}D\psi\exp\left(-L_0(\bar{\psi},\psi)\right),\quad L_0(\bar{\psi},\psi)=\int d^2x\left(i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi+m_0\bar{\psi}\psi\right), \qquad (3)$$

где $\bar{\psi}$, ψ — майорановские (вещественные) спинорные поля; $m_0\sim\tau$; L_0 — лагранжиан свободного спинорного поля; $\gamma_{1,2}=\sigma_{1,2}$; $\hat{\partial}=\gamma_\mu\partial_\mu$; $\mu=1, 2$; $\bar{\psi}=\psi^T\gamma_0$. Для нахождения Z_{IM} в (2) необходимо m_0 в (3) заменить на $\varkappa_0^2+i\lambda(x)$. Это важное утверждение основано на том, что в (1), (2) оператором плотности энергии $\varepsilon(\mathbf{x})$, сопряженным температурной переменной τ, является Φ^2, а в (3) в качестве $\varepsilon(\mathbf{x})$ выступает величина $\bar{\psi}\psi$. Произведя указанную замену, подставив (3) в (2) и проинтегрировав по λ, получим

$$Z=\int D\lambda\exp\left(-\frac{1}{2u_0}\int dx^2\lambda^2\right)\int\prod_{a=1}^{n}D\bar{\psi}_aD\psi_a\exp\left\{-\int dx^2\left[i\bar{\psi}_a\hat{\partial}\psi_a+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\varkappa_0^2+i\lambda(\mathbf{x}))\bar{\psi}_a\psi_a\right]\right\}=\int\prod_{a=1}^{n}D\bar{\psi}_aD\psi_a\exp\left(-L_{GN}(\bar{\psi}_a,\psi_a)\right),$$

$$L_{GN}(\bar{\psi}_a,\psi_a)=\int dx^2\left[i\bar{\psi}_a\hat{\partial}\psi_a+m_0\bar{\psi}_a\psi_a+u_0(\bar{\psi}_a\psi_a)^2\right], \qquad (4)$$

где L_{GN} — лагранжиан модели Гросса—Неве. Корректность формулы (4) легко доказывается разложением (4) в ряд по степеням u_0 и применением фермионного представления для многоточечных корреляционных функций (КФ) оператора плотности энергии $\varepsilon(\mathbf{x})$ в $2D$ МИ

$$\langle\varepsilon_{a_1}(\mathbf{x}_1)\ldots\varepsilon_{a_m}(\mathbf{x}_m)\rangle=\int D\Phi\Phi_{a_1}^2(\mathbf{x}_1)\ldots\Phi_{a_m}^2(\mathbf{x}_m)\exp\left(-H_{IM}(\Phi_a)\right)=$$

$$=\int\prod_{a=1}^{n}D\bar{\psi}_aD\psi_a\bar{\psi}_{a_1}(\mathbf{x}_1)\psi_{a_1}(\mathbf{x}_1)\ldots\bar{\psi}_{a_m}(\mathbf{x}_m)\psi_{a_m}(\mathbf{x}_m)\exp\left(-\sum_{a=1}^{n}L_0(\bar{\psi}_a,\psi_a)\right), \qquad (5)$$

$$H_{IM}(\Phi)=\int d^2x\left[\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2+\frac{1}{2}\varkappa_0^2\Phi^2+\frac{v_0}{24}\Phi^4\right],$$

где $H_{IM}(\Phi)$ — гамильтониан модели Изинга. В (5) опущены несущественные постоянные множители.

Итак, рассматриваемая система в окрестности точки Кюри эквивалентна $O(n)$-симметричной модели Гросса—Неве, которая является перенормируемой в двумерном пространстве. Очень важно, что затравочная изотропная вершина u_0 имеет «неправильный» знак, поэтому при $n > 2$ реализуется нуль-заряд, а не асимптотическая свобода. Последней в нашей задаче соответствует, по-видимому, фазовый переход I рода.

Уравнения Гелл—Манна—Лоу, описывающие эволюцию инвариантного заряда u в однопетлевом приближении, имеют вид [10]

$$\frac{du}{dt} = \beta(u) = -\frac{(n-2)}{\pi} u^2, \quad t = \ln\frac{\Lambda}{m}, \tag{6}$$

где m — обратный радиус корреляции, Λ — импульс обрезания, $\beta(u)$ — функция Гелл—Манна—Лоу. Из (6) получаем нуль-зарядную асимптотику для u при $t \to \infty$

$$u = \pi/(n-2)\,t, \tag{7}$$

справедливую не только при $n > 2$, $u_0 > 0$, но и для $n < 2$, $u_0 < 0$, т. е. и для примесной МИ.

Для вычисления температурных зависимостей теплоемкости и радиуса корреляции используем уравнения ренорм-группы

$$\frac{dm}{d\tau} = T \quad \frac{d\ln T}{dt} = -\frac{(n-1)}{\pi} u, \tag{8}$$

где T — вершина с двумя спинорными хвостами и одним углом, вычисленная на нулевых внешних импульсах. Подставляя (7) в (8) и интегрируя, находим [14]

$$T \sim t^{(1-n)/(n-2)}, \quad m \sim \tau\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{(1-n)/(n-2)}. \tag{9}$$

Теплоемкость связана с амплитудой T известным соотношением

$$C \sim \int dt T^2(t) \sim \frac{n-2}{n} t^{n/(2-n)} \sim \frac{n-2}{n}\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{n/(2-n)}. \tag{10}$$

Из формул (9), (10) при $n=1$ получаем классические формулы Онсагера [11]

$$r_c \sim m^{-1} \sim \tau^{-1}, \quad C \sim \ln(1/\tau). \tag{11}$$

В случае $n=0$ (9), (10) воспроизводят известные результаты Вик. С. Доценко и В. С. Доценко для МИ с примесными связями, в частности замечательную формулу для теплоемкости [10]

$$C \sim \ln\ln(1/\tau). \tag{12}$$

Устремив в (9), (10) $n \to \infty$, находим критические температурные зависимости теплоемкости и корреляционного радиуса для МИ с равновесными примесями, впервые полученные в работе А. А. Лушникова [3]

$$r_c \sim \tau^{-1}\ln\frac{1}{\tau} \quad C \sim \left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{-1}. \tag{13}$$

Как известно, в этом случае происходит фишеровская ренормировка «температурных» критических индексов α, ν, γ. В рассматриваемой ситуации, поскольку $\alpha=0$, фишеровская ренормировка сводится к появлению логарифмических множителей в температурных зависимостях радиуса корреляции и восприимчивости.

Интересно, что при всех $n > 2$ теплоемкость конечна в точке перехода, поэтому неравновесные примеси типа «случайная температура» в данной задаче несущественны. Подробные вычисления и результаты, касающиеся критического поведения неупорядоченной системы (1), будут опубликованы отдельно.

Обсудим кратко $2D$ двухкомпонентную модель с квадратной анизотропией, к которой формулы (9), (10) непосредственно неприменимы. Эта система изоморфна модели Бакстера; в окрестности точки Кюри она описывается, согласно (4), $O(2)$-инвариантной моделью Гросса—Неве или, что то же самое, массивной моделью Тирринга. В последней инвариантный заряд u не перенормируется; это обстоятельство фактически является следствием симметрии Крамерса—Ванье. Масштабные размерности операторов некоторых физических величин, в частности критические индексы ν и α, непрерывно зависят от затравочной константы связи u_0. Критический индекс Фишера η, однако, такой же, как и в $2D$ МИ: $\eta=1/4$ и от u_0 не зависит.

Конечно, неуниверсальность критического поведения и другие следствия не являются новыми результатами (см., например, книгу Р. Бакстера [15]). Здесь они приведены с целью проиллюстрировать на частном примере правильность представления (4).

Любопытная ситуация возникает в физически интересном случае $n=3$. Как впервые отметил Э. Виттен [16], безмассовая $O(3)$-инвариантная модель Гросса—Неве является суперсимметричной. Убедиться в этом можно следующим образом. Два вещественных спинорных поля ψ_1 и ψ_2 объединяются в одно комплексное (дираковское) поле $\psi_D=\psi_1+i\psi_2$, которое в свою очередь выражается через скалярное поле Φ по формулам Манделстама. В результате этих преобразований (детально изложенных в [17]) мы приходим к лагранжиану суперсимметричной модели синус-Гордон. Это еще один пример нетривиальной скрытой симметрии, имеющей место в магнитных системах.

Перейдем к вычислению КФ флуктуаций параметра порядка системы (1) в точке фазового перехода. С этой целью запишем ряд теории возмущений для этой величины по степеням u_0

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\equiv\langle\Phi_1(\mathbf{x})\,\Phi_1(\mathbf{y})\rangle=Z^{-1}\int D\Phi\,\Phi_1(\mathbf{x})\,\Phi_1(\mathbf{y})\exp\left[-H(\Phi)\right]=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{u_0}{8}\right)^m\int\ldots\int d^2\mathbf{z}_1\ldots d^2\mathbf{z}_m\langle\Phi_1(\mathbf{x})\,\Phi_1(\mathbf{y})\,(\Phi^2(\mathbf{z}_1))^2\ldots(\Phi^2(\mathbf{z}_m))^2\rangle_{IM}. \quad (14)$$

Угловые скобки означают гиббсовское среднее с гамильтонианом МИ (5). Нулевой член разложения в (14), очевидно, совпадает со спиновой КФ двумерной МИ. Эту величину можно представить в виде функционального интеграла по майорановским спинорным полям

$$\langle\Phi_1(\mathbf{x})\,\Phi_1(\mathbf{y})\rangle_{IM}=\int D\bar{\psi}_1 D\psi_1\exp\left\{-2\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}}dz\bar{\psi}_1\psi_1-L_0(\bar{\psi}_1,\psi_1)\right\}, \quad (15)$$

левую часть (15) удобно обозначить как

$$\left\langle\exp\left(-2\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}}dz\bar{\psi}_1\psi_1\right)\right\rangle_0.$$

Общий член ряда (14) является многоточечным коррелятором, содержащим, помимо двух «спиновых» операторов $\Phi_1(\mathbf{x})$, $\Phi_1(\mathbf{y})$, некоторое число операторов плотности энергии $\varepsilon(\mathbf{z})$; в ψ-представлении рассматриваемая КФ имеет вид

$$\langle\Phi_1(\mathbf{x})\,\Phi_1(\mathbf{y})\,(\Phi^2(\mathbf{z}_1))^2\ldots(\Phi^2(\mathbf{z}_m))^2\rangle_{IM}=\int\prod_{a=1}^{n}D\bar{\psi}_a D\psi_a\times$$

$$\times\exp\left\{-2\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}}dz\bar{\psi}_1\psi_1-\sum_{a=1}^{n}L_0(\bar{\psi}_a\psi_a)\right\}(\bar{\psi}_{a_1}(\mathbf{z}_1)\,\psi_{a_1}(\mathbf{z}_1))^2\ldots(\bar{\psi}_{a_m}(\mathbf{z}_m)\,\psi_{a_m}(\mathbf{z}_m))^2. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (14), находим искомое выражение для величины $G(\mathbf{x})$

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = Z^{-1} \int \prod_{a=1}^{n} D\bar{\psi}_a D\psi_a \exp\left\{-2\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz\bar{\psi}_1\psi_1 - L_{GN}(\bar{\psi}_{a_1}\psi_a)\right\}. \qquad (17)$$

Сравнив формулы (15) и (17), мы видим, что в обоих случаях КФ представляет собой среднее по основному состоянию от нелокального оператора

$$\exp\left(-2\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz\bar{\psi}_1\psi_1\right) \qquad (18)$$

с той лишь разницей, что в МИ мы имеем дело с основным состоянием $2D$ идеального газа ферми-частиц, а в кубической модели — с вакуумом системы взаимодействующих фермионов (модели Гросса—Неве).

Итак, вычисление КФ (17) в рамках теории возмущений по степеням константы связи u_0 сводится к нахождению изинговских корреляторов вида (5) и (16), поэтому возникает необходимость в эффективном алгоритме для расчета этих КФ. Отметим, что вычисление КФ (5) не представляет проблемы, так как может быть легко выполнено с помощью теоремы Вика. Напротив, нахождение КФ, содержащих «фермионную струну», технически значительно сложнее, несмотря на то что континуальный интеграл (16), как и (5), является гауссовским.

Несомненно, самым удобным и элегантным методом расчета КФ в точке фазового перехода является метод бозонизации. В нашу задачу не входит подробный вывод соответствующих формул, который можно найти в статье Зубера и Ицыксона [18] (применительно к примесной МИ в [19, 20]). В этой работе было показано, что квадрат КФ (15) можно записать в виде следующего континуального интеграла по бозе-полю Ф:

$$\left\langle \exp\left(-2\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz\bar{\psi}_1\psi_1\right)\right\rangle_0^2 = \frac{(\mu a)^{1/2}}{\pi^2} \int D\Phi \sin\sqrt{\pi}\,\Phi_{\mathbf{x}} \sin\sqrt{\pi}\,\Phi_{\mathbf{y}} \exp[-S(\Phi)], \qquad (19)$$

$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\int d^2x\left[(\nabla\Phi)^2 + \mu^2\Phi^2 + \frac{2c\mu}{\pi} m_0 \cos(2\sqrt{\pi}\,\Phi)\right], \qquad (20)$$

где C — константа, связанная с постоянной Эйлера; a — постоянная решетки; μ — инфракрасное обрезание, которое в конце вычислений следует положить равным нулю. Таким образом, квадрат спиновой КФ (16) в $2D$ МИ выражается через функцию Грина (19) квантовой модели синус-Гордон.

Допустим, что затравочная масса фермиона m_0 зависит от координат $m_0 = m(\mathbf{x})$. Дифференцируя (19) нужное число раз по $m(\mathbf{x})$, получим бозонное представление для КФ (16). Общая формула здесь не приводится ввиду ее громоздкости.

Для полноты изложения выпишем еще формулу для КФ (5)

$$\left\langle \prod_{k=1}^{l} \bar{\psi}(\mathbf{x}_k)\psi(\mathbf{x}_k)\right\rangle_0 = \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^l \int D\Phi \prod_{k=1}^{l} \cos\left(2\sqrt{\pi}\,\Phi_{\mathbf{x}_k}\right) \exp[-S(\Phi)]. \qquad (21)$$

Бозонное представление (19), (21) обладает замечательным свойством: в точке фазового перехода, где $m_0=0$, континуальный интеграл по Ф становится гауссовским, что позволяет легко рассчитывать поправки по крайней мере в низших приближениях теории возмущений.

В первом порядке по u_0 вычисления оказываются особенно простыми

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \left\langle \exp\left(-2\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz\bar{\psi}_1\psi_1\right)\right\rangle_0 - u_0 \int d^2z_2 \times$$

$$\times\left\langle \exp\left(-2\int\limits_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz_1\bar{\psi}_1\psi_1\right)(\bar{\psi}_a\psi_a)^2\right\rangle_0 + O(u_0^2). \qquad (22)$$

Биквадратичную форму, стоящую во втором слагаемом в (22), перепишем в виде

$$(\bar{\psi}_a\psi_a)^2 = 2\bar{\psi}_1\psi_1\sum_{a=2}^{n}\bar{\psi}_a\psi_a + \sum_{\substack{a,\ b=2\\ a\neq b}}^{n}\bar{\psi}_a\psi_a\bar{\psi}_b\psi_b, \qquad (23)$$

так как для майорановских спиноров имеет место равенство (суммирования по a нет)

$$\bar{\psi}_a\psi_a\bar{\psi}_a\psi_a = 0. \qquad (24)$$

Подставив (23) в (22), получим

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \left\langle \exp\left(-2\int\limits_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz\bar{\psi}_1\psi_1\right)\right\rangle_0 - 2u_0\int d^2x' \times$$

$$\times\left\langle \exp\left(-2\int\limits_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz\bar{\psi}_1\psi_1\right)\bar{\psi}_1(\mathbf{x}')\psi_1(\mathbf{x}')\right\rangle_0 \left\langle\sum_{a=2}^{n}\bar{\psi}_a(\mathbf{x}')\psi_a(\mathbf{x}')\right\rangle_0 -$$

$$-2u_0\int d^2x'\left\langle \exp\left(-2\int\limits_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} dz\bar{\psi}_1\psi_1\right)\right\rangle_0 \sum_{a\neq b=2}^{n}\langle\bar{\psi}_a(\mathbf{x}')\psi_a(\mathbf{x}')\rangle_0\langle\bar{\psi}_b(\mathbf{x}')\psi_b(\mathbf{x}')\rangle_0. \qquad (25)$$

В (25) учтено, что величины, имеющие разные изоспиновые значки, усредняются независимо. Нетрудно видеть, что второе и третье слагаемые в (25) обращаются в нуль благодаря тому, что в точке фазового перехода

$$\langle\bar{\psi}_a\psi_a\rangle_0 = 0 \qquad (26)$$

(суммирования по a нет), поскольку произведение операторов в (26) является нормальным. Из (25), (26) вытекает полезное следствие: для любых n поправка первого порядка равна нулю

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{a^{1/4}}{\sqrt{2}\,\pi\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1/4}} + O(u_0^2). \qquad (27)$$

Обратимся к ренорм-групповому уравнению для $G(x)$. Это уравнение, как обычно, отражает тот факт, что параметр порядка Φ_i обладает определенной масштабной размерностью и, следовательно, $G(\mathbf{x})$ перенормируется мультипликативно

$$G(\mathbf{p}) = Z(u)\,G_R(\mathbf{p},\ u,\ \mu), \qquad (28)$$

где μ — импульс нормировки.

В правильности (28) можно убедиться и непосредственно по теории возмущений. Действительно, разложение коррелятора (17) в точке Кюри по степеням u_0 устроено таким образом, что в каждом порядке содержатся только логарифмические расходимости. Из теории перенормировок известно, что если ряд теории возмущений для некоторой КФ имеет логарифмическую структуру, то эта КФ перенормируется мультипликативно; при этом для устранения логарифмических расходимостей достаточно ввести одну ренормировочную постоянную. В перенормируемой теории, в том числе и в модели Гросса—Неве, величина Z зависит только от инвариантного заряда u.

Уравнение ренорм-группы (уравнение Овсянникова) для $G_R(\mathbf{p})$ легко получить, дифференцируя соотношение (28) по импульсу нормировки μ

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta(u)\right\}G_R(\mathbf{p},\ u,\ \mu) = 0, \qquad (29)$$

где

$$\eta(u)=\beta(u)\frac{d\ln Z(u)}{du}. \tag{30}$$

Отметим, что структура КФ в фермионном представлении напоминает структуру вильсоновского среднего в теории полей Янга—Миллса

$$W(C)=\left\langle \operatorname{tr} P\exp\left(ig\oint_C A_\mu dx^\mu\right)\right\rangle. \tag{31}$$

В работе [21] строго доказано, что величина $W(C)$, так же как и (15), перенормируется мультипликативно и удовлетворяет уравнению типа (29).

Из (27) следует, что в разложении $\eta(u)$ по степеням u отсутствует член, линейный по u

$$\eta(u)=7/4+O(u^2), \tag{32}$$

поэтому в области малых импульсов КФ имеет степенно́й вид без логарифмических множителей

$$G(\mathbf{p})\sim p^{-7/4}. \tag{33}$$

Таким образом, поведение КФ оказывается точно таким же, как и в МИ; следовательно, $\eta=1/4$. Это означает чисто степенну́ю зависимость восприимчивости от радиуса корреляции

$$\chi\sim r_c^{7/4}\sim\tau^{-7/4}\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{7(n-1)/4(n-2)} \tag{34}$$

(температурная зависимость r_c дается формулой (9)). Критические зависимости спонтанной намагниченности M от τ, а также от внешнего магнитного поля при $\tau=0$ находятся из обычных скейлинговых соотношений

$$M\sim r_c^{\eta/2}\sim(-\tau)^{1/8}\left(\ln\frac{1}{(-\tau)}\right)^{(n-1)/8(n-2)},\qquad H\sim M^{(4+\eta)/\eta}\sim M^{15}. \tag{35), (36}$$

В случае примесной МИ ($n=0$) выражения для КФ и восприимчивости были получены ранее в работе автора [19].

Мы видим, что критическое поведение системы (1) в области u_0, $v_0>0$ для $d=2$, $n\neq 2$ определяется изинговской ФТ. Критические температурные зависимости термодинамических величин отличаются от изинговских медленно меняющимися логарифмическими множителями, которые отсутствуют лишь в импульсной зависимости КФ и в намагниченности как функции магнитного поля при $\tau=0$. Здесь имеется определенная аналогия с $4D$ системами, где самодействие флуктуирующих полей также порождает логарифмические поправки к термодинамическим характеристикам свободной теории [22].

Интересно проследить, по крайней мере на качественном уровне, изменение критического поведения $(4-\varepsilon)$-мерной кубической модели с ростом ε от 0 до 2. При малых ε уравнения Гелл—Манна—Лоу для инвариантных зарядов u и v имеют, как известно, 4 фиксированные точки: гауссовскую $u=v=0$, изинговскую $u=0$, $v\sim\varepsilon$, изотропную $v=0$, $u\sim\varepsilon$ и кубическую $u\sim v\sim\varepsilon$. Изотропная ФТ является устойчивой, если число компонент параметра порядка меньше некоторого критического значения $n_c(\varepsilon)$: $n<n_c(\varepsilon)=4-2\varepsilon+O(\varepsilon^2)$; кубическая ФТ представляет собой устойчивый узел соответственно при $n>n_c(\varepsilon)$, а гауссовская и изинговская ФТ всегда неустойчивы. С увеличением ε число $n_c(\varepsilon)$ уменьшается, при этом кубическая ФТ приближается к изинговской и, что очень важно, сливается с ней при $\varepsilon=2$ (т. е. в двумерном пространстве). Действительно, согласно (7), изотропная вершина u в точке фазового перехода обращается в нуль.

К выводу о слиянии кубической и изинговской ФТ можно прийти и без обращения к полученным выше результатам, если рассуждать следующим образом. Двумерная кубическая модель в «сферическом пределе» $n \to \infty$ (МИ с равновесными примесями) описывается изинговской ФТ, так как критический индекс теплоемкости $\alpha=0$, поэтому фишеровская ренормировка значений индексов не меняет. Если допустить, что слияния ФТ не происходит, то окажется, что в любой столь угодно малой окрестности изинговской ФТ находится бесконечно много кубических ФТ, отвечающих разным n. Это в свою очередь означает существование бесконечно большого числа $2D$ моделей конформно-инвариантных (КИ) теорий поля, в которых масштабные размерности полевых операторов сколь угодно мало отличаются от изинговских.

Последнее утверждение, однако, противоречит современной точке зрения на $2D$ КИ теории поля. В двумерном случае точные КИ решения (евклидовой) квантовой теории поля классифицируются с помощью представлений алгебры Вирасоро — алгебры группы конформных преобразований двумерного пространства [23]. Для задач статистической физики интерес представляют не все решения, а только те, которые удовлетворяют условию унитарности, поскольку обычно мы имеем дело с системами, описываемыми эрмитовыми гамильтонианами [24].

Известно, что поставленному требованию удовлетворяют три серии точных решений [25], из которых, по-видимому, только одна имеет отношение к рассматриваемой модели — серия так называемых «минимальных» КИ теорий поля. «Минимальные» модели связаны с вырожденными представлениями алгебры Вирасоро, для которых центральный заряд пробегает следующие значения [24]:

$$c_n = 1 - 6/n(n+1), \quad n = 3, 4, \ldots . \tag{37}$$

Простейшая «минимальная» теория с $n=3$ описывает двумерную модель Изинга в точке фазового перехода. Для нас важно, что никаких других решений в окрестности изинговского решения с $C=1/2$ нет, так как можно показать, что «минимальными» моделями (37) исчерпываются все унитарные решения с $C<1$.

Из сказанного следует, что общие требования КИ и унитарности запрещают существование КИ решений с критическими индексами, значения которых сколь угодно мало отличаются от изинговских. Таким образом, в двумерной задаче кубические ФТ отсутствуют. Класс моделей (1), включая МИ со случайными связями, в точке фазового перехода описывается изинговской «минимальной» теорией с $C=1/2$.

Я благодарен А. И. Соколову за то, что он привлек мое внимание к этой задаче, а также С. Н. Дороговцеву и С. А. Ктиторову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Grinstein G., Luther A. // Phys. Rev. B. 1976. V. 13. N 3. P. 1329—1340.
[2] Шалаев Б. Н. // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. № 6. С. 2301—2308.
[3] Лушников А. А. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. № 1. С. 215—218.
[4] De'Bell K., Geldart D. J. W. // Phys. Rev. B. 1985. V. 32. N 7. P. 4763—4765.
[5] Comes R., Denoyer F., Deshamps L., Lambert M. // Phys. Lett. 1971. V. 34A. N 1. P. 65—67.
[6] Feder J. // Ferroelectrics. 1976. V. 12. N 1. P. 71—84.
[7] Соколов А. И., Шалаев Б. Н. // ФТТ. 1981. Т. 23. № 7. С. 2058—2063.
[8] Newman K. E., Riedel E. K. // Phys. Rev. B. 1982. V. 25. N 1. P. 264—280.
[9] Майер И. О., Соколов А. И. // ФТТ. 1984. Т. 26. № 11. С. 3454—3456.
[10] Dotsenko Vik S., Dotsenko V. S. // Adv. in Phys. 1983. V. 32. N 2. P. 129—172.
[11] Onsager L. // Phys. Rev. 1944. V. 65. N 1. P. 117—149.
[12] Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М., 1982. 382 с.
[13] Schultz T. D., Mattis D. S., Lieb E. H. // Rev. Mod. Phys. 1964. V. 36. N 3. P. 856—871.
[14] Шалаев Б. Н. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 3. С. 895—896.
[15] Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. М., 1985. 486 с.
[16] Witten E. // Nucl. Phys. B. 1978. V. 142. N 3. P. 285—300.
[17] Aratyn H., Damgaard P. H. // Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. N 1. P. 253—273.

[18] Zuber J. B., Itzykson C. // Phys. Rev. D. 1977. V. 15. N 10. P. 2875—2884.
[19] Шалаев Б. Н. // ФТТ. 1984. Т. 26. № 10. С. 3002—3005.
[20] Shankar R. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. N 23. P. 2466—2469.
[21] Korchemsky G. P., Radyushkin A. V. // Nucl. Phys. B. 1987. V. 283. N 1, 2. P. 342—364.
[22] Ларкин А. И., Хмельницкий Д. Е. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. № 6. С. 2089—2098.
[23] Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. // Nucl. Phys. 1984. V. B241. № 3. P. 333—380.
[24] Friedon D., Qiu Z., Shenker S. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1575—1580.
[25] Замолодчиков А. Б., Фатеев В. А. // ТМФ. 1987. Т. 71. № 2. С. 163—178.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)
Ленинград

Поступило в Редакцию
6 июля 1988 г.