1989 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 31, в. 1
1989 SOLID STATE PHYSICS Vol. 31, № 1

УДК 539.211

ЛОКАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ И ФОРМА ЛИНИИ ЯМР ОДНОМЕРНОГО ПРОВОДНИКА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Б. Л. Альтшулер, В. Н. Пригодин

Изучено влияние внешнего электрического поля на распределение локальной плотности состояний. Оказалось, что это распределение в полях, близких к пороговому, делокализующему, становится универсальным и не зависит от способа определения плотности состояний. В этих полях все моменты participation ratio, кроме первого, стремятся к нулю. Определена форма линии ядерного магнитного резонанса в произвольном электрическом поле. Подробно исследовано влияние граничных условий на статистику флуктуаций плотности состояний.

Локальная плотность состояний (ЛПС) электронов проводимости и ее статистические свойства представляют интересный объект исследования теории неупорядоченных проводников. В отличие от усредненной по реализациям случайного примесного потенциала плотности состояний флуктуации ЛПС весьма чувствительны к переходу металл—диэлектрик — к андерсоновской локализации.

В предыдущей работе авторов [1] была полностью решена задача о статистике ЛПС в одномерном случае, когда все состояния электронов локализованы. В настоящей работе мы рассмотрим флуктуации ЛПС во внешнем электрическом поле.

Вопрос о влиянии электрического поля на одномерную локализацию исследовался в ряде работ [2-6]. Наиболее существенный качественный результат этого рассмотрения состоит в существовании критического делокализующего поля [2]. Естественно ожидать, что и распределение ЛПС, а вместе с ним и форма линии ЯМР, будет существенно меняться при приложении электрического поля, близкого к критическому или превышающего его.

В [1] было показано, что ЛПС в точке x с энергией ε, определенную как

$$\rho(\varepsilon,\ x)=\frac{1}{N_\varepsilon}\sum_\nu|\psi_\nu(x)|^2\,\delta(\varepsilon-\varepsilon_\nu)=\frac{1}{N_\varepsilon}\langle x|\,\varepsilon-\hat{H}\,|x\rangle, \tag{1}$$

для изучения статистических свойств необходимо регуляризовать, усреднив ее с некоторым весом $f(\varepsilon)$ по интервалу энергий с характерной шириной η

$$\rho_f(\varepsilon,\ x)=\frac{1}{N_\varepsilon}\sum_\nu|\psi_\nu(x)|^2 f(\varepsilon-\varepsilon_\nu)=\int d\varepsilon'\rho(\varepsilon',\ x)\,f(\varepsilon-\varepsilon'). \tag{2}$$

В (1), (2) индекс «ν» нумерует точные собственные состояния гамильтониана $\hat{H}$ с энергией ε и волновой функцией $\psi_\nu(x)$. Для удобства мы будем измерять ЛПС в единицах N_ε — средней по случайному потенциалу плотности состояний с энергией ε. В одномерном случае $N_\varepsilon=(\pi v_\varepsilon)^{-1}$, где v_ε — скорость электрона с энергией ε. Оказывается [1], что функция распределения $W(\rho_f)$ ЛПС ρ_f существенно зависит не только от характерной ширины интервала усреднения, но и от самой весовой функции $f(\varepsilon)$.

Рассмотрим задачу о форме линии ядерного магнитного резонанса (ЯМР), возникающей из-за распределения локальных сдвигов Найта [1, 7-9]. Локальный сдвиг Найта частоты ЯМР в магнитном поле H пропорционален ЛПС (2)

$$\Delta\omega = Jg\mu_e HN_{\varepsilon_F}\rho_f(x) \tag{3}$$

с весовой функцией

$$f(\varepsilon) = \frac{n_F(\varepsilon - g\mu_e H) - n_F(\varepsilon + g\mu_e H)}{2g\mu_e H}, \quad n_F(\varepsilon) = \left[e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_F}{T}} + 1\right]^{-1}. \tag{4}$$

В (3), (4) $g\mu_e H$ — зеемановское расщепление, ε_F — энергия Ферми, J — константа сверхтонкого расщепления. В пределе $T \ll g\mu_e H$ (4) приобретает вид

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2g\mu_e H}\theta\left(|\varepsilon - \varepsilon_F| - g\mu_e H\right). \tag{5}$$

ЛПС (2) с весовой функцией (5) мы, как и в [1], будем обозначать $\rho_3(x)$. Функция распределения $W(\rho_3)$, описывающая форму линии ЯМР при $T \to 0$ в отсутствие электрического поля, была определена в [1]

$$W(\rho_3) = \frac{(s_3\rho_3)^{s_3}}{\Gamma(s_3)\rho_3}\exp(-s_3\rho_3), \quad s_3 = \frac{8}{\pi}g\mu_e H\tau_{\varepsilon_F}, \tag{6}$$

где $\Gamma(s_3)$ — гамма-функция; τ_ε — время свободного пробега электрона с энергией ε; $\varepsilon\tau_\varepsilon \gg 1$.

Если к образцу приложено электрическое поле E, функция распределения отличается от фермиевской (4) заменой ε на $\varepsilon + eEx$. При $T=0$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2g\mu_e H}\theta\left(|\varepsilon + eEx - \varepsilon_F| - g\mu_e H\right).$$

Безразмерный параметр, характеризующий величину электрического поля, представляет собой отношение энергии, набираемой электроном в этом поле на длине свободного пробега $l_\varepsilon = v_\varepsilon\tau_\varepsilon$, к энергии электрона ε

$$\alpha = |eEl_\varepsilon|/\varepsilon. \tag{7}$$

Как показано в работе [2], при $\alpha=1$ происходит делокализация электронных состояний.

Вычисления, проведенные нами в рамках диаграммной техники Березинского [10] и описанные ниже, приводят к следующему выражению для неприводимых флуктуационных моментов (кумулянтов или семиинвариантов) величины ρ_3 при $s_3 \ll 1$:

$$\langle\rho_3^n\rangle_c = s_3^{1-n}a_n, \quad a_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+1)}\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}. \tag{8}$$

В отсутствие электрического поля $\alpha=0$ и (8) соответствует функции распределения (6). Распределение $W(\rho_3)$ при $\alpha \neq 0$ можно получить из (8) при помощи известной формулы

$$W(\rho_3) = s_3\int_{-0-i\infty}^{-0+i\infty}\frac{dq}{2\pi i}e^{s_3[q\rho_3+\chi'(q)]}, \tag{9}$$

где $\chi(q)$ — производящая функция для кумулянтов

$$\chi(q) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-q)^n}{\Gamma(n+1)}a_n = \int_{-1+0-i\infty}^{-1+0+i\infty}\frac{dn}{2\pi i}\frac{\Gamma(n)a_{-n}}{q^n}. \tag{10}$$

Из (9), (10) можно получить следующие асимптотики функции $W(\rho_3)$:

$$W(\rho_3)=\begin{cases}\dfrac{(s_3\rho_3)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma)}\dfrac{1}{\rho_3}\exp(-s_3\rho_3), & s_3^{-1}<\rho_3,\\ \dfrac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\dfrac{s_3^{1-\alpha}}{\rho_3^{1+\alpha}}, & \rho_m<\rho_3<s_3^{-1},\\ \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2}\left(\dfrac{\rho_m}{\rho_3}\right)^{\nu/2}\dfrac{1}{\rho_3}\exp\left(-\left(\dfrac{\rho_m}{\rho_3}\right)^{\nu}\right), & \rho_3<\rho_m,\end{cases}\tag{11}$$

здесь

$$\sigma=s_3\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha},\quad \nu=\frac{\alpha}{1-\alpha},\quad \rho_m=\frac{\alpha}{s_3(1-\alpha)}\left[\frac{\Gamma(2\alpha)(1-\alpha)}{\Gamma^2(1+\alpha)}s_3\right]^{1/\alpha}.\tag{12}$$

Из сравнения (11) с (6) следует, что электрическое поле существенно меняет вид $W(\rho_3)$: при $\alpha>s_3$ максимум этой функции начинает смещаться из точки $\rho_3=0$ в точку $\rho_3\simeq\rho_m$. При этом $W(\rho_m)\approx\rho_m^{-1}$. При приближении α к критическому значению, равному единице, максимум $W(\rho_3)$ оказывается вблизи $\rho_3=1$: если $(1-\alpha)^{-1}\simeq\nu\gg|\ln s_3|\gg 1$, то

$$\rho_m=1-O\left(\nu^{-1}\ln\frac{\nu}{s_3}\right).$$

При этом распределение $W(\rho_3)$ остается существенно негауссовским и асимметричным. С левой стороны это распределение имеет резкий край

$$W(\rho_3)=\left(\frac{\nu s_3}{4\pi}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{\nu(1-\rho_3)}{2}-\frac{s_3}{\nu}\exp[\nu(1-\rho_3)]\right\}\tag{13}$$

при $(1-\rho_3)>\nu\ln(\nu/s_3)$. В то же время спадание $W(\rho_3)$ при $\rho_3>1$ происходит гораздо медленнее: если $\nu^{-1}<\rho_3-1<s_3^{-1}$, то

$$W(\rho_3)=1/\nu(\rho_3-1)^2.\tag{14}$$

Рассмотрение, проведенное в настоящей работе, позволяет вычислять флуктуационные моменты ЛПС (2) при произвольной $f(\varepsilon)$. Дело в том, что при любом $f(\varepsilon)$ имеет место соотношение [1], которое остается справедливым и при наличии внешнего электрического поля

$$\langle\rho_f^n(\varepsilon,x)\rangle_c=\frac{b_n(\varepsilon,x)}{N^n(x)}\int d\varepsilon' f^n(\varepsilon-\varepsilon'),\quad N(x)=\frac{1}{\pi v(x)},\tag{15}$$

где b_n представляет собой n-й момент, известный как participation ratio [11]

$$b_n(\varepsilon,x)=\left\langle\sum_{\nu}|\psi_\nu(x)|^{2n}\delta(\varepsilon-\varepsilon_\nu)\right\rangle.\tag{16}$$

В следующих двух разделах мы опишем вычисление $b_n(\varepsilon,x)$ при помощи диаграммной техники Березинского. Из $b_n(x,\varepsilon)$ при помощи (15) была получена и формула (8) для $\langle\rho_3^n\rangle_c$.

Другой выбор регуляризации ЛПС, представляющий интерес, имеет вид

$$\rho_1(\varepsilon,x,\eta)=\frac{1}{\pi}\sum_{\nu}|\psi_\nu(x)|^2\frac{\eta}{(\varepsilon-\varepsilon_\nu)^2+\eta^2}.\tag{17}$$

В отсутствие электрического поля распределение $W(\rho_1)$ описывается так называемым обратным гауссовским законом [1]

$$W(\rho_1)=\left(\frac{s_1}{4\pi\rho_1^3}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{s_1}{2}\frac{(\rho_1-1)^2}{\rho_1}\right],\quad s_1=8\pi\eta\tau_\varepsilon.\tag{18}$$

Это распределение существенно отличается от (6). Однако оказывается, что уже при $\alpha>1/2$ $W(\rho_1)$ отличается от (11) только численными коэффициентами (и, разумеется, заменой s_3 на s_1). Если же $\alpha\to 1$, то $W(\rho_1)$ переходит в (13), (14).

Отсюда можно сделать вывод об универсальности функции распределения $W(\rho_f)$ при $\alpha \to 1$, т. е. о независимости ее от конкретного вида весовой функции $f(\varepsilon)$. Этого следовало ожидать, поскольку из-за делокализации электронных состояний флуктуации ЛПС определяются не флуктуациями в расположении уровней, а флуктуациями волновой функции.

Все эти результаты получены в двух следующих разделах и справедливы для бесконечного проводника или для конечного замкнутого проводника, если точка x расположена достаточно далеко от границы. Наличие открытой границы у образца существенно сказывается на флуктуациях ЛПС. В этом случае можно обсуждать статистику ЛПС без всякой дополнительной регуляризации, поскольку возможность покинуть образец приводит к эффективному уширению электронных состояний. ЛПС в проводнике с открытой границей подробно рассмотрена в разделе 2.

1. Флуктуации в закрытом образце

Моменты participation ratio (16) можно вычислить при помощи диаграммной техники Березинского [10]. Как было показано в [1],

$$b_n(\varepsilon, x) = (N(x))^n \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n-1)\Gamma(n)\Gamma(n+1)} \lim_{\eta \to 0} (2\pi\eta)^{n-1} I_n(\eta, x), \tag{19}$$

где η — мнимая часть обратной запаздывающей функции Грина свободного электрона, а $I_n(\eta, x)$ связано с введенными Березинским левой L_m и правой R_m частями соотношением

$$I_n(\eta, x) = \sum_{m=0}^{\infty} m^{n-2} L_m(\eta, x) R_m(\eta, x). \tag{20}$$

Внешнее электрическое поле приводит к тому, что время и длина свободного пробега электронов существенно зависят от координаты x (их надо вычислять при энергии электрона, равной $\varepsilon + eEx$, что приводит, например, к координатной зависимости скорости электрона $v(x)$). С учетом этого замечания уравнения для R_m и L_m сохраняют прежний вид [2, 10]

$$\left[8m\eta\tau(x) - 2l(x)\frac{d}{dx}\right] R_m = m^2 [R_{m+1} + R_{m-1} - 2R_m]. \tag{21}$$

Уравнение для L_m получается из (21) заменой знака перед d/dx. Разумно сделать замену переменных $x \to \xi$

$$dx/d\xi = 2l(x), \tag{22}$$

после которой уравнение (21) приобретает вид

$$\left[ms(\xi) - \frac{d}{d\xi}\right] R_m = m^2 [R_{m+1} + R_{m-1} - 2R_m]. \tag{23}$$

Длина свободного пробега l_ε пропорциональна квадрату скорости v_ε^2. Поэтому

$$v(x) = v_\varepsilon \left(1 + a\frac{x}{l_\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad l(x) = l_\varepsilon \left(1 + a\frac{x}{l_\varepsilon}\right), \quad \xi = \frac{1}{2a} \ln\left(1 + a\frac{x}{l_\varepsilon}\right). \tag{24}$$

Формулу (24) можно также переписать в виде

$$l(\xi) = l_\varepsilon \exp(2\alpha\xi), \quad \tau(\xi) = \tau_\varepsilon \exp(\alpha\xi), \tag{25}$$

из которого видно, что по параметру α имеется критическое поведение [2]. Величина $s(\xi)$, входящая в левую часть уравнения (23), оказывается равной

$$s(\xi) = 8\eta\tau(\xi) = s(0)\, e^{\alpha\xi}, \quad s(0) = 8\eta\tau_\varepsilon. \tag{26}$$

Рассмотрим теперь замкнутую систему с границами в точках x_1 и x_2, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. В терминах логарифмической переменной ξ электроны движутся в области $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$, где

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2\alpha} \ln\left(1 + \alpha \frac{x_{1,2}}{l_\varepsilon}\right) \tag{27}$$

(если $x_1 < -l_\varepsilon \alpha^{-1}$, то следует положить $\xi_1 = -\infty$). Граничные условия для уравнения (23), соответствующие полному отражению, имеют вид [1]

$$L_m(\xi_1) = 1, \quad R_m(\xi_2) = 1. \tag{28}$$

Решение (23) с условием (28) можно получить так же, как это было сделано в работе [1]. При $\eta \to 0$ ($s \to 0$) основной вклад в I_n (20) дают слагаемые с $m \gg 1$. Для таких m можно от разностного уравнения (23) перейти к дифференциальному

$$\left[p - \alpha p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right] R(p, \xi) = p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} R(p, \xi), \tag{29}$$

где $p = ms(\xi)$. После замены переменных

$$\Phi_\lambda(z) = z^{\alpha-1} \int\limits_{-\infty}^{\xi_2} d\xi e^{\lambda(\xi-\xi_2)} R(p, \xi), \quad z = \sqrt{4p} \tag{30}$$

(29) переходит в уравнение Бесселя

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} - 1 - \frac{(1-\alpha)^2 + 4\lambda}{z^2}\right] \Phi_\lambda(z) = -4z^{\alpha-3}. \tag{31}$$

Решение (31) получается при помощи преобразования Лебедева—Канторовича

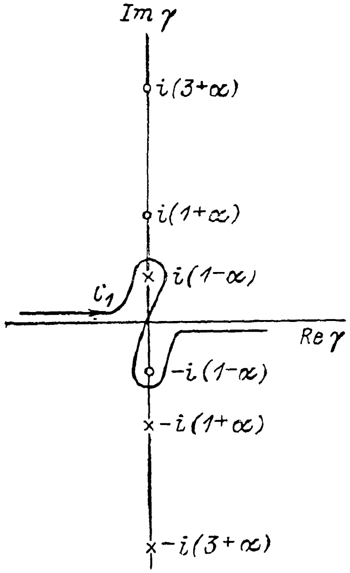

Рис. 1.

$$R_m(\xi) = \int\limits_{C_1} \frac{d\gamma}{4\pi} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{-1+\alpha+i\gamma}{2}\right)}{\Gamma(i\gamma)} \right|^2 \left(\frac{z}{2}\right)^{1-\alpha} K_{i\gamma}(z) \exp\left[-(\xi_2 - \xi)\frac{(1-\alpha)^2 + \gamma^2}{4}\right], \tag{32}$$

где $K_{i\gamma}(z)$ — функция Бесселя. Контур интегрирования C_1 в (32) показан на рис. 1. На этом же рисунке крестиками изображены полюса из серии $\gamma = i\,[(1-\alpha)-2n]$, а кружочками — полюса при $\gamma = -i\,[(1-\alpha)-2n]$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Если $\xi_2 - \xi \gg 1$, то контур интегрирования следует совместить с вещественной осью. При этом в случае $\alpha < 1$ основной вклад в R_m вносят полюса $\gamma = \pm i(1-\alpha)$

$$R_m(\xi) = 2^\alpha \Gamma^{-1}(1-\alpha) K_{1-\alpha}(z). \tag{33}$$

Это выражение для R_m не зависит от расстояния до границы и поэтому справедливо и при бесконечной системе.

Если же $\alpha > 1$, то полюса вклада в R_m не дают (рис. 1). В результате

$$R_m(\xi) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{1-\alpha} K_0(z) \frac{1}{(\xi_2-\xi)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\alpha-1)^2}{4}(\xi_2-\xi)\right]. \tag{34}$$

Таким образом, при $\alpha > 1$ влияние границы простирается на весь образец. Из (34) следует, что электрон оказывается сосредоточенным вблизи правой границы, что естественно, поскольку при $\alpha > 1$ он делокализован.

Формулы для L_m получаются из (32)—(34) при помощи замен $\alpha \to -\alpha$, $(\xi_2-\xi) \to (\xi-\xi_1)$. Подставляя (33) в (20), (19), получим

$$I_n(\eta, x) = [s(\xi)]^{1-n} \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n-1)}{\Gamma(2n)}, \tag{35}$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi v(x)} [4l(x)]^{1-n} \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n)}. \tag{36}$$

Из (36) видно, что $\alpha=1$ действительно соответствует делокализации. В этом случае все b_n с $n \geqslant 2$ экспоненциально малы (см. (34)) и отличны от нуля только благодаря конечности и замкнутости образца.

Формула (8) для кумулянтов ρ_3 получается из (36) при помощи (15). Точно так же легко получить кумулянты всех ρ_f. Из-за того что $b_{n\geqslant 2} \to 0$ при $\alpha \to 1$, производящая функция $\chi(q)$ (10) при любой весовой функции и $q \gg 1$ стремится к q. Отсюда и следует универсальность $W(\rho_f)$ при $\alpha \to 1$.

2. Флуктуации в открытой системе

Открытость границы означает, что электрон, достигнув ее, покидает образец. Условие на такой границе для уравнения (23) имеет вид [1, 12]

$$L_m(\xi_1) = \delta_{m0}, \qquad R_m(\xi_2) = \delta_{m0}. \tag{37}$$

В этом случае $b_n=0$ при $n \geqslant 2$, а $b_1=N_\varepsilon(x)=[\pi v(x)]^{-1}$. В то же время можно изучать распределение ЛПС, определяемой формулой (1).

Для определения функции распределения $W(\rho)$ заметим, что в переменной ξ уравнение (23) совпадает с тем, которое справедливо в отсутствие электрического поля. Поэтому $W(\rho)$ можно получить из формулы (11) работы [1] после замен

$$N_\varepsilon = \frac{1}{\pi v_\varepsilon} \to N(x) = \frac{1}{\pi v(x)} = N_\varepsilon e^{-\alpha\xi},$$

$$\frac{|x - x_{1,2}|}{l_\varepsilon} \to |\xi - \xi_{1,2}| = \frac{1}{2\alpha}\left|\ln \frac{\varepsilon + eEx_{1,2}}{\varepsilon + eEx}\right|. \tag{38}$$

В частности, для полубесконечного образца с открытой границей или для тех точек образца, которые значительно ближе к одной из границ, справедлив логарифмически нормальный закон распределения

$$W(\tilde\rho_1) = (4\pi\xi)^{-1/2} \frac{1}{\tilde\rho_1} \exp\left[-\frac{(\ln\tilde\rho_1 + \xi)^2}{4\xi}\right], \tag{39}$$

где $\tilde\rho$ — усредненная по атомным масштабам ЛПС (1) [1], измеренная в единицах $N(x)$, а ξ — расстояние до ближайшей границы.

Из (39) следует, что наиболее вероятное значение $\tilde\rho=\rho_m \simeq \exp(-\xi)$ уменьшается при удалении от границы. Вспомним, однако, что (39) описывает ЛПС, нормированную на среднюю плотность состояний $N(x)$, которая растет при удалении от правой границы (см. (38)). Поэтому абсолютное значение типичной ЛПС

$$N(x)\rho_m = N(x_2)e^{-(1-\alpha)|\xi-\xi_2|} = \frac{1}{\pi v(x_2)}\left|\frac{\varepsilon + eEx}{\varepsilon + eEx_2}\right|^{1-\alpha}$$

на пороге локализации не зависит от x, а при $\alpha > 1$ растет с ростом $|x-x_2|$.

Обсудим теперь влияние конечного η на распределение $W(\tilde\rho_1)$. Решение уравнения (25) с граничным условием (37) можно проанализировать аналогично тому, как это сделано в работе [1] (см. также [13]). Если $s(\xi_2) \ll 1$, то можно искать R_m при $ms(\xi) \ll 1$. При этом в левой части (23) можно опустить первый член. После этого уравнение легко решается. С другой стороны, (23) при $m \gg 1$ можно решить, сведя его к дифференциальному уравнению (29) (см. предыдущий раздел). Сшивая два эти решения в области $1 \ll m \ll s(\xi)^{-1}$, можно получить

$$R_m(\xi) = -\int\limits_{C_2} \frac{d\gamma}{i\pi}\,\varphi(\gamma,\ \alpha)\left(\frac{z}{2}\right)^{1-\alpha} K_{i\gamma}(z)\exp\left\{-\frac{\xi_2-\xi}{4}\left[(\gamma-i\varkappa)^2+(1-\alpha-\varkappa)^2\right]\right\}, \quad (40)$$

где

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2 = ms(\xi), \quad \varphi(\gamma,\ \alpha) = \frac{\Gamma^3((1+\alpha-i\gamma)/2)}{[\gamma-i(1-\alpha)]\,\Gamma(-i\gamma)\,\Gamma(-\alpha-i\gamma)}, \quad \varkappa = \frac{|\ln s(\xi_2)|}{\xi_2-\xi}, \quad (41)$$

контур интегрирования C_2 показан на рис. 2, где крестиками изображена серия полюсов $\gamma = -i(2n-1+\alpha)$ с $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Если $|\xi_2-\xi| \gg 1$, то интеграл (40) можно вычислить методом перевала. Результат существенно зависит от взаимного расположения точки пере-

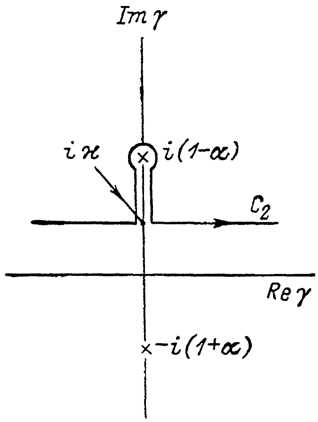

Рис. 2.

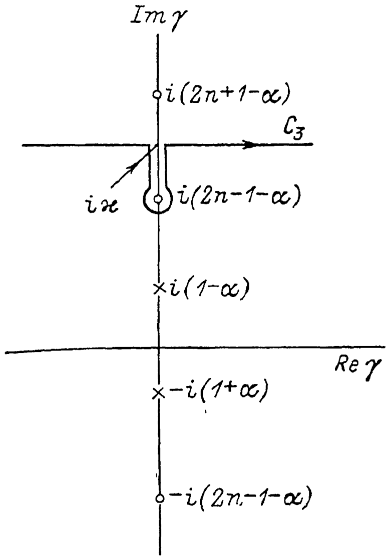

Рис. 3.

вала $\gamma = i\varkappa$ и самого верхнего из полюсов $\gamma = i(1-\alpha)$. Влияние границы чувствуется только при тех ξ, при которых перевальная точка выше

$$|\xi-\xi_2| < \frac{1}{1-\alpha}\,|\ln s(\xi_2)|, \quad \alpha < 1. \quad (42)$$

При бо́льших $|\xi-\xi_2|$, т. е. дальше от границы, R_m определяется полюсом и выходит на значение (33), соответствующее бесконечной системе. При $\alpha > 1$ влияние границы простирается на весь образец.

Что касается $L_m(\xi)$, то для этой величины эффект границы с ростом поля уменьшается ($\alpha \to -\alpha$), и при $|\xi-\xi_1| > \frac{1}{(1+\alpha)}\cdot|\ln s(\xi_1)|$ величина L_m такая же, как в бесконечной системе

$$L_m(\xi) = \frac{z^{1+\alpha}}{2^\alpha}\,\frac{K_{1+\alpha}(\xi)}{\Gamma(1+\alpha)}. \quad (43)$$

Подставляя (40) и (43) в (20), получим, что при $\xi_1 \to -\infty$

$$I_n(\eta,\ x) = -[s(\xi)]^{1-n}\,\Gamma^{-1}(1+\alpha)\,\Gamma^{-1}(2n)\int\limits_{C_3}\frac{d\gamma}{2\pi i}\,\varphi(\gamma,\ \alpha)\times$$

$$\times\left|\Gamma\left(n+\frac{1+\alpha+i\gamma}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1+\alpha+i\gamma}{2}\right)\right|^2\exp\left\{-\frac{\xi_2-\xi}{4}\left[(\gamma-i\varkappa)^2+(1-\alpha-\varkappa)^2\right]\right\}. \quad (44)$$

По сравнению с (40) в (44) добавилось еще серии полюсов $\gamma=-i\,[2\,(n+m)\pm(1+\alpha)]$ и $\gamma=i\,[2\,(n+m)\pm(1+\alpha)]$, где $m=0,\,1,\,2,\,\ldots$. Эти полюса вместе с контуром интегрирования C_3 показаны на рис. 3.

Рассмотрим сначала предельные случаи. Если $s\,(\xi)\to 0$, т. е. $\eta\to 0$, то $i\varkappa\to i\infty$ и основной вклад в (44) дает полюс $\gamma=i\,(2n-1-\alpha)$

$$I_n\,(\eta=0,\ x)=\frac{\Gamma^2\,(n)\,\Gamma\,(n-1)}{\Gamma\,(2n-1)}\exp\,[|\,\xi_2-\xi\,|\,n\,(n-1)], \tag{45}$$

этот результат соответствует логарифмически-нормальному распределению ЛПС (39).

С другой стороны, если η мало, но конечно, то начиная с некоторого $n=n_c\simeq(\varkappa+1-\alpha)/2$ величина I_n будет целиком определяться перевалом. При этом в пределе $n\gg 1$ для I_n получается выражение, аналогичное (35).

Обращаясь к общему случаю, из (44) можно заключить, что логарифмически-нормальный закон справедлив только при

$$|\ln\tilde{\rho}_1|<\ln\frac{1}{s\,(\xi)}=\alpha\,|\,\xi-\xi_2\,|+\ln\frac{1}{s\,(\xi_2)} \tag{46}$$

Если же $s\,(\xi)\geqslant e^{-(\xi_2-\xi)}$, то область применимости закона распределения (39) вообще отсутствует и $W\,(\tilde{\rho}_1)$ описывается формулами типа (11).

Заметим также, что достаточно далеко от границы при $\alpha>1$ неравенство (46) выполняется при любом $\tilde{\rho}_1$. Поэтому логарифмически-нормальное распределение $\tilde{\rho}_1$ обязательно имеет место при любом $\tilde{\rho}_1$, если состояния делокализованы.

Обсуждение результатов

Полученные выше результаты для распределения ЛПС в открытой системе в электрическом поле можно проинтегрировать совершенно аналогично тому, как это было сделано в работе [1] в отсутствие электрического поля. Уровень, локализованный в точке x, имеет конечную ширину, связанную с возможностью выхода электрона из образца, равную

$$\eta\,(x)=\frac{1}{\tau\,(x)}\exp\,[-2\beta\,|\,\xi-\xi_2\,|], \tag{47}$$

где β — обратный радиус локализации в переменной ξ. Напомним, что $\tau^{-1}\,(x)$ определяет среднее расстояние между уровнями, локализованными в точке x

$$\tau^{-1}\,(x)=\tau_\varepsilon^{-1}\left(1+\alpha\,\frac{x}{l_\varepsilon}\right)^{-1/2},$$

а $|\xi-\xi_2|$ — расстояние до правой границы, равное

$$|\,\xi-\xi_2\,|=\frac{1}{2\alpha}\left|\ln\frac{\varepsilon+eEx_2}{\varepsilon+eEx}\right|.$$

Величина β имеет смысл показателя степенного спадания волновой функции состояния с центром в точке x

$$l\,(x_2)\,|\,\psi_x\,(x_2)\,|^2=\beta\exp\{-2\beta\,|\,\xi-\xi_2\,|\}=\beta\left|\frac{\varepsilon+eEx}{\varepsilon+eEx_2}\right|^{\beta/\alpha}\sim x_2^{-\beta/\alpha}.$$

Показатель β является случайной величиной. Если предположить, что его флуктуации распределены нормально

$$P\,(\beta)=\left|\frac{\xi-\xi_2}{\pi}\right|^{1/2}\exp\left[-\,|\,\xi-\xi_2\,|\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2\right], \tag{48}$$

и учесть, что [1]

$$\rho\,(x)\approx 1/\eta\,(x)\,\tau\,(x), \tag{49}$$

то из (47) и (48) мы получим логарифмически-нормальное распределение для $\rho(x)$.

Нетрудно также понять эффект конечного η в (17). Граница чувствуется, только если выполнено условие $\eta(x) > \eta$, которое, согласно (49), можно переписать в виде, аналогичном (46)

$$\rho(x) < 1/\eta\tau(x).$$

Область существования логарифмически-нормального распределения ЛПС вообще исчезает, если $\eta\tau(x) > \exp[-|\xi-\xi_2|]$. Если $\alpha < 1$, то это происходит при

$$|\xi-\xi_2| < \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{1}{\eta\tau(x)}.$$

Видно, что с ростом электрического поля увеличивается размер пространственной области, в которой логарифм ЛПС распределен нормально. В то же время и интервал значений $\tilde{\rho}_1$, в котором справедлив логарифмически-нормальный закон, также растет. На пороге локализации, т. е. при $\alpha=1$, величина этого интервала не зависит от расстояния до границы, а при $\alpha > 1$ растет с увеличением этого расстояния.

Поясним, наконец, физический смысл порогового поля $\alpha=1$. Как известно, судить о том, локализованы или нет электронные состояния, можно по соотношению между степенью перекрытия этих состояний и энергетическим разбросом. Если два уровня локализованы в точках 0 и x, то перекрытие между ними убывает по закону

$$\delta E(x) \sim \tau_0^{-1} e^{-\xi}.$$

В то же время разброс ведет себя как

$$\Delta E(x) \sim \tau^{-1}(x) \sim \tau_0^{-1} e^{-\alpha\xi}.$$

Поэтому при $\alpha < 1$ $\delta E(x)/\Delta E(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и все состояния локализованы, а если $\alpha > 1$, то $\delta E(x) \gg \Delta E(x)$ и наблюдается делокализация.

Литература

[1] Альтшулер Б. Л., Пригодин В. Н. // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 45. № 11. С. 538—540; ЖЭТФ. 1988. В печати.
[2] Пригодин В. Н. // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. № 6 (11). С. 2338—2355.
[3] Soukoulis C. M., José J. V., Economou E. N., Sheng P. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 10. P. 764—767.
[4] Delyon F., Simon B., Soulliard B. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. N 24. P. 2187—2189.
[5] Kirkpatrick T. R. // Phys. Rev. 1986. V. 33B. N 2. P. 780—788.
[6] Vijayagovindan G. V., Jajannavar A. M., Kumar N. // Phys. Rev. 1987. V. 35B. N 4. P. 2029—2032.
[7] Вайнруб А. М., Хеймаа И. А., Алла М. А. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 41. № 11. С. 468—470.
[8] Янчев И. Я. // ФТП. 1974. Т. 8. № 7. С. 1494—1499.
[9] Авилов А. А., Булаевский Л. Н., Дорохов О. Н. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42. № 4. С. 156—159.
[10] Березинский В. Л. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 3 (9). С. 1251—1266.
[11] Wegner F. // Z. für Phys. 1980. V. 36. N 3. P. 207—210; Nucl. Phys. 1987. V. 280 (FS18). N 2. P. 193—224.
[12] Абрикосов А. А., Рыжкин И. А. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. № 3 (9). С. 1204—1224.
[13] Мельников В. И. // ФТТ. 1980. Т. 22. № 8. С. 2404—2413.

Ленинградский институт
ядерной физики им. Б. П. Константинова АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
27 июля 1988 г.