Аномальные процессы переориентации в гибридно-ориентированных жидкокристаллических ячейках под действием градиента температуры

© А.В. Захаров, А.А. Вакуленко

Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
199178 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: avak2vale@mail.ru

(Поступила в Редакцию 25 декабря 2007 г.)

Исследована ориентационная релаксация не только поля директора и поля скорости, но и поля температуры и компонент тензора напряжений в гибридно-ориентированной жидкокристаллической ячейке под действием градиента температуры. Проведено численное исследование аномалий процесса ориентационной релаксации указанных полей в случае, когда температура одной из ограничивающих поверхностей близка к температуре фазового перехода нематик–смектик A.

PACS: 61.30.Cz, 64.70.Md

1. Введение

В последнее время вопросу о влиянии градиентов температуры на релаксационные, гидродинамические и структурные свойства жидкокристаллических (ЖК) ячеек уделяют все больше внимания [1–5]. Это обусловлено прежде всего тем, что ЖК-ячейки, являющиеся основными элементами таких электронных приборов, как дисплеи или ультрабыстрые оптические переключатели, в процессе эксплуатации подвержены воздействию градиентов температуры, возникающих, например, в результате неравномерного нагревания их ограничивающих поверхностей. Наличие градиента температуры ∇T в ЖК-фазе в свою очередь приводит к тому, что необходимо учитывать взаимодействие ∇T как с полем директора $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$, так и с полем скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, инициируемым градиентом температуры. Учет этого взаимодействия отражается на балансе как угловых, так и линейных моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы. Поэтому правильный учет всех сил, действующих на единицу объема ЖК-фазы, не только позволит воссоздать реальную картину релаксации динамических характеристик этих электронных приборов, но и точнее оценить срок их активной эксплуатации. Следует отметить, что первое описание влияния градиента температуры на структурные свойства холестерика, помещенного между двумя стеклянными поверхностями, было опубликовано в начале XX столетия [6], но лишь спустя 68 лет было дано теоретическое обоснование этого эффекта, заключающееся в том, что в баланс моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, к уже известным гидродинамическому $\mathbf{T}_{\mathrm{vis}}$ и упругому $\mathbf{T}_{\mathrm{elast}}$ вкладам [7] был добавлен термомеханический $\mathbf{T}_{\mathrm{tm}} \sim (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla T) \times \hat{\mathbf{n}}$ вклад [8]. Это позволило рассчитать угловую скорость вращения поля директора вокруг оси, параллельной градиенту температуры. В случае гибридной ЖК- (ГЖК) ячейки, предполагающей гомеотропную ориентацию поля директора, например на нижней ограничивающей, и планарную на верхней ограничивающей поверхности, наличие вертикального градиента температуры ведет к формированию устойчивого потока $\mathbf{v}$ ЖК-фазы в горизонтальном направлении [2,5,9,10]. При этом величина потока $v \sim \frac{d}{\eta}\sigma_{zx}^{tm}$, где $\sigma_{zx}^{tm} \sim \xi\frac{\Delta T}{d^2}$ — сдвиговая составляющая компонента термомеханического вклада в тензор напряжения, η — вязкость ЖК-фазы, $\Delta T = T_2 - T_1 > 0$, область температур $[T_1, T_2]$ находится в пределах стабильности нематической фазы толщиной d, ξ — термомеханическая постоянная [10]. На направление и величину гидродинамического потока влияют также направление теплового потока и характер сцепления молекул ЖК-фазы с ограничевающими поверхностями [2,5]. В наших работах [2,5] были проведены исследования релаксационных режимов, возникающих в ГЖК-ячейках, образованных молекулами 4-n'-пентил-4$'$-цианобифенил (5ЦБ), для случая вертикально направленного градиента температуры. В случае ЖК-фазы, допускающей существование фазового перехода нематик–смектик $A\,(NA)$, такой как 4-циано-4$'$-октилбифенил (8ЦБ), по мере охлаждения одной из ограничивающей поверхностей, например нижней, T приближается к T_{NA}, где T_{NA} — температура фазового перехода. При этом в нематической фазе в результате флуктуации зарождающегося локального смектического параметра порядка ряд материальных параметров обнаруживает сингулярное поведение с изменением температуры $T \to T_{NA}$. Среди этих параметров — коэффициенты Лесли $\lim_{T\to T_{NA}} \alpha_3 \sim \zeta^{-\nu/2}$ и изгибной упругости $\lim_{T\to T_{NA}} K_3 \sim \zeta^{-\nu}$, где $\zeta = T/T_{NA} - 1$ — безразмерная температура, а ν — критический индекс [11]. Предпереходные смектические флуктуации генерируют новый момент силы $\mathbf{T}_{\mathrm{fl}}$ [12,13], действующей на единицу объема ЖК-фазы. По мере охлаждения нижней ограничивающей поверхности ГЖК-ячейки $T \to T_{NA}$; в пристенной области $[0, \xi_{\parallel}]$ зарождается новая смектическая фаза, размер которой растет как $\xi_{\parallel} = \xi_0\zeta^{-\nu}$ параллельно $\hat{\mathbf{n}}$. Все это ведет к тому, что переориентация поля директора и поля скорости, а также релаксация поля температуры к их равновесным распределениям по сечению

ГЖК-ячейки $[d, 0]$ должны плавно переходить из одной области ячейки $[d, \xi_{\|}]$ в другую $[\xi_{\|}, 0]$. Таким образом, релаксационные процессы, возникающие в ГЖК-ячейках в случае, когда температура одной из ограничивающих поверхностей $T \to T_{NA}$, значительно усложняются по сравнению с релаксационными процессами, характерными для ГЖК-ячеек при температурах, отличных от T_{NA}. В настоящей работе в рамках классической гидродинамики ЖК Эриксена–Лесли [14,15] с учетом влияния флуктуаций локального смектического порядка, образующегося в нематической фазе [12,13], исследованы: 1) релаксация поля директора; 2) эволюция поля скорости; 3) изменение поля температуры; 4) изменение компонент тензора напряжений — к их равновесным распределениям по сечению ГЖК-ячейки в зависимости от величины вертикального градиента температуры и характера сцепления ЖК-молекул со стенками ячейки.

2. Основные гидродинамические уравнения, описывающие состояние нематического жидкого кристалла в ограниченном объеме

Состояние ГЖК-ячейки, находящейся под действием градиента температуры $\nabla T(t, \mathbf{r})$, определяется полями директора $\mathbf{n}(t, \mathbf{r})$, вектора скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, температуры $T(t, \mathbf{r})$, а также полем плотности нематика. Система уравнений для этих полей состоит из уравнения, описывающего баланс упругого $\mathbf{T}_{\rm elast}(t, \mathbf{r})$, вязкого $\mathbf{T}_{\rm vis}(t, \mathbf{r})$ и термомеханического $\mathbf{T}_{\rm tm}(t, \mathbf{r})$ моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, уравнения, аналогичного уравнению Навье–Стокса, и уравнения теплопроводности для такой анизотропной системы, как нематический ЖК (НЖК). Гибридная ориентация ЖК-ячейки предполагает, что на одной из ограничивающих поверхностей ячейки достигается гомеотропная ориентация директора, например $\hat{\mathbf{n}} \parallel \hat{\mathbf{k}}$ $(z = 0)$, в то время как на другой — планарная ориентация директора, $\hat{\mathbf{n}} \perp \hat{\mathbf{k}}$ $(z = d)$. Здесь вектор $\hat{\mathbf{k}}$ совпадает с направлением оси z, в то время как вектор $\hat{\mathbf{i}} \perp \hat{\mathbf{k}}$ совпадает с направлением оси x, а вектор $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}$ совпадет с направлением оси y. В дальнейшем предполагается, что $\hat{\mathbf{n}}$ в процессе переориентации под действием градиента температуры остается в плоскости, образованной направлением директора на верхней ограничивающей поверхности, совпадающей с направлением оси x, и направлением градиента температуры, совпадающим с направлением оси z. Это позволяет нам считать все физические величины зависящими только от координаты z. С учетом всего изложенного выше выражение для директора принимает вид $\hat{\mathbf{n}} = \sin\theta(t, z)\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta(t, z)\hat{\mathbf{k}}$, где θ — полярный угол между направлением директора $\hat{\mathbf{n}}$ и нормалью $\hat{\mathbf{k}}$ к обеим границам. Следует отметить, что формирующийся за счет перепада температуры ΔT градиент температуры $\nabla T \sim \Delta T/d$ позволяет изначально покоящийся между двумя ограничивающими параллельными поверхностями ЖК-слой обратить в движение в горизонтальном направлении со скоростью [2,5] $v \sim \xi\Delta T/\eta d$. Следует также отметить, что пространственная зависимость скорости $\mathbf{v}$ только от координаты z, совместно с условиями несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ и отсутствия скольжения хотя бы на одной границе ГЖК-ячейки, например $\mathbf{v}_{z=d} = 0$, приводит к тому, что в нашей плоской задаче присутствует только одна компонента вектора скорости $\mathbf{v} = v_x(t, z)\hat{\mathbf{i}}$, направленная параллельно ограничивающим поверхностям. Таким обарзом, безразмерное уравнение баланса моментов, действующих на единичный объем ЖК-фазы, принимает вид [2,5]

$$\bar{\gamma}_1(\chi)\theta_\tau = \mathscr{A}(\theta)u_z + \big(\mathscr{G}(\theta)\theta_z\big)_z - \frac{1}{2}\mathscr{G}_\theta(\theta)\theta_z^2 - \delta_1\chi_z\theta_z\left(\frac{1}{2} + \sin^2\theta\right), \quad (1)$$

где $\tau = (K_{10}/\gamma_{10}d^2)t$ — безразмерное время, $\bar{z} = z/d$ — безразмерная координата, $u(\tau, z) = (\gamma_{10}d^2/K_{10})v_x(\tau, z)$ — безразмерная скорость, d — ширина ЖК-слоя, $\chi(\tau, z) = T(\tau, z)/T_{\rm NI}$ — безразмерная температура, $\bar{\gamma}_1(\chi) = \gamma_1(\chi)/\gamma_{10}$, $\mathscr{A}(\theta) = \frac{1}{2}\big(\gamma_1(\chi) - \gamma_2(\chi)\cos 2\theta\big)/\gamma_{10}$, $u_z = \partial u(\tau, z)/\partial z$, $\gamma_1(\chi)$ и $\gamma_2(\chi)$ — коэффициенты вращательной вязкости НЖК, $\mathscr{G}(\theta) = \big(K_1(\chi)\sin^2\theta + K_3(\chi)\cos^2\theta\big)/K_{10}$, $\theta_\tau = \partial\theta(\tau, z)/\partial\tau$, $\theta_z = \partial\theta(\tau, z)/\partial z$, $K_1(\chi)$ и $K_3(\chi)$ — упругие постоянные Франка, соответствующие поперечному и продольному изгибам, γ_{10} и K_{10} — значения вращательной вязкости п поперечного изгиба, соответствующие наибольшим значениям внутри интервала температур $[\chi_2, \chi_1] = [T_2/T_{NI}, T_1/T_{NI}]$, $\delta_1 = \xi T_{NI}/K_{10}$ — безразмерный параметр системы, а $\xi = 10^{-12}\,\mathrm{J/m\cdot K}$ — термомеханическая постоянная, экспериментально полученная в работе [10]. Следует отметить, что здесь и далее под переменной z будем понимать $\bar{z}$. В случае несжимаемого НЖК безразмерное уравнение Навье–Стокса сводится к двум уравнениям [2,5]:

$$\delta_2\partial_\tau u(\tau, z) = \partial_z\sigma_{zx}, \quad (2)$$

$$P_z(\tau, z) + \frac{\partial\mathscr{R}(\tau, z)}{\partial\theta_\tau}\theta_z = 0, \quad (3)$$

где $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$, $P(\tau, z)$ — безразмерное сжимающее гидростатическое давление в ГЖК-ячейке, которое состоит из двух вкладов: вязкого вклада, определяемого величиной $\int\limits_0^z \frac{\partial\mathscr{R}(\tau,z)}{\partial\theta_\tau}\theta_z dz$, и упругого вклада, определяемого потенциалом Франка $\frac{1}{2}\mathscr{G}(\theta)\theta_z^2$; $\sigma_{zx} = (d^2/K_{10})\bar{\sigma}_{zx}$ — безразмерное сдвиговое напряжение, а $\delta_2 = \rho_m K_{10}/\gamma_{10}^2$ — второй параметр системы, где ρ_m — плотность ЖК-фазы. Следует отметить, что правая часть уравнения (2) представляет собой результат варьирования диссипационной функции Рэлея $\mathscr{R}(\tau, z)$ по градиенту скорости u_z. В предлагаемой нами модели безразмерная диссипационная функция Рэлея $\mathscr{R}(\tau, z) = (\gamma_{10}d^4/K_{10}^2)\mathscr{R}(t, z)$ состоит из трех вкладов: вязкого $\mathscr{R}_{\rm vis}(\tau, z)$, термомеханического $\mathscr{R}_{\rm tm}(\tau, z)$ и теплового $\mathscr{R}_{\rm th}(\tau, z)$. Таким образом, полное выражение для безразмерной диссипационной функции принимает вид $\mathcal{R}(\tau, z) = \mathcal{R}_{\text{vis}}(\tau, z) + \delta_1 \mathcal{R}_{\text{tm}}(\tau, z) + \delta_3 \mathcal{R}_{\text{th}}(\tau, z)$, где $\mathcal{R}_{\text{vis}}(\tau, z) = \frac{1}{2} h(\theta) u_z^2 - \mathcal{A}(\theta)\theta_\tau u_z + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_1(\chi)\theta_\tau^2$, $\mathcal{R}_{\text{tm}} = \theta_\tau \theta_z \chi_z (1/2 + \sin^2\theta) - \theta_z u_z \chi_z \sin^2\theta(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta)$ и $\mathcal{R}_{\text{th}}(\tau, z) = \frac{\chi_z^2}{\chi}(\Lambda\cos^2\theta + \sin^2\theta)$. Здесь $h(\theta) = \big(\alpha_1(\chi) \times \sin^2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}\mathcal{A}(\theta) + \frac{1}{2}\alpha_4(\chi) + g(\theta)\big)/\gamma_{10}$ и $g(\theta) = \frac{1}{2}\big(\alpha_2(\chi)\cos^2\theta - \alpha_3(\chi)\sin^2\theta\big)/\gamma_{10}$ — безразмерные гидродинамические функции, $\alpha_i(\chi)(i = 1, \ldots, 6)$ — зависящие от температуры коэффициенты Лесли, $\Lambda = \Lambda_\parallel/\Lambda_\perp$, $\Lambda_\parallel$ и $\Lambda_\perp$ — коэффициенты теплопроводности вдоль и поперек направления директора, $\delta_3 = T_{NI}\lambda_\perp\gamma_{10}d^2/K_{10}^2$ — безразмерный параметр системы. В предполагаемой геометрии ячейки полная безразмерная сдвиговая компонента напряжений включает только вязкую часть и имеет вид [2,5]

$$\sigma_{zx}(\tau, z) = \frac{\partial\mathcal{R}(\tau, z)}{\partial u_z} = h(\theta)u_z - \mathcal{A}(\theta)\theta_\tau - \delta_1\chi_z\theta_z\sin^2\theta\Big(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big). \tag{4}$$

Поскольку в нашем случае мы имеем дело с малыми градиентами температуры $|\nabla T|(\sim 0.1\,\text{K}/\mu\text{m})$, можно ожидать, что температурное поле $\chi(\tau, z)$ удовлетворяет безразмерному уравнению теплопроводности [16]

$$\delta_4\partial_\tau\chi(\tau, z) = -q_z, \tag{5}$$

где $q = -\chi\frac{\partial\mathcal{R}(\tau,z)}{\partial\chi_z}$ — проекция потока тепла поперек слоя, а $\delta_4 = \rho_m C_p K_{10}/(\gamma_{10}\lambda_\perp)$ — еще один параметр системы. С учетом выражения для полной безразмерной диссипационной функции Рэлея $\mathcal{R}(\tau, z)$ последнее уравнение может быть переписано в виде

$$\delta_4\partial_\tau\chi(\tau, z) = \Big[\chi_z(\Lambda\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \delta_5\chi\theta_z \times \Big(\theta_\tau(1/2 + \sin^2\theta) - u_z\sin^2\theta\Big(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big)\Big)\Big]_z, \tag{6}$$

где $\delta_5 = \delta_1/\delta_3$.

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1)–(3), (5) нам необходимы начальные и граничные условия как для полярного угла θ, так и для скорости u. Для этого рассмотрим вначале случай жесткого сцепления ЖК-молекул с обеими ограничивающими поверхностями. Предположим, что на верхней ограничивающей поверхности реализуется планарная, а на нижней — гомеотропная ориентации директора. Это позволяет записать граничные условия для полярного угла θ в виде

$$\theta(z)_{z=0} = 0, \quad \theta(z)_{z=1} = \frac{\pi}{2}; \tag{7}$$

начальное условие выберем в виде $\theta(0, z) = \frac{\pi}{2}$ $(0 < z < 1)$ и позволим системе релаксировать к равновесному распределению $\theta_{\text{eq}}(z)$ по всему сечению ГЖК-ячейки. Граничные условия для скорости в случае отсутствия скольжения на ограничивающих поверхностях принимают вид

$$u(z)_{z=0} = u(z)_{z=1} = 0. \tag{8}$$

С другой стороны, когда на верхней ограничивающей поверхности реализуется случай мягкого сцепления ЖК-молекул с твердой стенкой, энергия сцепления ЖК-молекул может быть записана в форме Рапини [7] $W = \frac{1}{2}A\sin^2\Delta\theta$, где $\Delta\theta = \theta_s - \theta_0$, а θ_s и θ_0 — полярные углы ориентации директора на верхней ограничивающей поверхности при наличии и отсутствии внешних полей, A — плотность энергии сцепления. Баланс моментов, перенесенный на верхнюю поверхность, дает нам новое граничное условие, которому должна удовлетворять ориентация директора на этой поверхности:

$$\Big(\mathcal{G}(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big)_{z=1} = \frac{Ad}{2K_{30}}\sin 2\Delta\theta. \tag{9}$$

Теперь мы располагаем всем необходимым для того, чтобы исследовать релаксационные процессы, протекающие в ГЖК-ячейках под действием градиента температуры, направленного перпендикулярно ограничивающим поверхностям. Вначале проведем качественный анализ уравнений (1)–(3), (5), для этого рассчитаем значения всех параметров δ_i $(i = 1, \ldots, 5)$. Для нематика 8ЦБ в области температур существования нематической фазы $0.98 < \chi < 1.0$ $(306.5 < T < 313\,\text{K})$ плотность ЖК ρ_m равна $10^3\,\text{kg/m}^3$, а значения экспериментальных данных для упругой постоянной K_{10} и вязкости γ_{10} составляют $K_{10} \sim 13\,\text{pN}$ [17] и $\gamma_{10} = 0.086\,\text{Pa}\cdot\text{s}$ [18] соответственно, в то время как значения A, полученные различными экспериментальными методами [19], имеют порядок $\sim 10^{-7}\,\text{J/m}^2$. В дальнейшем используются зависимости шести коэффициентов Лесли в $(\text{Pa}\cdot\text{s})$ и двух упругих коэффициентов Франка $K_1(T)$ и $K_3(T)$ от температуры, приведенные в работах [18] и [17] соответственно. Значения теплоемкости [20] $C_p = 10^3\,\text{J/kg}\cdot\text{K}$ и коэффициентов теплопроводности [21] $\lambda_\parallel = 0.24\,\text{W/m}\cdot\text{K}$ и $\lambda_\perp = 0.13\,\text{W/m}\cdot\text{K}$ были получены калориметрическими методами, а значение термомеханического коэффициента [10] $\xi = 10^{-12}\,\text{J/m}\cdot\text{K}$ найдено экспериментально с помощью измерения максимальной скорости течения в ГЖК-ячейке. Размер ГЖК-ячейки $d = 100\,\mu\text{m}$. В случае планарной ориентации директора на верхней ограничивающей поверхности, когда оба полярных угла θ_s и θ_0 близки к $\pi/2$, значение $\Delta\theta$ мало $(\Delta\theta \sim 1-3^\circ)$ и $\sin 2\Delta\theta \sim 2\Delta\theta$, так что комбинация $\frac{Ad}{2K_{30}}\sin 2\Delta\theta \sim 0.1$. Это позволяет нам оценить все параметры δ_i $(i = 1, \ldots, 5)$: $\delta_1 \sim 24$, $\delta_2 \sim 2\cdot 10^{-6}$, $\delta_3 \sim 24\cdot 10^{10}$, $\delta_4 \sim 6\cdot 10^{-4}$ и $\delta_5 \sim 10^{-10}$ соответственно. С учетом малости параметра $\delta_2 \ll 1$ уравнение (2) принимает вид

$$\sigma_{zx} = h(\theta)u_z - \mathcal{A}(\theta)\theta_\tau - \delta_1\chi_z\theta_z\sin^2\theta\Big(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta\Big) = \mathcal{C}(\tau), \tag{10}$$

где значение $\mathcal{C}(\tau)$ не зависит от пространственной переменной z и будет определено исходя из граничных условий (8). Уравнение (5) с учетом того, что $\delta_4, \delta_5 \ll 1$, сводится к квазистационарному уравнению

$$\left[\chi_z(\Lambda\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right]_z = 0. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) относительно безразмерной температуры $\chi(\tau, z)$ для случая, когда $\chi_1 \to \chi_{NA}$ ($\chi_{NA} = T_{NA}/T_{NI}$), может быть записано в виде

$$\chi(\tau, z) = \frac{\Delta\chi}{I}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\Lambda\cos^2\theta + \sin^2\theta} + \chi_1, \tag{12}$$

где $I = \int_{z_0}^{1}\frac{dz}{\Lambda\cos^2\theta + \sin^2\theta}$, $z_0 = \xi_{\|}/d$ — граница раздела между нематической фазой размера $[1, z_0]$ и зарождающейся смектической фазой размера $[z_0, 0]$, $\Delta\chi = \chi_2 - \chi_1$, а χ_2 и χ_1 — безразмерные значения температуры на ограничивающих поверхностях ячейки. Перейдем теперь к описанию зарождающейся смектической фазы в том случае, когда температура нижней ограничивающей поверхности $T_1 \to T_{NA}$ ($\chi_1 \to \chi_{NA}$).

3. Уравнения баланса угловых и линейных моментов вблизи нижней ограничивающей поверхности при $T_1 \to T_{NA}$

По мере того как температура нижней ограничивающей поверхности приближается к температуре перехода T_{NA}, в результате флуктуаций зарождающегося смектического порядка возникает новый момент силы, действующий на единицу объема ЖК-фазы [12,13],

$$\mathbf{T}_{\rm fl} = \left[\frac{\pi}{2}\frac{k_BT}{l^2\xi_{\|}}(u_z\tau_m)(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{v}})z - \mathcal{O}\big((u_z\tau_m)^2\big)\right]\cos\theta\hat{\mathbf{k}}, \tag{13}$$

где $\tau_m \sim \xi_{\|}^{3/2}$ — время релаксации смектического параметра порядка, $\xi_{\|} = \xi_0\xi^{-\nu}$ — корреляционная длина параллельно направлению директора $\hat{\mathbf{n}}$, $\xi = T/T_{NA} - 1$ — безразмерная температура, $T = T(t, z)$ — температура зарождающихся SmA-слоев в нематической фазе, ξ_0 — базовая корреляционная длина, ν — критический индекс, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ — единичный вектор скорости, l — расстояние между смектическими слоями, k_B — постоянная Больцмана. Физический смысл $\mathbf{T}_{\rm fl}$ заключается в том, что сдвиговый поток $u(\tau, z)$ деформирует флуктуации смектического порядка. Так, если $\hat{\mathbf{n}} \parallel \hat{\mathbf{v}}$, то сдвиговый поток стремится наклонить SmA-слои таким образом, чтобы уменьшить расстояние между слоями. В результате ответной реакции материала на эту деформацию возникает возвратный момент $\mathbf{T}_{\rm fl}$ [12,13]. В тех случаях, когда $\hat{\mathbf{n}} \perp \hat{\mathbf{v}}$, сдвиговый поток не деформирует внутреннюю структуру зарождающейся смектической фазы и возвратный момент $\mathbf{T}_{\rm fl}$ отсутствует. Было показано [12,13], что учет возвратного момента ведет к перенормировке некоторых материальных коэффициентов, таких как коэффициент Лесли

$$\alpha_3 = \bar{\alpha}_3 + \frac{\pi}{2}\frac{k_BT}{l^2}\frac{\tau_m}{\xi_{\|}} \tag{14}$$

и коэффициент изгибной деформации Франка

$$K_3 = \bar{K}_3 + \frac{\pi\xi_0}{l^2}\frac{k_BT}{6}\xi^{-\nu}, \tag{15}$$

где $\bar{\alpha}_3$ и $\bar{K}_3$ — значения этих коэффициентов при температурах, далеких от T_{NA}. Из выражения (14) следует, что коэффициент Лесли имеет асимптотику $\alpha_3 \sim \xi^{-\nu/2}$, в то время как коэффициент Франка $K_3 \sim \xi^{-\nu}$. Как показали результаты рентгеноструктурного анализа, предсмектические аномалии поведения вязкоупругих коэффициентов для 8ЦБ наблюдаются при значениях температур $0 < \xi \le 10^{-3}$ или $306.5 < T < 306.7\,\mathrm{K}$ [11]. Так, в интервале температур $-5 < \lg\xi < -2$ базовая корреляционная длина 8ЦБ может быть оценена как [11] $\xi_0 = 0.45\,\mathrm{nm}$, а критический индекс как $\nu = 0.67 \pm 0.03$. Принимая во внимание, что $\lim_{\xi\to 0}\frac{K_3}{\gamma_1} \sim \mathcal{O}(\xi^{-\nu/2})$, уравнение баланса моментов (1) в области $[0, \xi_{\|}]$, прилегающей к нижней ограничивающей поверхности, можно записать в виде [22]

$$\cos\theta(\bar{z})\left[\cos(\theta)(\bar{z})\theta_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) - \sin\theta(\bar{z})\theta_{\bar{z}}^2(\bar{z})\right] = 0, \tag{16}$$

где $\bar{z} = z/\xi_{\|}$ — безразмерное расстояние от нижней ограничивающей поверхности в SmA-фазу. Это уравнение в случае ГЖК-ячейки имеет два решения: $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta_{\rm eq}(\bar{z}) = \arcsin(C_1\bar{z} + C_2)$, где C_1 и C_2 — константы. Таким образом, асимптотическое выражение для полярного угла $\theta_{\rm eq}(\bar{z})$ в зарождающейся SmA-фазе размером $[0, \xi_{\|}]$ вблизи нижней ограничивающей поверхности может быть записано в виде

$$\theta_{\rm eq}(z) = \arcsin(z/z_0), \tag{17}$$

где $z \in [0, z_0]$, $z_0 = \xi_{\|}/d$ — граница раздела между нематической фазой размером $[1, z_0]$ и зарождающейся смектической фазой размером $[z_0, 0]$, а безразмерное расстояние от нижней ограничивающей поверхности в смектическую фазу дано в единицах $z = z/d$. Здесь для простоты выбраны значения констант $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$. Для этих же значений $z \in [0, z_0]$ уравнение Навье–Стокса (2) принимает вид

$$\frac{1}{2}\sin^2\theta_{\rm eq}(z)u_z = \mathcal{C}(\tau). \tag{18}$$

Последнее уравнение с учетом (17) имеет решение в виде

$$u(z) = -2z_0^2\frac{\mathcal{C}(\tau)}{z}. \tag{19}$$

Предельное значение полярного угла $\lim_{z\to z_0}\theta_{\rm eq}(z)$, согласно условию (17), равно $\frac{\pi}{2}$, в то время как предельное значение скорости, согласно условию (18), $\lim_{z\to z_0} u(z) = -2z_0C(\tau)$. Таким образом, граничные условия для описания процесса релаксации поля директора в случае $T_1 \to T_{NA}$ принимают вид

$$\theta(z)_{z=1,z_0} = \frac{\pi}{2}, \qquad (20)$$

$$u(z)_{z=1} = 0, \quad u(z)_{z=z_0} = -2z_0C(\tau). \qquad (21)$$

Последнее условие для скорости означает, что на нижней границе ($z = z_0$) должно выполняться условие проскальзывания. Следует отметить, что функция $C(\tau)$ может быть определена из уравнения (10) и условий (21).

4. Исследование ориентационной релаксации в ГЖК-ячейке при $T_1 \to T_{NA}$

В случае, когда температура нижней ограничивающей поверхности $T_1 \to T_{NA}$, релаксация поля директора $\hat{\mathbf{n}}(\tau, z)$, а также поля скорости $u(\tau, z)$ и температуры $\chi(\tau, z)$ к их равновесным распределениям по сечению ГЖК-ячейки может быть описана посредством решения системы безразмерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1), (10) и (12) совместно с граничными условиями (20), (21) с помощью метода релаксации [23]. Для случая нематика 8ЦБ максимальный интервал существования нематической фазы равен [0.98, 1.0] или [306.5, 313 K]. Рассмотрим случай, когда температура нижней ограничивающей поверхности $T_1 = 306.7$ K или $\chi_1 \sim 0.981$. Размер зарождающейся SmA-фазы, соответствующий этой температуре, равен $z_0 = \xi_\parallel/d \sim 4 \cdot 10^{-4}$. На рис. 1, a–c представлены результаты расчета эволюции угла $\theta(\tau, z)$ к его равновесному распределению $\theta_{\mathrm{eq}}(z)$ по сечению ГЖК-ячейки с шагом по времени $\tau_k = \frac{k}{6}\tau_R(\Delta\chi)$ $(k = 1, \dots, 6)$ для трех значений $\Delta\chi$: 0.01 ($\Delta T \sim 4$ K) ($\tau_R = 0.3$); 0.005 ($\Delta T \sim 1.9$ K) ($\tau_R = 0.6$) и 0.015 ($\Delta T \sim 6$ K) ($\tau_R = 0.12$) соответственно. Здесь τ_R означает время релаксации системы, при этом каждому перепаду температуры $\Delta\chi$ соответствует свое время релаксации $\tau_R(\Delta\chi)$. В рассматриваемом случае образец нематика 8ЦБ прогревался сверху ($\chi_2 > \chi_1$), а критерием сходимости итерационной процедуры была выбрана величина $\varepsilon = \left|\left(\theta_{(m+1)}(\tau, z) - \theta_{(m)}(\tau, z)\right)/\theta_{(m)}(\tau, z)\right| \sim 10^{-4}$. Здесь m — номер итерации. Результаты расчета эволюции поля скорости $u(\tau, z)$ к его равновесному распределению $u_{\mathrm{eq}}(z)$ по сечению ГЖК-ячейки представлены на рис. 2. Обозначения на рис. 2 те же, что на рис. 1. Процесс релаксации поля скорости к его равновесному распределению по сечению ГЖК-ячейки характеризуется монотонным убыванием $|u(\tau, z)|$ с ростом безразмерного времени τ для трех температурных режимов $\Delta\chi = 0.01$, 0.005 и 0.015. При этом значения времени релаксации поля скорости $\tau_R(\Delta\chi)$ те же, что и для поля директора. Максимальное значение безразмерной

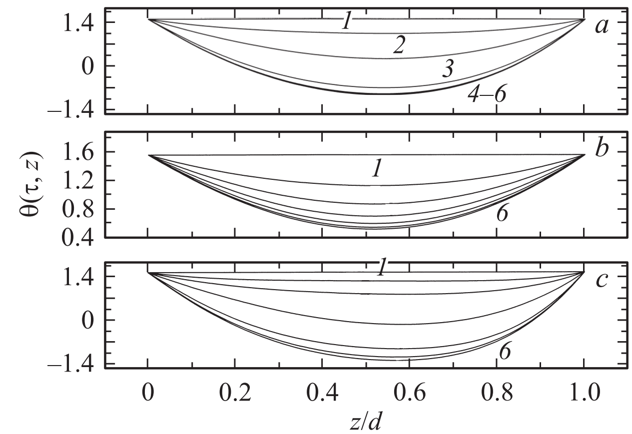

Рис. 1. Релаксация полярного угла $\theta(\tau, z)$ в (rad) к его равновесному распределению $\theta_{\mathrm{eq}}(z)$ по сечению ГЖК-ячейки. Кривые *1–6* — решения уравнений (1), (10) и (12) с граничными условиями (20) и (21) для значений $\Delta\chi = 0.01$ (a), 0.005 (b) и 0.015 (c), отвечающие моментам времени $\tau(k) = \frac{k}{6}\tau_R(\Delta\chi)$, где $k = 1, \dots, 6$; $\tau_R(0.01) = 0.3$, $\tau_R(0.005) = 0.6$ и $\tau_R(0.015) = 0.12$ — соответствующие времена релаксации.

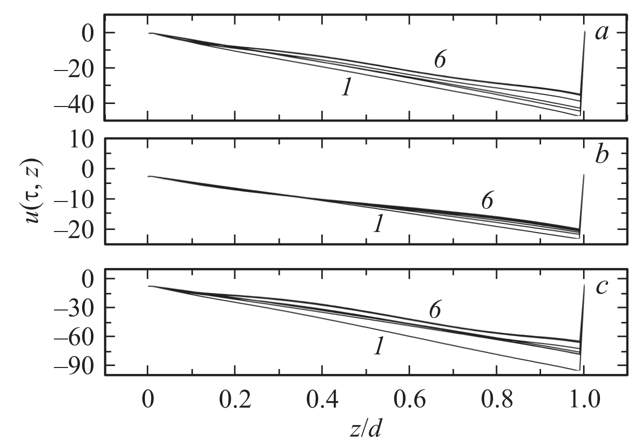

Рис. 2. Эволюция поля скорости $u(\tau, z)$ к его равновесному распределению $u_{\mathrm{eq}}(z)$ по сечению ГЖК-ячейки. Обозначения те же, что на рис. 1.

скорости $u_{\mathrm{eq}}(z) = \frac{\gamma_{10} d}{K_{10}} v_x^{\mathrm{eq}}(z)$ в ГЖК-ячейке с $T_1 \sim 0.981$ (~ 306.7 K) равно ~ 35 ($\sim 53\,\mu$m/s) при $\Delta\chi = 0.01$ (a), ~ 17 ($\sim 26\,\mu$m/s) при $\Delta\chi = 0.005$ (b) и ~ 60 ($\sim 91\,\mu$m/s) при $\Delta\chi = 0.015$ (c). Эволюция поля температуры $\chi(\tau, z)$ к его равновесному распределению по сечению ГЖК-ячейки для трех температурных режимов $\Delta\chi = 0.01$ (a), 0.005 (b) и 0.015 (c) представлена на рис. 3 и характеризуется практически линейным убыванием поля $\chi(\tau, z)$ от значения χ_2 на верхней границе $z = 1$ до значения χ_1 на нижней границе $z = z_0$. Результаты расчетов показали, что градиент температуры, направленный снизу вверх, генерирует стационарный поток в отрицательном направлении. Влияние этого градиента температуры на распределение поля директора столь велико, что при $\Delta\chi = 0.015(\sim 6$ K) в центральной части ГЖК-ячейки

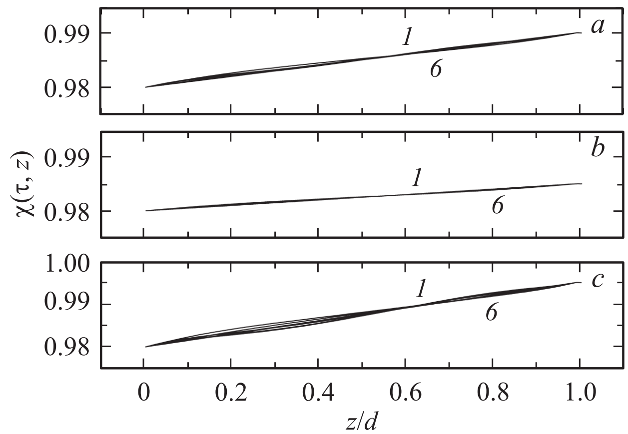

Рис. 3. Эволюция поля температуры $\chi(\tau, z)$ к его равновесному распределению $\chi_{\mathrm{eq}}(z)$ по сечению ГЖК-ячейки. Обозначения те же, что на рис. 1.

направление поля директора противоположно направлению поля директора вблизи границ. При этом время релаксации $\tau_R(\Delta\chi)$ убывает с ростом $\Delta\chi$. Так, при $\Delta\chi = 0.005$ ($\sim 1.9\,\mathrm{K}$) время релаксации $\tau_R(0.005) = 0.6$ ($\sim 36\,\mathrm{s}$), тогда как при $\Delta\chi = 0.015$ ($\sim 6\,\mathrm{K}$) время релаксации в 5 раз меньше и равно $\tau_R(0.015) = 0.12$ ($\sim 7\,\mathrm{s}$) как для случая релаксации поля директора, так и для случая релаксации поля скорости. В случае слабого сцепления ЖК-молекул с более теплой ограничивающей поверхностью характер релаксации безразмерного поля скорости качественно остается прежним и характеризуется острым экстремумом вблизи верхней ограничивающей поверхности. Так, в том случае, когда $\frac{Ad}{K_{30}}\Delta\theta = 0.1$, максимальное значение $|u_{\mathrm{eq}}^{\max}(z)| \sim 56.7$ ($\sim 85.5\,\mu\mathrm{m/s}$), а время релаксации $\tau_R \sim 0.15$ ($\sim 9\,\mathrm{s}$), в то время как в случае жесткого сцепления ЖК-молекул с верхней ограничивающей поверхностью максимальное значение $|u_{\mathrm{eq}}^{\max}(z)| \sim 57.3$ ($\sim 87\,\mu\mathrm{m/s}$), а время релаксации $\tau_R \sim 0.12$ ($\sim 7\,\mathrm{s}$). Такое поведение равновесного распределения $u_{\mathrm{eq}}(z)$ вблизи верхней ограничивающей поверхности позволяет нам утверждать, что характер сцепления ЖК-молекул с ограничивающей поверхностью практически не влияет на характер и величину времени релаксации поля скорости.

5. Ориентационная релаксация компонент тензора напряжений при $T_1 \to T_{NA}$

Обратимся теперь к проблеме релаксации компонент тензора напряжений σ_{ij}, которые можно получить непосредственно, исходя из полной функции Рэлея

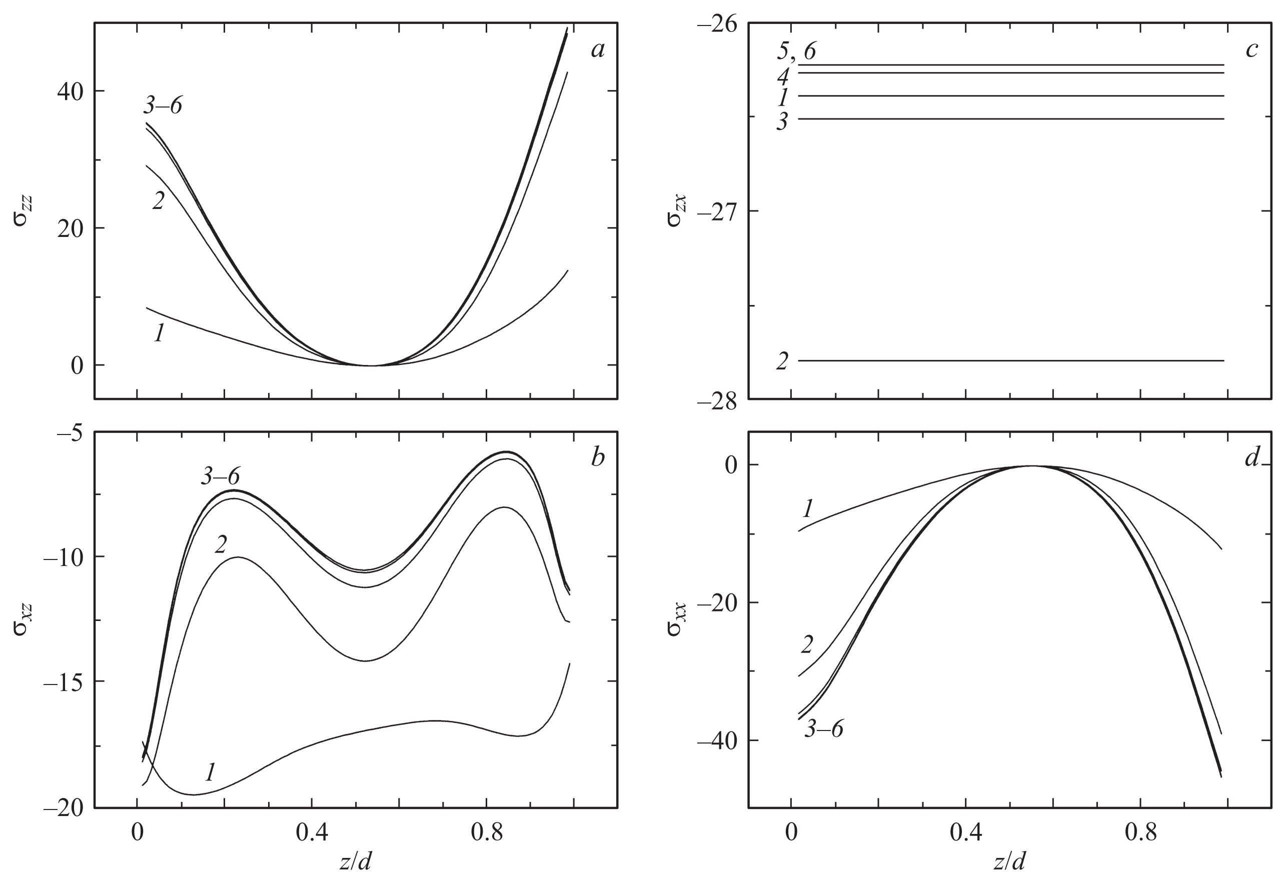

Рис. 4. Релаксация компонент тензора напряжений $\sigma_{zz}(\tau, z)$ (a), $\sigma_{xz}(\tau, z)$ (b), $\sigma_{zx}(\tau, z)$ (c) и $\sigma_{xx}(\tau, z)$ (d) к их равновесным распределениям по сечению ГЖК-ячейки. Обозначения те же, что на рис. 1. $\Delta\chi = 0.01$.

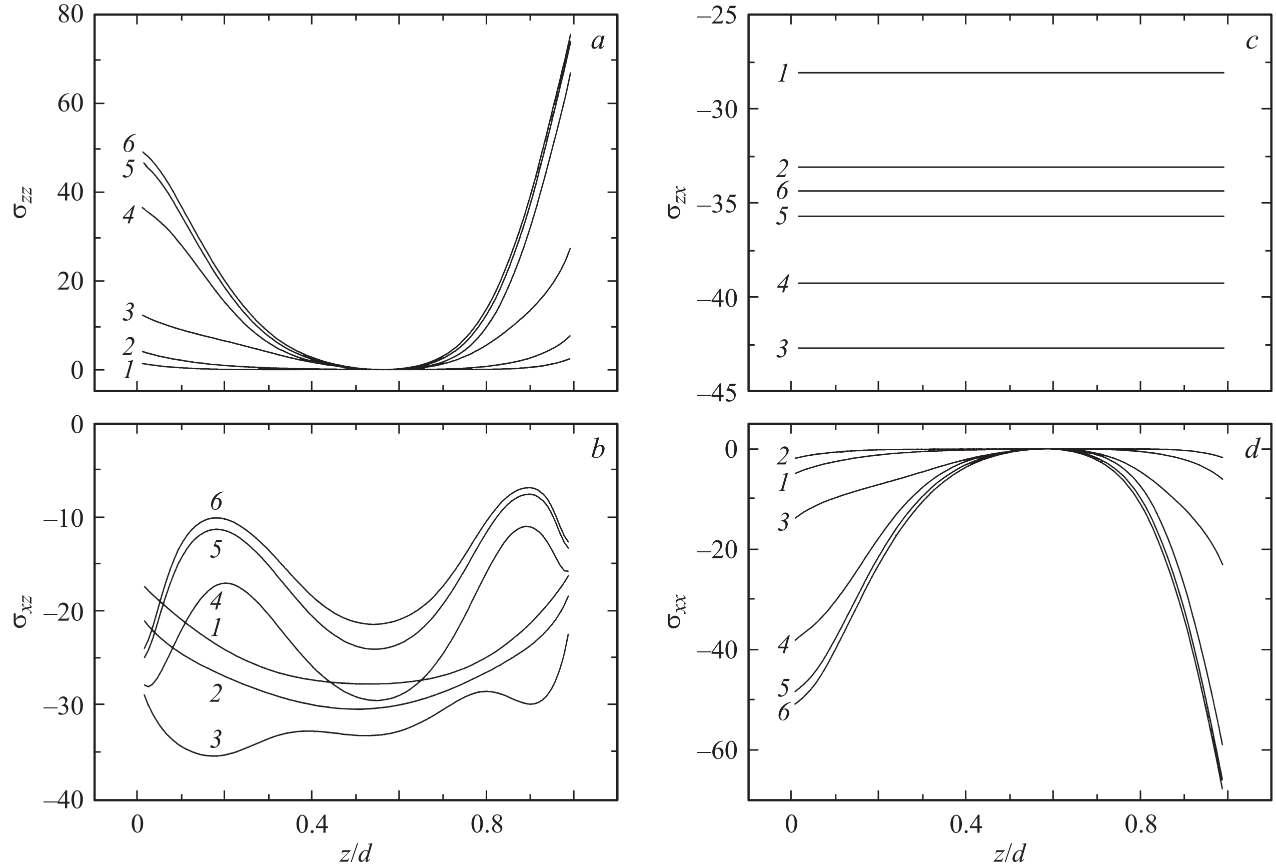

Рис. 5. То же, что и на рис. 4, при значениях $\Delta\chi = 0.015$.

$\mathscr{R}(t, z) = \left(\frac{K_{10}^2}{\gamma_{10} d^4}\right)\mathscr{R}(\tau, z)$ как [2,5,24]

$$\sigma_{zx}(\tau, z) = \frac{\partial \mathscr{R}(\tau, z)}{\partial u_z}. \tag{22}$$

Располагая значениями σ_{zx} и используя соотношение $\sigma_{zx}(\tau, z) - \sigma_{xz}(\tau, z) = \frac{\partial \mathscr{R}(\tau,z)}{\partial \theta_\tau}$, можем рассчитать

$$\sigma_{xz}(\tau, z) = \sigma_{zx}(\tau, z) - \left(\mathscr{G}(\theta)\theta_z\right)_z + \frac{1}{2}\mathscr{G}_\theta(\theta)\theta_z^2. \tag{23}$$

В случае плоской геометрии выражение баланса линейных моментов (3) позволяет нам рассчитать компоненты нормальных напряжений тензора σ_{ii} $(i = x, z)$

$$\sigma_{xx}(\tau, z) = -P(\tau, z), \tag{24}$$

$$\sigma_{zz}(\tau, z) = -P(\tau, z) - \mathscr{G}(\theta)\theta_z^2, \tag{25}$$

где $P(\tau, z) = \frac{d^2}{K_{10}}\bar{P}(t, z)$ — безразмерное гидростатическое давление в системе. Результаты расчета компонент тензора напряжений $\sigma_{zz}(\tau, z)$, $\sigma_{xz}(\tau, z)$, $\sigma_{zx}(\tau, z)$ и $\sigma_{xx}(\tau, z)$ по сечению ГЖК-ячейки от более холодной нижней границы $z = z_0$ к более теплой верхней границе $z = 1$ для случая двух температурных режимов $\Delta x = 0.01$ и 0.015 представлены на рис. 4 и 5 соответственно. На рис. 4 показана эволюция $\sigma_{zz}(\tau, z)$ (a), $\sigma_{xz}(\tau, z)$ (b), $\sigma_{zx}(\tau, z)$ (c) и $\sigma_{xx}(\tau, z)$ (d) в зависимости от z/d для различных моментов времени $\tau(k) = \left(\frac{k}{6}\right)\tau_R$, где $K = 1, \ldots, 6$, при этом время релаксации $\tau_R = \tau(6) = 0.12$ $(\sim 7\,\mathrm{s})$. Равновесное распределение значений нормальных компонент $\sigma_{zz}(z)$ и $\sigma_{xx}(z)$ характеризуется острыми экстремумами вблизи ограничивающих поверхностей $z = 1$ и $z = z_0$ и $|\sigma_{ii}(z)| \to 0$ в центре ГЖК-ячейки. Равновесное распределение тангенциальной компоненты $\sigma_{xz}(z)$ характеризуется осцилляционным поведением отрицательных значений $\sigma_{xz}(z)$ с ростом z/d, в то время как функция $\sigma_{zx}(z)$, согласно уравнению (10), постоянна по всему сечению ГЖК-ячейки. В данном случае с ростом $\Delta\chi$ от значения 0.01 $(\sim 4\,\mathrm{K})$ до 0.015 $(\sim 6\,\mathrm{K})$ абсолютная величина компонент тензора напряжений $|\sigma_{ii}(z)|$ в среднем возрастает на 25%. При этом максимальное значение размерной величины тензора напряжений $\bar{\sigma}_{ij} = \left(\frac{K_{10}}{d^2}\right)\sigma_{ij}$ на заключительной стадии эволюционного процесса ~ 0.09 Pa достигается для случая нормальной компоненты $\bar{\sigma}_{zz}$ вблизи более теплой ограничивающей поверхности $z = 1$. Располагая значениями как компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(\tau, z)$, так и поля скорости $u(\tau, z)$, мы можем рассчитать значения сдвиговой (η_s) и нормальной (η_c) вязкостей в ГЖК-ячейках:

$$\eta_s = \sigma_{zx}(\tau, z)/u_z, \tag{26}$$

$$\eta_c = \sigma_{xx}(\tau, z)/u_z. \tag{27}$$

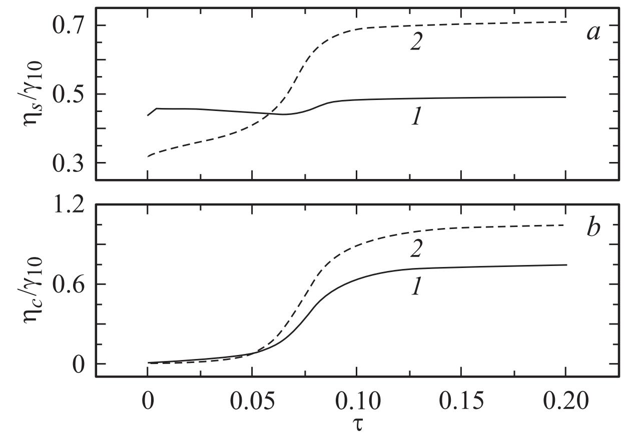

Рис. 6. Релаксация сдвиговой $\eta_s(\tau, z)/\gamma_{10}$ (*a*) и сжимающей $\eta_c(\tau, z)/\gamma_{10}$ (*b*) вязкостей к их равновесным значениям в двух точках ГЖК-ячейки $z/d = 0.04$ (*1*) и 0.96 (*2*). Значения $\Delta\chi = 0.015$.

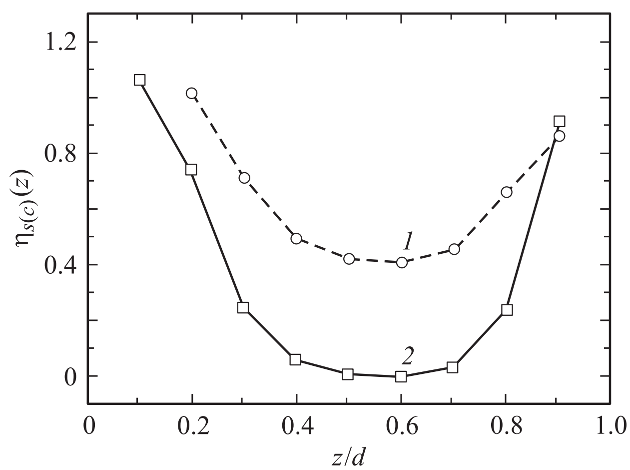

Рис. 7. Распределение равновесных сдвиговой $\eta_s(z)$ (*1*) и сжимающей $\eta_c(z)$ (*2*) вязкостей по сечению ГЖК-ячейки. Значение $\Delta\chi = 0.015$.

Характер релаксации этих безразмерных коэффициентов вязкости к их равновесным значениям для двух расстояний $z/d = 0.04$ (вблизи нижней границы) и 0.96 (вблизи верхней границы) представлен на рис. 6, а их равновесное распределение по сечению ГЖК-ячейки показано на рис. 7. Результаты расчета релаксации коэффициентов вязкости $\eta_s(\tau, z)$ (рис. 6, *a*) и $\eta_c(\tau, z)$ (рис. 6, *b*) к их равновесным значениям $\eta_{s(c)}$ показали, что время релаксации τ_R этих материальных коэффициентов совпадает со временем релаксации как поля директора, так и поля скорости. При этом время релаксации $\tau_R(\Delta\chi)$ убывает с ростом $\Delta\chi$. Так, с ростом $\Delta\chi$ от 0.01 до 0.015 величина $\tau_R(\Delta\chi)$ убывает от 0.3 (~ 18 s) до 0.12 (~ 7 s) соответственно. Отметим, что в центре ГЖК-ячейки значения сдвиговой вязкости η_s в 2 раза меньше, чем на краях ячейки ($\eta_s(0.5)/\eta_s(0.1) = 0.5$), в то время как величина η_c в центре ячейки практически на два порядка меньше по сравнению с η_c вблизи краев ячейки ($\eta_c(0.5)/\eta_c(0.1) = 10^{-2}$). Такое поведение равновесного распределения вязкости η_c указывает на то, что нормальная компонента тензора напряжения σ_{xx} сильно влияет как на характер релаксации, так и на равновесное распределение $\eta_c(z)$ по сечению ГЖК-ячейки.

6. Заключение

Предыдущие исследования ориентационных процессов релаксации в цианобифенилах, таких как 5ЦБ [2,5], которые образуют нематическую фазу при температурах, близких к комнатным, показали, что градиент температуры, направленный вертикально к границам ГЖК-ячейки, инициирует гидродинамическое течение ЖК в горизонтальном направлении. На величину и направление течения ЖК-фазы влияют как направление градиента температуры, так и характер сцепления ЖК-молекул с ограничивающими поверхностями. При этом температурный режим на обеих поверхностях соответствовал температурному интервалу существования ЖК-фазы 5ЦБ. В случае другого цианобифенильного соединения, такого как 8ЦБ, которое обнаруживает фазовый переход нематик−смектик *A*, по мере охлаждения одной из ограничивающих поверхностей, например нижней, по направлению к температуре, соответствующей T_{NA}, релаксационный процесс, обусловленный градиентом температуры, обнаруживает ряд особенностей. Эти особенности вызваны формированием новой *SmA*-фазы по мере того как $T_1 \to T_{NA}$. На макроскопическом уровне описания это проявляется в аномальном росте величин ряда материальных коэффициентов, таких как вращательная вязкость и изгибная деформация Франка, что в конечном итоге сказывается на характере баланса как линейных, так и вращательных моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы в пристенном слое. Все это ведет к тому, что граничные условия, которым должны удовлетворять полярный угол и скорость, существенно изменяются. Так, гибридная ориентация для полярного угла θ (7) заменяется условием (20), соответствующим планарной ориентации полярного угла на обеих границах, а условие отсутствия скольжения на ограничивающих поверхностях заменяется условием (21). Это условие подразумевает, что на нижней ограничивающей поверхности $z = z_0$ (там, где формируется смектическая фаза) должно выполняться условие проскальзывания, а величина скорости на этой границе пропорциональна размеру новой *SmA*-фазы. Поскольку размер этой *SmA*-фазы очень мал (~ 40 nm при $T_1 \sim 306.7$ K), величина скорости $u(z)_{z=z_0} = -2z_0C(\tau)$ на границе раздела $N-SmA$ также мала относительно скорости в объеме ГЖК-ячейки. Но даже такое незначительное изменение граничного условия для скорости ведет к кардинальному изменению релаксационного процесса поля скорости $u(\tau, z)$. В 8ЦБ гидродинамический равновесный поток $u(z)$ направлен в отрицательном направлении и характеризуется острым минимумом вблизи более теплой верхней ограничивающей поверхности (рис. 2), в то время как для 5ЦБ при том же направлении и величине градиента температуры гидродинамический равновесный поток $u(z)$ направлен в положительном направлении и характеризуется острым максимумом вблизи более теплой ограничивающей поверхности (рис. 1 в [5]). Качественно меняется и характер релаксации компонент тензора напряжений σ_{ij}. Для примера можно сравнить рис. 4 работы [5] и рис. 4 настоящей работы. Все это свидетельствует о том, что флуктуации локального смектического порядка сильно влияют не только на статические параметры ЖК-системы, такие как коэффициенты упругости Франка, но и на релаксационные процессы в ЖК-системе, обусловленные градиентом температуры. Таким образом, мы надеемся, что настоящая работа дает ответы на некоторые вопросы, связанные с описанием релаксационных процессов, протекающих в ГЖК-ячейках в случае, когда температура одной из ограничивающих поверхностей $T_1 \to T_{NA}$.

Список литературы

[1] D.O. Krimer, S. Residori. Eur. Phys. J. E **23**, 77 (2007).
[2] A.V. Zakharov, A.A. Vakulenko. J. Chem. Phys. **127**, 084 907 (2007).
[3] A. Dequidt, P. Oswald. Eur. Phys. Lett. **80**, 26 001 (2007).
[4] A. Dequidt, P. Oswald. Eur. Phys. J. E **24**, 157 (2007).
[5] А.В. Захаров, А.А. Вакуленко. ФТТ **50**, 557 (2008).
[6] O. Lehmann. Ann. Phys. **4**, 649 (1900).
[7] P.G. de Gennes, J. Prost. The physics of liquid crystals. Oxford University Press, Oxford (1995). 349 p.
[8] F.M. Leslie. Proc. R. Soc. London. Ser. A **307**, 359 (1968).
[9] Р.С. Акопян, Б.Я Зельдович. ЖЭТФ **87**, 1660 (1984).
[10] R.S. Akopyan, R.B. Alaverdian, E.A. Santrosian, Y.S. Chilingarian. J. Appl. Phys. **90**, 3371 (2001).
[11] D. Davidov, C.A. Safinia, M. Kaplan, S.S. Dana, R. Schaet Zing, R.J. Birgeneau, J.D. Lister. Phys. Rev. B **19**, 1657 (1979).
[12] R.F. Bruinsma, C.A. Safinia. Phys. Rev. A **43**, 5377 (1991).
[13] A.V. Zakharov, J. Thoen. Phys. Rev. E **69**, 051 709 (2004).
[14] J.L. Ericksen. Arch. Ration. Mech. Anal. **4**, 231 (1960).
[15] F.M. Leslie. Arch. Ration. Mech. Anal. **28**, 265 (1968).
[16] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. Наука, М. (1988). 733 с.
[17] N.V. Madhusudana, R.P. Pratibha. Mol. Cryst. Liq. Cryst. **89**, 249 (1982).
[18] A.G. Chmielewski. Mol. Cryst. Liq. Cryst. **132**, 339 (1986).
[19] L.M. Blinov, A.Yu. Kabaenkov, A.A. Sonin. Liq. Cryst. **5**, 645 (1989).
[20] P. Jamee, G. Pitsi, J. Thoen. Phys. Rev. E **66**, 021 707 (2002).
[21] M. Marinelli, A.K. Ghosh, F. Mercuri. Phys. Rev. E **63**, 061 713 (2001).
[22] A.V. Zakharov, A.A. Vakulenko, J. Thoen. J. Chem. Phys. **118**, 4253 (2003).
[23] И.С. Березин, Н.Р. Жидков. Методы вычислений. Физматгиз, М. (1964). 464 с.
[24] I.W. Stewart. The static and dynamic continuum theory of liquid crystals. Taylor and Francis, London (2004). 345 p.