УДК 539.21 : 539.12.045.35.373.3

КИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ТОЧЕЧНЫХ ДЕФЕКТОВ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Н. В. Бриллиантов, П. Л. Крапивский

Исследована система нелинейных уравнений коагуляционной кинетики с ядром нового типа, описывающая процесс кластеризации точечных дефектов в твердом теле. Рассмотрены случаи системы с источником и без него. Для класса модельных кинетических коэффициентов найдены решения в области больших времен. В системе с источником полученные зависимости имеют «скейлинговую» форму.

1. Введение. Формулировка модели

В физике твердого тела встречается целый класс задач коагуляционной кинетики. К ним можно отнести задачи радиационной физики о кластеризации собственных дефектов — междоузлий и вакансий, задачи сегрегационной кинетики и др. В процессе роста дефектных скоплений, который можно считать диффузионно-лимитированным, образуются кластеры различных размеров, различной формы и внутренней структуры. Общее рассмотрение провести достаточно сложно, поэтому часто ограничиваются рассмотрением пространственно-однородного случая и ищут средние по объему концентрации k-частичных кластеров $c_k(t)$. Классические уравнения коагуляционной кинетики в этом случае имеют вид [1, 2]

$$\frac{dc_k}{dt}=\frac{1}{2}\sum_{i+j=k}K_{ij}c_ic_j-c_k\sum_{j=1}^{\infty}K_{kj}c_j. \tag{1}$$

Кинетические коэффициенты K_{ij} для диффузионно-лимитированных процессов $[i]+[j]\rightarrow[i+j]$ выражаются через радиусы кластеров R и коэффициенты диффузии D_i соотношением $K_{ij}=4\pi\,(R_i+R_j)(D_i+D_j)$ [1]. Кластеризация точечных дефектов в твердых телах имеет важную особенность: коэффициент диффузии кластера как целого пренебрежимо мал по сравнению с последним для единичного дефекта (мономера). Поэтому в дальнейшем предполагается, что $D_i=0$ при $i>1$, так что $K_{ij}=0$, если $i, j>1$. Зависимость радиуса кластера от количества частиц в нем в общем случае достаточно сложная, однако при $k\gg 1$ можно использовать соотношение $R_k\sim k^\alpha$. Здесь $\alpha=1/d$, где d — размерность кластера. Например, в случае плоских скоплений (междоузельные диски) $\alpha=1/2$, в случае сферических $\alpha=1/3$ (вакансионные поры). Следует отметить, что объекты, образующиеся при диффузионно-лимитированной агрегации, могут иметь фрактальную (дробную) размерность (см., например, [3, 4]); так, в классической модели Виттена—Сандера $d=2.67$ [5]. Точное значение d можно определить из микроскопической модели процесса.

Таким образом, в настоящей работе рассматривается следующая модель кинетических коэффициентов: $K_{ij}=a\,(i^\alpha\delta_{j1}+j^\alpha\delta_{i1})$, где $a\sim D_0r_0$ (D_0 — коэффициент диффузии мономеров, r_0 — постоянная решетки), а параметр α принадлежит физически значимому интервалу $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. С учетом постоянного источника G, равного количеству мономеров, образующихся в единице объема в единицу времени, система уравнений (1) принимает вид

$$dc_1/dt = G - ac_1(c_1 + A), \quad A = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k^{\alpha},$$
$$dc_k/dt = ac_1(c_{k-1}(k-1)^{\alpha} - c_k k^{\alpha}), \quad k \geqslant 2. \tag{2}$$

Система (2) описывает кластеризацию однотипных дефектов и может, как уже отмечалось выше, моделировать кинетику сегрегации примесных атомов (при $G=0$) или радиационно-индуцированную сегрегацию ($G \neq 0$), когда в веществе образуются атомы новых элементов. Для описания кинетики кластеризации радиационных дефектов — междоузлий и вакансий — в систему (2) необходимо, строго говоря, ввести члены, учитывающие процессы аннигиляции дефектов. Однако в ряде случаев этими процессами можно пренебречь. Например, часто подвижность одной из компонент пары Френкеля (обычно вакансий) много меньше подвижности другой (междоузлий). При этом в процессе радиационного воздействия образуются целые области с большой концентрацией однотипных дефектов (обычно вакансий). Подобная ситуация может реализоваться в полупроводниках (см., например, [6, 7]).

В системе (2) также не учитываются процессы «испарения» мономеров из кластеров и захват мономеров различного рода ловушками. Заметим, однако, что «испарением» можно пренебречь, если равновесная концентрация дефектов много меньше концентрации мономеров в системе. Захватом на ловушки дислокации, другие нарушения кристалла можно пренебречь, если их концентрация низка, например в случае монокристаллов, а темп генерации мономеров достаточно высок. Таким образом, несмотря на ряд ограничений, модель является достаточно общей и имеет широкий спектр применения.

Система уравнений, соответствующая системе (2), в которой учитывались все перечисленные выше процессы, изучалась численно в работах [8-10]. Следует отметить, что при численных исследованиях трудно выделить качественные закономерности поведения системы, тогда как аналитическое рассмотрение более простых моделей позволяет сделать это достаточно полно.

2. Анализ простейших моделей

Рассмотрение начнем с наиболее простых моделей $\alpha=0$ и $\alpha=1$. Для последних удается найти явные выражения для решения системы (2), а также его асимптотики при $t \to \infty$ и проверить адекватность других менее строгих методов решения системы. При $\alpha=0$, $G=0$ в безразмерных переменных имеем

$$dc_1/dt = -c_1(c_1 + N), \quad N = \sum_{k=1}^{\infty} c_k,$$
$$dc_k/dt = c_1(c_{k-1} - c_k), \quad k \geqslant 2. \tag{3}$$

За единицу времени здесь принята величина $(ac_0)^{-1}$, где c_0 — единица концентрации. Введение новой переменной

$$\tau = \int_0^t c_1(t')\,dt', \quad c_1^{-1} d/dt = d/d\tau \tag{4}$$

линеаризует систему (3). Решение последней нетрудно найти, используя преобразование Лапласа. Приведем результат для случая монодисперсных начальных условий $c_k(0) = \delta_{k1}$, отмечая уголком сверху зависимость от τ

$$\hat{c}_k(\tau) = (\tau^{k-1}/(k-1)! - \tau^k/k!)\, e^{-\tau}, \qquad t = \int_{1-\tau}^{1} \frac{dv}{v} \exp(1-v). \tag{5}$$

Заметим, что при $t \to \infty$ $(\tau \to 1)$ функции $c_k(t)$ экспоненциально стремятся к асимптотическому распределению $c_1(\infty)=0$, $c_k(\infty)=(ek(k-2)!)^{-1}$. При $\alpha=1$ решение системы может быть найдено методом производящей функции и для монодисперсных начальных условий имеет вид

$$c_k(t) = [(1-2e^{-t})^{k-1} - k^{-1}(1-2e^{-t})^k]\,[2(1-e^{-t})]^{-k}. \tag{6}$$

В этом случае также наблюдается экспоненциальная релаксация к асимптотическому распределению $c_k(\infty)=(1-k^{-1})2^{-k}$ при $t \to \infty$. Можно показать, что такой характер асимптотики является общим для всех моделей $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ в системах без источника $(G=0)$ независимо от начальных условий.

При наличии в системе источника для модели $\alpha=0$ имеем

$$dc_1/dt = 1 + (c_1+N)c_1, \quad dc_k/dt = c_1(c_{k-1}-c_k), \quad k \geqslant 2, \tag{7}$$

где за единицу времени для систем с источником принято $t^* = (aG)^{-1/2}$, а за единицу концентрации $c^* = (G/a)^{1/2}$. Для моментов нулевого и первого порядков N и M получим

$$dN/dt = 1 - c_1 N, \quad dM/dt = 1, \tag{8}$$

где $N = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ представляет собой полное количество кластеров, а $M = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k$ — общее количество частиц в единице объема, так что условие $dM/dt = \mathrm{const}$ выражает закон сохранения числа частиц в системах с источником.

Из (7) и (8) получаем замкнутое уравнение для $c_1(t)$

$$\ddot{c}_1 - \dot{c}_1^2/c_1 + \dot{c}_1/c_1 + 2c_1\dot{c}_1 + c_1^3 = 0,$$

из которого определяем асимптотику при $t \to \infty$

$$c_1(t) \simeq (3t)^{-1/3}, \qquad \tau \simeq (3t)^{2/3}/2. \tag{9}$$

Чтобы понять поведение решения при $k \gg 1$, заменим в правой части (7) разностный оператор дифференциальным и решим получающееся волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial k}\right)\hat{c}_k(\tau) = 0, \qquad \hat{c}_k(\tau) \simeq \hat{c}_1(\tau - k) \simeq [2\tau(1-k/\tau)]^{-1/2}. \tag{10}$$

Этот результат можно вывести более строго. Решая (7) рекуррентно, найдем

$$\hat{c}_{k+2}(\tau) = \frac{1}{k!} \int_0^{\tau} dv\, \hat{c}_1(\tau - v)\, v^k \exp(-v). \tag{11}$$

В области (которую можно назвать скейлинговой)

$$\tau \to \infty, \quad k \to \infty, \quad x = k/\tau = \mathrm{fix} < 1,$$

оценивая интеграл (11) методом перевала, находим

$$\hat{c}_{k+2}(\tau) \simeq \frac{\exp(k \ln k - k)}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} dW \hat{c}_1(\tau - k + W) \exp\left(-\frac{W^2}{2k}\right) \simeq \hat{c}_1(\tau - k) \tag{12}$$

в полном соответствии с ранее полученным ответом (10). В области $k/\tau > 1$ решение $\hat{c}_k(\tau)$, как показывает анализ (11), экспоненциально быстро убывает, поэтому при проведении вычислений с точностью до экспоненциально малых членов суммирование по k можно проводить до $k_{max}=\tau$. Эти соображения позволяют вычислить моментную функцию

$$\hat{M}_\gamma(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}k^\gamma\hat{c}_k\simeq\int_1^\tau\frac{k^\gamma dk}{2^{1/2}(\tau-k)^{1/2}}\simeq\frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(\gamma+3/2)}\frac{(2\tau)^{\frac{2\gamma+1}{2}}}{2^\gamma}. \qquad (13)$$

Учитывая, что $t=(2\tau)^{3/2}/3$, запишем (11) и (13) в «реальном» времени

$$c_k(t)=[(3t)^{2/3}-2k]^{-1/2},\quad k_{max}-k\gg 1, \qquad (14)$$

$$M_\gamma(t)=\frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(\gamma+3/2)}\frac{(3t)^{\frac{2\gamma+1}{3}}}{2^\gamma},\quad k_{max}=\frac{(3t)^{2/3}}{2}. \qquad (15)$$

Заметим, что при $\gamma=0$ и $\gamma=1$ из (15) получаем соотношения для N и M, которые также непосредственно следуют из (8). Также отметим, что при $t\to\infty$ $k/t\ll 1$, $c_k(t)=c_1(t)=(3t)^{-1/3}$.

В модели $\alpha=1$ с источником удается найти точное решение при монодисперсных начальных условиях

$$c_k(t)=t^{k-1}(1+t)^{-k}\simeq t^{-1}\quad\text{при}\quad t\to\infty, \qquad (16)$$

$$M_\gamma(t)=t^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}k^\gamma\left(\frac{t}{1+t}\right)^k\simeq t^\gamma\Gamma(1+\gamma)\quad\text{при}\quad t\to\infty.$$

Асимптотика решения (16) может быть также получена менее строгим методом, основанным на использовании соответствующего волнового уравнения. Последний удобен для исследования более сложных моделей.

3. Анализ моделей при $0<\alpha<1$

Запишем систему (2) в безразмерном виде

$$dc_1/dt=1-c_1(c_1+A),\quad \frac{dc_k}{dt}=c_1((k-1)^\alpha c_{k-1}-k^\alpha c_k),\quad A=M_\alpha. \qquad (17)$$

Как было показано выше, при $\alpha=0$ и $\alpha=1$ асимптотические зависимости для функций $c_k(t)$ имеют степенной вид: $c_k\sim t^{-\beta}$, где $\beta=1/3$ при $\alpha=0$ и $\beta=1$ при $\alpha=1$. Поэтому естественно предположить, что решение при произвольном $0<\alpha<1$ имеет такой же вид с параметром β, лежащим в интервале $1/3<\beta<1$. Если $\beta<1$, то $dc_k/dt\ll c_1c_k$ при $t\to\infty$ и величинами dc_k/dt в первом приближении можно пренебречь. В результате при $k/t\ll 1$ приходим к асимптотическим соотношениям

$$c_k(t)=\mathrm{B}k^{-\alpha}t^{-\beta},\quad A(t)=t^\beta\mathrm{B}^{-1}. \qquad (18)$$

Для определения констант B и β перейдем к переменной τ

$$\tau=\mathrm{B}(1-\beta)^{-1}t^{1-\beta},\quad \hat{A}(\tau)=\hat{c}_1^{-1}(\tau),$$

$$\hat{c}_k(\tau)=\mathrm{B}[\mathrm{B}(1-\beta)^{-1}]^{\frac{\beta}{1-\beta}}\tau^{-\frac{\beta}{1-\beta}}k^{-\alpha}. \qquad (19)$$

Чтобы найти распределение $\hat{c}_k(\tau)$ при $k/\tau\sim 1$, запишем, как и прежде, k-е уравнение системы в «волновом» виде

$$(\partial/\partial\tau+\partial/\partial m)(k^\alpha\hat{c}_k(\tau))=0,\quad m=k^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}, \qquad (20)$$

решением которого будет функция $\hat{c}_k(\tau)=f(\tau-m)k^{-\alpha}$. При $\tau\gg m$ $\hat{c}_k(\tau)\simeq\simeq f(\tau)k^{-\alpha}$. Сравнивая этот результат с соотношением (19), найдем $f(\tau)$, так что

$$\hat{c}_k(\tau)=\mathrm{B}[\mathrm{B}(1-\beta)^{-1}]^{\frac{\beta}{1-\beta}}(\tau-m)^{-\frac{\beta}{1-\beta}}k^{-\alpha}, \qquad (21)$$

где $k_{\max}-k\gg 1$, с оценкой для $k_{\max}$ вида $m(k_{\max})=\tau$. Подставляя (21) в выражение $\hat{A}(\tau)=\hat{M}_\alpha(\tau)$ и проводя преобразования, правомерные при $\beta<1/2$ (при $\beta\geqslant 1/2$ интеграл расходится), получим

$$\hat{A}(\tau)\simeq\int\limits_1^{k_{\max}} dkk^\alpha\hat{c}_k(\tau)=\mathrm{B}\left(\frac{\mathrm{B}}{1-\beta}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}(1-\alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1-2\beta}{1-\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1-2\beta}{1-\beta}\right)}\tau^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}-\frac{\beta}{1-\beta}}. \quad (22)$$

Сравнивая результат с соотношением (19) для $\hat{A}(\tau)$, найдем константы

$$\beta=(3-2\alpha)^{-1},$$

$$\mathrm{B}=\frac{(1-\beta)^\beta}{(1-\alpha)^{\alpha\beta}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1-2\beta}{1-\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1-2\beta}{1-\beta}\right)}\right]^{\beta(1-\alpha)}, \quad (23)$$

откуда видно, что условием самосогласованности является ограничение на параметр α: $0\leqslant\alpha<1/2$.

Приведем также результат вычисления моментной функции для этого интервала α

$$M_\gamma(t)=\left(\frac{\mathrm{B}}{2\beta}\right)^{\frac{\gamma-1}{1-\alpha}}\frac{\Gamma\left(\frac{5-4\alpha}{2-2\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-\alpha+1}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{2\gamma+3-4\alpha}{2-2\alpha}\right)}t^{\frac{2\gamma-2\alpha+1}{3-2\alpha}}. \quad (24)$$

В случае $\alpha\geqslant 1/2$ интеграл в (22) содержит не имеющую физического смысла расходимость на верхнем пределе. Последняя связана с использованием выражения (21) для $\hat{c}_k(\tau)$ в области $\tau-m\to 0$, т. е. с нарушением условия $k_{\max}-k\gg 1$. Не зная точного поведения $\hat{c}_k(\tau)$, в рассматриваемой области можно обойти эту трудность «обрезанием» верхнего предела интегрирования. При $\alpha\leqslant 1/2$ это не отразится на конечном результате, а при $\alpha>1/2$ появятся неизвестные константы, однако, как можно показать, характер временно́й зависимости не изменится. Проводя оценку интеграла с «обрезанным» верхним пределом и сравнивая результат с выражением (19) для $\hat{A}(\tau)$, найдем, что при $1/2<\alpha<1$ $\beta=\alpha$, так что

$$c_k(t)\sim k^{-\alpha}t^{-\alpha},\quad k/t\ll 1,\quad M_\gamma(t)=t^\gamma,\ \text{при } t\to\infty. \quad (25)$$

В случае $\alpha=1/2$ рассуждения несколько удлиняются. Пусть $\hat{c}_1(\tau)=f(\tau)$, тогда, как и прежде, $\hat{A}(\tau)=\hat{c}_1^{-1}(\tau)$, $\hat{c}_k(\tau)=f(\tau-m)/k^{1/2}$, где $m=k^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}=2k^{1/2}$ и $\tau-m\gg 1$. Функцию $f(x)$ ищем в виде $f(x)=x^{-1}b^{-1}(x)$, где $b(x)$ — медленно меняющаяся функция. В новых обозначениях выражение для $\hat{A}(\tau)$ можно записать в виде

$$\hat{A}(\tau)\simeq\frac{1}{2}\int\limits_a^\tau dx\frac{(\tau-x)}{xb(x)}=\frac{\tau}{2}\int\limits_a^\tau\frac{dx}{xb(x)}-\int\limits_a^\tau\frac{dx}{b(x)}, \quad (26)$$

где a — константа «обрезания». Предположим, что при $\tau\gg 1$ вторым членом в левой части (26) можно пренебречь по сравнению с первым, который тогда можно приравнять $\hat{c}_1^{-1}(\tau)$ $(\hat{c}_1(\tau)=\tau^{-1}b^{-1}(\tau))$. Дифференцируя полученное равенство по τ, имеем

$$\tau b(\tau)=2b'(\tau),$$

откуда $b(x)=(\ln x)^{1/2}$. Справедливость использованного выше предположения проверяется прямым вычислением. Зная $b(x)$, можно определить все интересующие величины

$$c_k(t) \simeq t^{-1/2}(2\ln t)^{-1/4}k^{-1/2}, \quad k \ll t, \quad M_\gamma(t) = t^\gamma (2\ln t)^{\frac{1-\gamma}{2}}. \tag{27}$$

Зависимости $c_k(t)$ при $k/t \sim 1$ получим из выражения для $\hat{c}_k(\tau)$, учитывая, что $m=2k^{1/2}$, а $\tau \simeq 2t^{1/2}(2\ln t)^{1/4}$. Заметим, что соотношения (27) справедливы с точностью до $\ln(\ln t)/\ln t$, т. е. выход решений на асимптотику происходит при $\alpha=1/2$ крайне медленно. Важной характеристикой системы является средний радиус кластеров, определяемый соотношением

$$\bar{R}_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha c_k(t)\left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\right]^{-1} = \frac{M_\alpha(t)}{M_0(t)}, \tag{28}$$

$\bar{R}_\alpha(t)$ и полную концентрацию кластеров $N(t)=M_0(t)$ можно определить, используя выражения (16), (24), (25), (27) для моментных функций.

3. Обсуждение результатов

Проведенное выше исследование асимптотической кинетики модельных систем уравнений с ядром $K_{ij}=a(i^\alpha\delta_{j1}+j^\alpha\delta_{i1})$ отражающим специфику коагуляции точечных дефектов в твердом теле, позволяет выявить следующие закономерности этих процессов.

1) При отсутствии источника мономеров система экспоненциально релаксирует к стационарному распределению для всех значений $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Скорость релаксации и вид асимптотического распределения зависят от начальных условий.

2) В системе с источником асимптотика решений не зависит от начальных условий. Важной качественной особенностью таких систем является скейлинговый характер решений

$$c_k(t) \simeq t^{-\beta}\Phi(k/t^z) \quad \text{при } k\to\infty, \quad t\to\infty, \quad k/t^z = \text{fix},$$

где скейлинговые показатели β, z и вид функции $\Phi(x)$ зависят от параметра α. Зависимости этих и некоторых других представляющих интерес показателей от α приведены в таблице. Интересно отметить наличие особой точки $\alpha=1/2$, в которой появляются логарифмические поправки в решении.

Скейлинговые показатели основных функций

α	$c_k \sim k^{-\alpha}t^{-\beta}$	$k_{\max} \sim t^z$	$\bar{R}_\alpha \sim t^r$	$N \sim t^n$	$M_\gamma \sim t^{m_\gamma}$
	β	z	r	n	m_γ
$0 \leqslant \alpha < 1/2$	$\frac{1}{3-2\alpha}$	$\frac{2}{3-2\alpha}$	$\frac{2\alpha}{3-2\alpha}$	$\frac{1-2\alpha}{3-2\alpha}$	$\frac{2\gamma+1-2\alpha}{3-2\alpha}$
$\alpha=1/2$	$1/2$	1	$1/2$	0	γ
Степенная зависимость умножается на	$(\ln t)^{-1/4}$	$(\ln t)^{-1/2}$	$(\ln t)^{-1/4}$	$(\ln t)^{1/2}$	$(\ln t)^{\frac{1-\gamma}{2}}$
$1/2 < \alpha < 1$	α	1	α	0	γ

3) Отметим также, что при $\alpha=0$ полное число кластеров растет, тогда как средний радиус остается постоянным. Это означает, что весь приток мономеров расходуется на образование новых скоплений и в системе возникает большое число мелких кластеров. При $\alpha > 1/2$, напротив, полное число кластеров остается постоянным, а их средний радиус быстро растет. Поток мономеров при этом идет на увеличение уже имеющихся скоплений и в системе образуется небольшое число крупных кластеров. На интервале $0 \leqslant \alpha < 1/2$ наблюдается постепенный переход от первого режима эволюции ко второму. Точка $\alpha=1/2$ является переходной — полное число кластеров растет, но логарифмически медленно.

Обсудим некоторые известные дефектные скопления. В случае вакансионных пор в металлах принято считать, что они представляют собой компактные сферические образования, так что радиус связан с количеством частиц условием $R_k \sim k^{1/3}$, т. е. $\alpha=1/3$, тогда

$$\bar{R}_{\text{void}} \sim t^{2/7}, \quad N_{\text{void}} \sim t^{1/7}.$$

Другим примером дефектных скоплений может служить скопление междоузлий, которые образуют плоские диски. В этом случае $R_k \sim k^{1/2}$, т. е. $\alpha=1/2$, следовательно,

$$\bar{R}_{\text{disk}} \sim t^{1/2} (\ln t)^{-1/4}, \quad N_{\text{disk}} \sim (\ln t)^{1/2}.$$

Таким образом, для междоузельных комплексов характерен гораздо более быстрый, чем для вакансионных пор, рост среднего радиуса скоплений при значительно более медленном увеличении полного числа кластеров. В численных экспериментах [10] наблюдалась та же тенденция: образование большого числа мелких вакансионных пор и значительно меньшего числа крупных междоузельных дисков (подчеркнем, однако, что в [10] исследовалась система уравнений с учетом аннигиляции, испарения и т. д.; число уравнений при этом было конечное).

В работе [11] при экспериментальном исследовании радиационно-индуцированной сегрегации также было обнаружено, что радиус плоских скоплений в среднем в несколько раз превосходит радиус сферических.

Эти примеры свидетельствуют о качественном согласии модельного описания с экспериментом. Вопрос об уровне количественного согласия в настоящее время остается открытым ввиду отсутствия достаточно детального экспериментального материала.

Литература

[1] Чандрасенар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., 1947. 168 с.
[2] Волощук В. М. Кинетическая теория коагуляции. Л., 1984. 283 с.
[3] Смирнов Б. М. // УФН. 1986. Т. 149. № 2. С. 177—217.
[4] Jullien R. // Contemp. Phys. 1987. V. 28. N 5. P. 477—493.
[5] Witten T. A. Jr., Sander L. M. // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. N 14. P. 1400—1403.
[6] Винецкий В. Л., Холодарь Г. А. Радиационная физика полупроводников. Киев, 1979. 336 с.
[7] Ганн В. В., Ганатаров Л. В., Волобуев А. В., Резниченко Э. А. // АЭ. 1987. Т. 62. № 2. С. 91—95.
[8] Kiritany M. // J. Phys. Soc. Jap. 1983. V. 35. P. 95—105.
[9] Choi Y. H., Bement A. L., Russel K. C. // Proc. Intern. Conf. held at Gatlingburg. 1975. Oct. 1—3. V. 11. P. 1.
[10] Рязанов А. И., Сидоренко А. Д., Филиппов С. С. // Препринт ИАЭ-4224/6. М., 1985. 36 с.
[11] Щербак В. И., Тарашков В. П., Быков В. Н., Руденко В. А. // АЭ. 1986. Т. 60. № 3. С. 190—193.

ВНИИТ
Москва

Поступило в Редакцию
11 апреля 1988 г.
В окончательной редакции
20 сентября 1988 г.