

УДК 536.421.1, 536.424.1; 539.373

ВЛИЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА РАВНОВЕСНУЮ ФОРМУ ВКЛЮЧЕНИЯ НОВОЙ ФАЗЫ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ГИСТЕРЕЗИС

И. М. Каганова, А. Л. Ройтбурд

Сформулирован критерий равновесия фаз, позволяющий расширить понятие равновесного включения на случай превращения, происходящего в пластически деформированной среде. На основании анализа термодинамики равновесного включения решается вопрос о термодинамическом гистерезисе фазовых превращений в твердых телах, если превращение сопровождается пластической деформацией включения новой фазы.

Фазовое превращение в твердых телах развивается совместно с сопутствующими процессами релаксации внутренних напряжений. При анализе термодинамики фазового превращения релаксацию напряжений, обусловленную пластической деформацией, можно учесть в рамках макроскопической теории пластичности: учитываются нелинейная зависимость напряжений от деформаций и необратимый характер пластических деформаций.

В работах [1-4] теория пластичности использовалась для расчета условий роста сферического центра новой фазы (фазы различаются удельными объемами). Однако если собственная деформация превращения ε_0 имеет сдвиговые компоненты или выполняется неравенство $\mu_1 > \mu_2$ ($\mu_{1,2}$ — модуль сдвига, индекс «1» относится к матрице, а «2» — к включению), в упругой гетерофазной системе сферическая форма включения энергетически невыгодна: равновесной формой включения является эллипсоид или его вырожденные формы — цилиндр или пластина [5, 6].

В работе формулируется критерий равновесия фаз, позволяющий ввести понятие равновесного включения в случае превращения, сопровождающегося пластической деформацией. Решается вопрос о термодинамическом гистерезисе фазовых превращений в твердых телах, если превращение сопровождается пластической деформацией.

1. Р а в н о в е с и е ф а з с у ч е т о м п л а с т и ч е с к и х д е ф о р м а ц и й

Равновесное включение в упругой среде должно обеспечивать минимум термодинамического потенциала системы, причем одним из параметров, по которому происходит варьирование, является положение межфазной границы. Критерий равновесия границы сводится к дополнительному граничному условию на межфазной поверхности [6, 7]

$$f_2^{(e)} - f_1^{(e)} - 1/2 (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2) [\varepsilon] = 0 \quad (1a)$$

или

$$\Delta f_0 - 1/2 \bar{\sigma}_2 \varepsilon_0 - 1/2 \bar{\sigma}_1 \varepsilon^* = 0, \quad \varepsilon^* = \varepsilon_0 + \Delta \hat{S} \varepsilon_2, \quad (1b)$$

$f_i^{(e)} = f_{0i} + 1/2 \hat{\sigma}_i \hat{S}_i \hat{\varepsilon}_i$; $\Delta f_0 = f_{02} - f_{01}$ (\hat{S}_i — упругие податливости; $\hat{S}_i = \hat{C}_i^{-1}$, \hat{C}_i — упругие модули) — плотность свободной энергии, $\hat{\sigma}_i$ — напряжения, а $[\hat{\varepsilon}] = \hat{\varepsilon}_2 - \hat{\varepsilon}_1$ — скачок полных деформаций. Деформации во включении отсчитываются от недеформированного состояния фазы 1: $\hat{\varepsilon}_2 = \hat{\varepsilon}_0 + \hat{S}_2 \hat{\sigma}_2$, $\hat{\varepsilon}_1 = \hat{S}_1 \hat{\sigma}_1$; $\Delta \hat{S} = \hat{S}_2 - \hat{S}_1$.

Нелинейную зависимость $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\hat{\varepsilon})$ при пластической деформации можно учесть в рамках деформационной теории пластичности, являющейся вариантом нелинейной теории упругости [8]. В этом приближении предполагается существование функции состояния f определенной как

$$df = \hat{\sigma}(\hat{\varepsilon}) d\hat{\varepsilon}, \quad (2)$$

причем в равновесии достигается минимум потенциала

$$\Phi = \int_V f dV - \int_S F_i u_i dS, \quad (3)$$

первый интеграл берется по всему объему, а второй — по внешней поверхности тела. F_i — силы, приложенные к внешней поверхности, u_i — вектор смещения. Значение Φ равно полной работе, затраченной на создание данного напряженного состояния. Если $\hat{\sigma}$ линейно зависит от $\hat{\varepsilon}$, соотношение (2) совпадает с определением свободной энергии в теории упругости, а Φ — с термодинамическим потенциалом упругой системы.

В нелинейном приближении условие равновесия, полученное из обращения в нуль вариации потенциала Φ относительно смещения межфазной границы, может быть записано в виде (1а), где $f^{(e)}$ заменено на f .

В приближении идеальной пластичности, которым мы будем пользоваться в дальнейшем, в состоянии текучести интенсивность напряжений сдвига постоянна, $\tau = (\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varepsilon})^{1/2} = \tau_*$, $\hat{\varepsilon} = \hat{\sigma} + pE$, $p = -1/3 \text{Sp } \hat{\sigma}$. Тогда [8] при $\Gamma > \Gamma_* \equiv \tau_*/2\mu$

$$f = f_0 + (K/2) \varepsilon^2 + \tau_* (\Gamma - \Gamma_*) + \mu \Gamma_*^2, \quad (4)$$

K — модуль всестороннего сжатия, $\varepsilon = \text{Sp } \hat{\varepsilon}$, $\Gamma = (\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varepsilon})^{1/2}$, $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} - (\varepsilon/3) E$ — девиатор деформации. В упругой области ($\Gamma < \Gamma_*$)

$$f = f^{(e)} = f_0 + (K/2) \varepsilon^2 + \mu \Gamma^2 = f_0 + p^2/2K + \tau_*^2/4\mu. \quad (5)$$

Выделим в пластической области упругую и пластическую части деформаций

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \hat{\varepsilon}^{(e)} + \hat{\varepsilon}^{(p)}, \\ \hat{\varepsilon}^{(e)} &= (-p/3K) E + \hat{\varepsilon}_*/2\mu, \quad \hat{\varepsilon}^{(p)} = q\hat{\varepsilon}_*, \end{aligned} \quad (6)$$

q — положительная величина, определяемая в ходе решения задачи. Если из функции f выделить плотность свободной энергии $f^{(e)} = f_0 + p^2/2K + \tau_*^2/4\mu$, то

$$f = f^{(e)} + q\tau_*^2 = f^{(e)} + \hat{\varepsilon}_* \hat{\varepsilon}^{(p)} = f^{(e)} + a. \quad (7)$$

Здесь a — удельная работа на пластических деформациях. Эта величина существенно положительная. Отрицательное значение a (или, что то же самое, отрицательное значение q) указывает на неустойчивость напряженного состояния [9].

Работа на пластических деформациях не запасается в теле, а диссипирует. Это обстоятельство должно быть учтено при составлении уравнения энергетического баланса. Если мы рассматриваем рост фазы 2 за счет пластически деформированной фазы 1, слагаемое a_1 надо исключить из f_1 . Сохранение этого слагаемого равносильно возвращению в систему тепла, диссипированного в этом слое. Формально это соответствует тому, что в критерии равновесия границы f_1 надо заменить на $f_1^{(e)}$. Такая процедура учитывает необратимый характер пластической деформации. Таким об-

разом, критерий равновесия, равносильный условию возможности роста фазы 2 в упругопластической среде, может быть записан как

$$(f_2^{(e)} + a_2) - f_1^{(e)} - 1/2(\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2) [\varepsilon] = 0, \quad (8)$$

где теперь $\hat{\varepsilon}_1 = \hat{J}_1 \hat{\sigma}_1 + \hat{\varepsilon}_2^{(p1)}$, $\hat{\varepsilon}_2 = \hat{J}_2 \hat{\sigma}_2 + \hat{\varepsilon}_2^{(p1)} + \hat{\varepsilon}_0$.

Сформулированный критерий равновесия (8) оперирует локальными значениями величин на межфазной границе. Этот критерий не «привязан» к конкретной конфигурации границы, что позволяет распространить задачу о равновесной форме включения одной фазы в матрице другой на случай пластически деформированных фаз.

2. Пластическая релаксация напряжений во включении

В общем случае сдвиговые напряжения в матрице и во включении одного порядка. Будем, однако, предполагать, что пластическая релаксация происходит только во включении, а матрица остается упругой. Это соответствует случаю пластинчатых включений, когда поле напряжений сконцентрировано внутри включения [10]. Кроме того, может оказаться, что предел текучести матричной фазы $\tau^{(1)}$ значительно превышает предел текучести $\tau^{(2)}$ фазы включения, $\tau^{(2)} \equiv \tau_*$.

Выясним, при какой форме включения энергетические затраты при росте включения с учетом пластической деформации внутри него минимальны. Исходим из критерия (8). Учитывая, что матричная фаза деформирована упруго, т. е. $\hat{\varepsilon}^{(p1)} = 0$, уравнение (8) можно переписать так:

$$\Delta f_0 - 1/2 \hat{\sigma}_2 (\varepsilon_0 + \varepsilon^{(p1)}) + \hat{\tau}_* \varepsilon^{(p1)} - 1/2 \hat{\sigma}_1 \varepsilon^* = 0, \quad (9)$$

где $\hat{\tau}_*$ — тензор сдвига во включении; ε^* — эквивалентная деформация, позволяющая заменить пластическое включение фазы 2 эквивалентным упругим включением с модулями фазы 1, оставляя неизменными деформации и напряжения в системе [11],

$$\hat{\sigma}_2 = \hat{C}_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon^*) = \hat{C}_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0 - \varepsilon^{(p1)}). \quad (10)$$

Переход к эквивалентному упругому включению позволяет воспользоваться результатами, полученными для упругих включений [5, 6]. Для изотропных фаз в рамках линейной теории упругости равновесное включение представляет собой эллипсоид или его вырожденные формы: эллиптический цилиндр и плоскопараллельная пластина. Напряжения и деформации в таких включениях однородны ($\hat{\sigma}_2 = \text{const}$, $\hat{\varepsilon}_2 = \text{const}$; из уравнения (10) следует, что в этом случае и $\hat{\varepsilon}^{(p1)} = \text{const}$), а условие равновесия выполняется за счет такого подбора ε^* , при котором свертка $\hat{\sigma}_1 \varepsilon^* = 0$. Для равновесных включений роль $\hat{\varepsilon}^{(p1)}$ сводится к перенормировке собственной деформации $\hat{\varepsilon}_0$: $\hat{\varepsilon}_0$ заменяется на $\hat{\varepsilon}_0 + \varepsilon^{(p1)}$, а также к добавлению в критерий равновесия постоянного слагаемого $\hat{\tau}_* \hat{\varepsilon}^{(p1)}$ (ср. формулы (9) и (16)). Величина $-1/2 \hat{\sigma}_2 (\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}^{(p1)}) = e (\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}^{(p1)})$ есть отнесенная к объему включения V энергия упругой системы при собственной деформации $\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}^{(p1)}$. Тогда равновесное значение потенциала Φ , отсчитанное от однофазного состояния, есть

$$\Phi = V \{ \Delta f_0 + E(\hat{\varepsilon}_0) \}, \quad (11)$$

$$E(\hat{\varepsilon}_0) = e (\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}^{(p1)}) + \hat{\tau}_* \hat{\varepsilon}^{(p1)}.$$

Потенциал Φ — функционал от формы включения. Условие $\min \{ \Phi = V [\Delta f_0 + E] \} = 0$ определяет термодинамический гистерезис превращения, т. е. то минимальное отклонение Δf_0 от точки равновесия неограниченных, невзаимодействующих фаз, которое необходимо для роста включения новой фазы.

Очевидно, учет пластической деформации во включении не меняет набор форм включения, для которых выполняется условие равновесия.

Однако, перенормируя $\hat{\varepsilon}_0$, пластическая деформация приводит к смещению границ стабильности различных равновесных форм.

Рассмотрим пример: превращение происходит в отсутствие внешних напряжений при тетрагональной собственной деформации

$$\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \bar{\varepsilon}_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

(Внешние напряжения $\hat{\sigma}$ можно учесть [12] заменой $\hat{\varepsilon}_0$ на $\hat{\varepsilon}_0 + \Delta \hat{J} \hat{\sigma}$). Напряжения $\hat{\sigma}_2 = -p_2 \hat{E} + \hat{\tau}_2$ и упругая энергия e равновесного упругого включения зависят от отношения $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$. Тензор сдвига $\hat{\tau}_2$ представим в виде суммы простых сдвигов

$$\hat{\tau}_2 = \tau_2 \{ \alpha \hat{t}_1 + \beta \hat{t}_2 \}, \quad 2\alpha^2 + 6\beta^2 = 1, \\ \hat{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{t}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для эллипсоидальных и цилиндрических включений тензор $\hat{\tau}_2$ записан в системе координат, в которой диагональна собственная деформация $\hat{\varepsilon}_0$; для пластинчатых включений — в системе координат, связанной с пластиной: ось 3 направлена по нормали к пластине n , а оси 1 и 2 лежат в плоскости пластины. Везде ниже полагаем $\varepsilon_0 > 0$.

При $\mu_1/\mu_2 = \gamma < 1$ (включение более жесткое, чем матрица) равновесная форма включения:

1) $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 < -1$ и $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 > x = (1 + \nu_2) \{ 3 + \gamma (1 - 2\nu_2) + 3\sqrt{1 - 2\nu_2\gamma - \gamma^2(1 - 2\nu_2)} \} / [3(1 + \nu_2) + \gamma(1 - 2\nu_2)(5 - \nu_2)]$ — пластина, нормаль к которой составляет такой угол Θ с третьей главной осью собственной деформации, что напряженное состояние соответствует одноосному растяжению, «наклонная» пластина (НП)

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \mu_2 (1 + \nu_2) \varepsilon_0 \left| 1 + \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right|, \quad \alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \beta = \pm 1/\sqrt{24}, \quad (14)$$

знаки α и β противоположны знаку $1 + \bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$,

$$e = \mu_2 \varepsilon_0^2 (1 + \nu_2) (1 + \bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)^2, \quad (15)$$

$$\sin^2 \Theta = \frac{(1 + \nu_2)(1 + \bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)}{3\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0}, \quad (15a)$$

2) $-1 < \bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 < -(1 - \gamma)/\varphi$; $\varphi = 1 + 2\gamma(1 - 2\nu_2)/(1 + \nu_2)$ — нормаль к пластине совпадает с третьей главной осью собственной деформации, «горизонтальная» пластина (ГП)

$$\tau_2 = \sqrt{8/3} \mu_2 \varepsilon_0 ((1 + \nu_2)/(1 - \nu_2)) (1 + \bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0), \quad \beta = -1/\sqrt{6}, \quad (16)$$

$$e = 2\mu_2 \varepsilon_0^2 ((1 + \nu_2)/(1 - \nu_2)) (1 + \bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)^2, \quad (16a)$$

3) $-(1 - \gamma)/\varphi < \bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 < (1 - \gamma)/2\varphi$ — двухосный эллипсоид, оси которого совпадают с главными осями собственной деформации

$$\tau_2 = \frac{2\sqrt{6} \mu_1 |\bar{\varepsilon}_0|}{(1 - \gamma)}, \quad \beta = \frac{\text{sign } \bar{\varepsilon}_0}{\sqrt{6}}, \quad (17)$$

$$e = \frac{6\mu}{\varphi} \varepsilon_0^2 \left\{ 1 - \frac{\varphi}{6(1 - \gamma)} (\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)^2 \right\}, \quad (17a)$$

4) $(1 - \gamma)/2\varphi < \bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 < x$ — круговой цилиндр с осью вдоль третьей главной оси собственной деформации

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{\mu_2 \varepsilon_0}{[1 + \gamma(1 - 2\nu_2)]} \left| (1 + \nu_2) - \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} [2(1 + \nu_2) + 3\gamma(1 - 2\nu_2)] \right|, \quad \beta = \pm 1/\sqrt{6}, \quad (18)$$

$$e = \mu_2 \varepsilon_0^2 (1 + \nu_2) \left(1 - 2 \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0}\right)^2 + \frac{2\mu_1 \varepsilon_0^2}{[1 + \gamma(1 - 2\nu_2)]} \left[(1 + \nu_2) + (1 - 2\nu_2) \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right]^2. \quad (18a)$$

При $\gamma > 1$ эллипсоидальные и цилиндрические включения энергетически невыгодны. Минимуму упругой энергии соответствуют пластинчатые включения: НП реализуются при $\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 < -1$ и $\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 > (1 + \nu_2)/(2 - \nu_2)$; область существования ГП $-1 < \tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 < 0$. В интервале $0 < \tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 < (1 + \nu_2)/(2 - \nu_2)$ нормаль к пластине лежит в плоскости, перпендикулярной третьей главной оси ε_0 ; «вертикальные» пластины (ВП)

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \mu_2 \varepsilon_0 \left(\frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \right) \left\{ 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} + \frac{7 + 7\nu_2^2 - 13\nu_2}{(1 + \nu_2)^2} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad (19)$$

$$\alpha = -\frac{3\mu_2 \varepsilon_0}{(1 - \nu_2) \tau_2} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right), \quad \beta = -\frac{2}{3} \frac{\mu_2 \varepsilon_0}{\tau_2} \left(\frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right),$$

$$e = \frac{\mu_2 \varepsilon_0^2}{(1 - \nu_2)} \left\{ \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right)^2 + \left(1 - 2 \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right)^2 + 2\nu_2 \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right) \left(1 - 2 \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right) \right\}. \quad (19a)$$

На рис. 1, 2 соответственно показаны зависимости интенсивности сдвига τ_2 и упругой энергии e от $\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$; $\gamma < 1$ (сплошные линии), $\gamma > 1$ (штриховые линии).

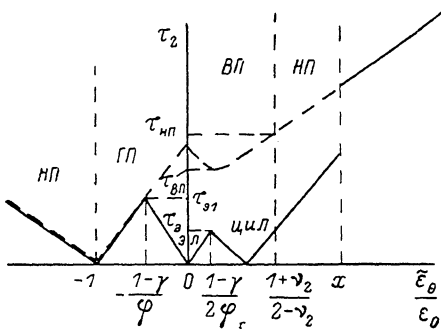


Рис. 1. Зависимость интенсивности сдвига τ_2 во включениях от параметра тетрагональности $\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$ в приближении теории упругости.

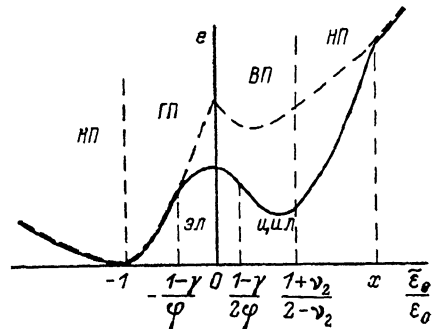


Рис. 2. Зависимость упругой энергии системы от параметра тетрагональности в приближении теории упругости.

Рассмотрим пластически деформированные включения. Тензор сдвига $\hat{\tau}_2 = \hat{\tau}_*$ задается формулой (13), где $\tau_2 = \tau_*$. Пластическая деформация $\hat{\varepsilon}^{(p)} = q\tau_* (\alpha t_1 + \beta t_2)$ определяется значением двух параметров: q и, например, β . Для определения q и β воспользуемся тем, что для равновесных включений пластическая деформация приводит только к перенормировке $\hat{\varepsilon}_0$. Приравняв компоненты тензора $\hat{\tau}_*$ значениям компонент упругого сдвига $\hat{\tau}_2$ (см. формулы (14)–(19)), где $\hat{\varepsilon}_0$ заменено на $\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}^{(p)}$, получаем систему уравнений для q и β при различных формах включений. В случае пластинчатых включений $\hat{\varepsilon}_0$ надо записать в системе координат, связанной с пластиной. Заметим, что, если в упругом пределе значения α и β не зависят от сдвиговых компонент собственной деформации, те же значения α и β характеризуют тензор $\hat{\tau}_*$ в пластической области значений $\hat{\varepsilon}_0$.

Покажем, что эллипсоидальная форма включения неустойчива относительно развития в эллипсоиде пластических деформаций. Пластические деформации имеют место при (см. (17))

$$|\tilde{\varepsilon}_0| > \tau_* (1 - \gamma) / 2\mu_1 \sqrt{6} \equiv \tilde{\varepsilon}_* \quad (\gamma < 1). \quad (20)$$

В соответствии с формулой (17) сдвиг $\hat{\tau}_* = \tau_* \text{sign } \tilde{\varepsilon}_0 \hat{t}_2 / \sqrt{6}$, а параметр q , характеризующий пластическую деформацию, есть

$$q = \left\{ 1 - \left| \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\tilde{\varepsilon}_*} \right| \right\} \frac{(1 - \gamma)}{2\mu_1}. \quad (21)$$

При выполнении неравенства (20) значения q отрицательны, что и доказывает неустойчивость этого решения.

Область существования упругих эллипсоидальных включений $-(1-\gamma)\varepsilon_0/\varphi < \bar{\varepsilon}_0 < (1-\gamma)\varepsilon_0/2\varphi$. Если собственная дилатация $\varepsilon_0 < \tau_*\varphi/2\sqrt{6}\mu_1$, сдвиговые напряжения в равновесном эллипсоиде не превосходят предела текучести. При обратном знаке неравенства область реализации эллипсоидальных включений сужается: $-\bar{\varepsilon}_e < \bar{\varepsilon}_0 < \bar{\varepsilon}_e$.

Рассмотрим цилиндрическое включение. Сдвиговые напряжения (см. (18)) не приводят к пластическим деформациям, если

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{c1,2}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2(1+\mu_1/K_2)} \left\{ 1 \mp \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\tau_* [1 + \gamma(1-2\nu_2)]}{\mu_2\varepsilon_0(1+\nu_2)}} \right\}. \quad (22)$$

В пластической области $\hat{\tau}_* = \pm \tau_* \hat{t}_2/\sqrt{6}$ (верхний знак соответствует $\bar{\varepsilon}_0/\bar{\varepsilon}_0 < \bar{\varepsilon}_{c1}/\varepsilon_0$, а нижний $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 > \bar{\varepsilon}_{c2}/\varepsilon_0$), равновесное значение q есть

$$q = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}\varepsilon_0}{\tau_*} \left[\frac{\bar{\varepsilon}_{c1}}{\varepsilon_0} - \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right], & \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} < \frac{\bar{\varepsilon}_{c1}}{\varepsilon_0}, \\ \frac{\sqrt{6}\varepsilon_0}{\tau_*} \left[\frac{\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} - \frac{\bar{\varepsilon}_{c2}}{\varepsilon_0} \right], & \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} > \frac{\bar{\varepsilon}_{c2}}{\varepsilon_0}. \end{cases} \quad (23)$$

Полученное решение устойчиво, поскольку $q > 0$. Для цилиндрического включения $E(\bar{\varepsilon}_0)$ (см. (11)) есть

$$E(\bar{\varepsilon}_0) = \frac{9\mu_1\varepsilon_0^2}{2(1+\mu_1/K_2)} \pm \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\tau_*\varepsilon_0}{(1+\mu_1/K_2)} \mp \sqrt{6}\bar{\varepsilon}_0\tau_* \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_*\varepsilon_0 \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{c1,2}}{\varepsilon_0} \right). \quad (24)$$

Любое пластинчатое включение позволяет удовлетворить критерию равновесия (9): внутренние напряжения сконцентрированы внутри включения и $\hat{\sigma}_1=0$ [10]. Энергетически выгодны те ориентации пластин, для которых потенциал Φ минимален. В упругом пределе оптимальная ориентация пластин соответствует либо НП, либо ГП, либо ВП (формулы (14), (16), (19)). Те же ориентации являются оптимальными и для пластически деформированных пластин.

1) НП. $\beta = \pm 1/\sqrt{24}$, $\alpha = \pm \sqrt{3/8}$. Пластические деформации в НП реализуются (см. (14)), если

$$\left| 1 + \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right| > \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\tau_*}{\mu_2\varepsilon_0(1+\nu_2)}. \quad (25)$$

Поскольку значения α и β заданы, сравнивая тензор $\hat{\tau}_*$ с упругим тензором сдвига $\hat{\tau}_2(\bar{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}^{(P)})$, получаем систему уравнений для определения параметра q и угла наклона Θ такой пластины

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\varepsilon_0}{\tau_*} \left\{ \left| 1 + \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right| - \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\tau_*}{\mu_2\varepsilon_0(1+\nu_2)} \right\},$$

$$\sin^2 \Theta = \frac{1}{2\bar{\varepsilon}_0} \left\{ \frac{2\tau_*\beta}{3K_2} + (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_0) \right\}, \quad \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{24}}. \quad (26)$$

Если выполнено неравенство (25), $q > 0$.

Можно показать, что для пластин значения $\beta = \pm 1/\sqrt{24}$ и $\alpha = \pm \sqrt{3/8}$ соответствуют минимуму потенциала Φ . Однако, как видно из формулы (26), не при всех значениях $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$ выполняется очевидное неравенство $0 \leq \sin^2 \Theta(\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0) \leq 1$. Если при данном $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$ значение $\sin^2 \Theta < 0$, реализуются ГП, для которых $\sin^2 \Theta = 0$; если $\sin^2 \Theta > 1$, — ВП, для которых $\sin^2 \Theta = 1$.

Если $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 < 0$, для образования пластически деформированных наклонных пластин достаточно выполнения неравенства (25). Если $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 > 0$ и $\tau_* < \tau_{НП} = \sqrt{24}\mu_2\varepsilon_0(1+\nu_2)/(2-\nu_2)$ (рис. 1), НП обязательно деформированы пластически. Граница области их стабильности определяется

условием $\sin^2 \Theta (\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)=1$, $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 > 1 - ((1-2\nu_2)/(2-\nu_2)) (\tau_*/\tau_{\text{НП}}) \equiv (\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)_{\text{НП}}$; $(\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)_{\text{НП}} > (1+\nu_2)/(2-\nu_2)$ — значение $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$, начиная с которого в упругом пределе реализуются НП. При $\tau_* > \tau_{\text{НП}}$ НП деформированы пластически, если выполняется неравенство (25). Для НП

$$E(\bar{\varepsilon}_0) = \frac{3}{8} \frac{\tau_*^2}{\mu_2(1+\nu_2)} + q\tau_*^2. \quad (27)$$

2) ВП. $\sin^2 \Theta=1$, $-1/\sqrt{6} \leq \beta \leq -1/\sqrt{24}$. В этом случае в упругом пределе параметры α и β (см. (19)) зависят от $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$. При пластической деформации их значения изменяются и определяются из уравнения

$$2\alpha [2\tau_*\beta/3K_2 + (\bar{\varepsilon}_0 + \varepsilon_0)] = 3\bar{\varepsilon}_0(\alpha + \beta), \quad (28)$$

а параметр

$$q = -3\bar{\varepsilon}_0/2\alpha\tau_* - 1/2\mu_2 (\alpha < 0). \quad (29)$$

Если $\tau_* < 3\sqrt{2}\mu_2\varepsilon_0(1+\nu_2)/[7+7\nu_2^2-13\nu_2]^{1/2} \equiv \tau_{\text{ВП}}$ (минимальный сдвиг в упругих ВП; рис. 1), возможны только пластически деформированные ВП при $0 < \bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 < (\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)_{\text{НП}}$. Если $\tau_{\text{ВП}} < \tau_* < \tau_{\text{НП}}$, в зависимости от $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$ реализуются либо упругие, либо пластические деформированные ВП. Если $\tau_* > \tau_{\text{НП}}$, пластически деформированные ВП не реализуются. Для ВП

$$E(\bar{\varepsilon}_0) = \frac{2\tau_*^2}{K_2} \left[\beta^2 - \frac{\beta}{3(\alpha + \beta)} \right] - \frac{\tau_*^2}{4\mu_2} - \frac{\tau_*(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_0)}{(\alpha + \beta)}. \quad (30)$$

3) ГП. $\sin^2 \Theta=0$, $\beta = -1/\sqrt{6}$. Пластически деформированные ГП реализуются при $\tau_* < \sqrt{8/3}\mu_2\varepsilon_0((1+\nu_2)/(1-\nu_2)) \equiv \tau_{\text{ГП}}$, когда в равновесной упругой ГП превзойден предел текучести, что соответствует

$$-1 + \tau_*/\tau_{\text{ГП}} < \bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 < 0. \quad (31)$$

Для ГП

$$q = \frac{\sqrt{6}\varepsilon_0}{\tau_*} \left\{ \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_0} \right) - \frac{\tau_*}{\tau_{\text{ГП}}} \right\}, \quad (32)$$

$$E(\bar{\varepsilon}_0) = \frac{3}{4} \frac{\tau_*^2}{\mu_2} \frac{(1-\nu_2)}{(1+\nu_2)} + q\tau_*^2. \quad (33)$$

На рис. 3 изображены $E = E(\bar{\varepsilon}_0)$ и энергия упругого включения $e = e(\bar{\varepsilon}_0)$ для равновесных пластин, когда предел текучести $\tau_{\text{ВП}} < \tau_* < \tau_{\text{НП}}$.

В упругом пределе термодинамический гистерезис при данной собственной деформации определяется упругой энергией $e(\bar{\varepsilon}_0)$ равновесного включения. Если сдвиг во включении превосходит предел текучести, функция $e(\bar{\varepsilon}_0)$ должна быть заменена на $E(\bar{\varepsilon}_0)$. Пусть функция $\mathcal{E}(\bar{\varepsilon}_0)$ совпадает с $e(\bar{\varepsilon}_0)$, если напряжения во включении упругие, и переходит в $E(\bar{\varepsilon}_0)$, когда предел текучести превзойден. Если $\gamma = \mu_1/\mu_2 > 1$ (включение менее жесткое, чем матрица), анализ напряженного состояния и энергетического баланса для пластин исчерпывает все возможные решения для равновесного включения. Если $\gamma < 1$, при выборе равновесной формы включения надо учесть возможность образования эллипсоидальных и цилиндрических включений.

При любом значении предела текучести имеются области значений $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$, где напряжения в эллипсоиде и цилиндре остаются упругими (рис. 1). Однако если предел текучести достаточно мал, может оказаться, что пластинчатое включение, в котором произошла релаксация напряжений, энергетически более выгодно. Так, если $\tau_* < \tau_s \equiv \sqrt{6}\mu_1\varepsilon_0/\varphi$ (значение сдвига в упругом эллипсоиде при $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 = (1-\gamma)/2\varphi$; рис. 1), пластины энергетически выгодны при всех значениях $\bar{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$. На рис. 4, а представлены функции $\mathcal{E}(\bar{\varepsilon}_0)$ для пластин (1), упругого эллипсоида в области его существования (2) и цилиндра (3) при $\tau_* < \tau_s$ ($\gamma < 1$).

Если предел текучести увеличивается, наименьшее (равновесное) значение функции $\mathcal{E}(\bar{\varepsilon}_0)$ достигается за счет упругих участков, соответствующим

щих эллипсоидам, цилиндрам и пластинам, и пластически деформированных пластин. Пластически деформированные цилиндры могут реализовываться при $\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0 > \tilde{\varepsilon}_{c2}/\varepsilon_0$ (см. (22)). Конкурирующая форма включения при таких значениях $\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0$ — пластически деформированная НП. На рис. 4, б изображена равновесная функция $\mathcal{E}(\tilde{\varepsilon}_0)$ для предела текучести $\tau_* > \tau_{*1} \equiv \sqrt{24}\mu_1\varepsilon_0/\varphi$ (рис. 1). Штриховой линией отмечены области, где включение остается упругим. На энергетической шкале функция $\mathcal{E}(\tilde{\varepsilon}_0)$ определяет величину термодинамического гистерезиса.

3. Обсуждение результатов

Наличие термодинамического гистерезиса фазового превращения обусловлено внутренними напряжениями, возникающими при образовании включения новой фазы, и, как следствие этого, необходимость затраты работы на образование такого включения. Даже если допускается релаксация напряжений за счет пластической деформации, пропорциональная объему новой фазы, часть затрачиваемой минимальной работы, которая и определяет термодинамический гистерезис, хотя значительно уменьшается в сравнении с упругой системой, остается конечной и определяется

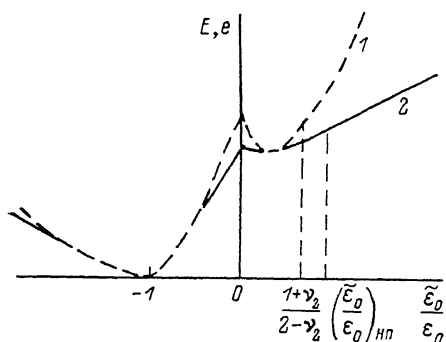


Рис. 3. Энергия упругого включения $e = e(\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)$ (1) и функция $E = E(\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)$ (2) для равновесных пластин, когда предел текучести $\tau_{ВП} < \tau_* < \tau_{НП}$.

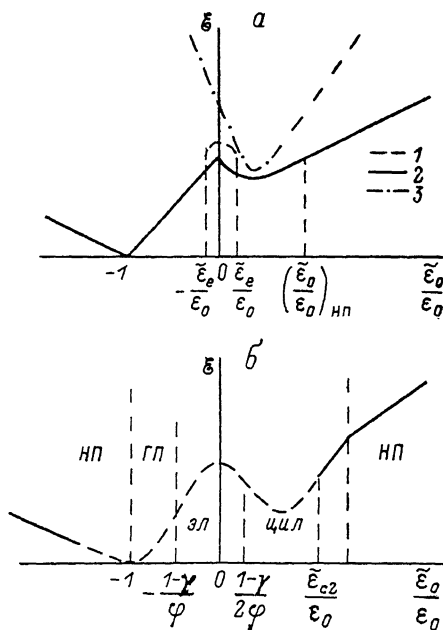


Рис. 4. Функция $\mathcal{E}(\tau_* < \tau_{*1})$ для различных форм включения (а) и равновесная функция $\mathcal{E}(\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_0)$, определяющая термодинамический гистерезис превращения для предела текучести $\tau_* > \tau_{*1}$ (б).

величиной предела текучести. Разумеется, учет пластической деформации в рамках феноменологической теории пластичности (идеальной или с упрочнением) является лишь первым приближением в понимании взаимосвязи процессов фазового превращения в пластической деформации.

Существует, однако, точка зрения, особенно резко выраженная в недавней публикации Моторина [13], что термодинамический гистерезис, как правило, отсутствует, поскольку помимо рассмотренной схемы развития фазового превращения имеется альтернативная возможность, не связанная с пропорциональными объему новой фазы энергетическими затратами. Имеется в виду возможность образования некогерентного включения, т. е. такого включения, у которого на межфазной границе не сохраняется такое же соседство каждого атома, как в исходной фазе. По существу утверждается, что имеются специфические, не сводящиеся к рассматриваемой нами пластической деформации, процессы, приводящие к тому, что внутренние напряжения, по крайней мере те, которые дают энергию, пропорциональную объему включения, не возникают. Один из таких случаев очевиден — образование жидкого включения. Действительно,

в этом случае предел текучести $\tau_* = 0$ и гистерезис отсутствует. Другой очевидный пример — образование включения меньшего объема, оторвавшегося от матрицы (подобно ореху в скорлупе). Если бы нечто подобное имело место, такой процесс сопровождался бы образованием растущего зазора между фазами и требовал бы возрастающего потока вещества через этот зазор для развития фазового превращения. Такой неконсервативный процесс вряд ли может быть типичным для фазовых превращений в однокомпонентных системах. Кроме того, в этом случае следует ожидать резкого различия между фазовым превращением с уменьшением и увеличением объема (между прямым и обратным превращением).

Если не принимать эту модель, остается предположить, что имеют место какие-то процессы на границе фаз, которые приводят к их взаимному проскальзыванию и снятию напряжений. Однако нетрудно видеть, что это было бы эффективно лишь на плоской границе двух фаз. При образовании замкнутого включения необходимо неконсервативное перераспределение материала для компенсации сдвига при фазовом превращении. Этот процесс требует интенсивных самодиффузионных потоков по границе включения или жидкоподобного перемешивания материала в объеме включения. Существенно более быстрым должен быть процесс пластической деформации, приводящей к уничтожению сдвига. В результате скольжения во включении на поверхности образуется сетка дислокаций, поля которых компенсируют поле включения. Но тем самым мы вернулись к схеме фазовое превращение + пластическая деформация.

Более тонким является вопрос: почему не происходит полного уничтожения поля внутренних напряжений (как это предполагалось в работе [14])? Образование дислокаций не может происходить иначе, как в результате трансляционного скольжения в объеме включения, что связано с диссипацией работы пластической деформации. Эта работа должна учитываться в общей энергетике наряду с упругой энергией внутренних напряжений. Минимизируя полную работу (упругая энергия плюс работа на пластических деформациях), приходим к выводу, что напряжения снимаются не полностью, а лишь уменьшаются до величины порядка τ_* .

Таким образом, модель некогерентного включения либо сводится к нашей схеме включения, пластически деформированного в процессе фазового превращения, либо предполагает жидкоподобное течение материала в объеме или на поверхности включения, что не может считаться типичным для фазового превращения в твердом теле.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Лифшиц И. М., Гулида Л. С. // ДАН СССР. 1952. Т. 87. № 3. С. 377—380.
- [2] Ройтбурд А. Л., Темкин Д. Е. // ФТТ. 1986. Т. 28. № 3. С. 775—784.
- [3] Барьяхтар В. Г., Ехилевский С. Г., Токпй В. В., Яблонский Д. А. // ФТТ. 1986. Т. 28. № 8. С. 2329—2337.
- [4] Каганова И. М., Ройтбурд А. Л. // ФТТ. 1987. Т. 29. № 5. С. 1399—1405.
- [5] Каганова И. М., Ройтбурд А. Л. // ДАН СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 594—598.
- [6] Каганова И. М., Ройтбурд А. Л. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 6. С. 156—173.
- [7] Ройтбурд А. Л. // ФТТ. 1986. Т. 28. № 10. С. 3051—3054.
- [8] Васядзу К. Вариацонные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
- [9] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., 1969. 420 с.
- [10] Ройтбурд А. Л. // ДАН СССР. 1971. Т. 197. № 5. С. 1051—1054.
- [11] Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963. 247 с.
- [12] Ройтбурд А. Л. // ФТТ. 1983. Т. 25. № 1. С. 33—40.
- [13] Моторин В. И. // ФТТ. 1987. Т. 29. № 4. С. 1277—1278.
- [14] Ройтбурд А. Л. // Письма ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 95—97.

Институт физики высоких давлений
им. Л. Ф. Верещагина АН СССР
Троицк
Московская область

Поступило в Редакцию
6 апреля 1988 г.