

УДК 532.732

АНИЗОТРОПНАЯ ПЕРКОЛЯЦИЯ ПЛАКЕТОВ — МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В. Б. Приезжев, С. А. Терлецкий

Анизотропная перколяция плакетов рассматривается как модель разрушения твердых тел. Методом ренорм-группы в прямом пространстве определен порог перколяции и построена фазовая диаграмма модели. Линия критических точек как функция концентрации продольных и поперечных плакетов обладает свойствами, отличающими рассмотренную модель от анизотропной перколяции связей.

Исследование механических свойств твердого тела вблизи порога разрушения требует статистического описания множественного рождения микротрещин [1]. В последнее время для этой цели применяются различные перколяционные модели [2-7]. Цель данной работы — пополнить список моделей разрушения еще одной: моделью анизотропной перколяции плакетов.

Основными элементами решетки являются узлы, ребра и грани. Перколяция узлов и ребер хорошо изучена. Новая модель на трехмерной решетке получается, если элементами проводящего кластера служат грани. Проводящую грань будем называть плакетом, а введенную модель — перколяцией плакетов. Прежде чем приступить к изучению этой модели, рассмотрим ее отношение к первым двум.

Перколяции плакетов можно сопоставить перколяцию ребер на дуальной решетке. Пусть L — кубическая решетка, а L^* — дуальная ей решетка, узлы которой находятся в центре элементарных кубов L . Каждому плакету на L сопоставим непроводящее ребро решетки L^* , перпендикулярное грани, занятой плакетом, и проходящее через ее центр. Пусть p — вероятность появления плакета на L или непроводящего ребра на L^* . В критической точке p_c нарушается проводимость по ребрам L^* . Одновременно на исходной решетке L возникает связанная поверхность плакетов, разрезающая ее на несвязные части. Эта поверхность является бесконечным кластером плакетов, так что p_c можно считать также критической точкой плакетной модели. Заметим, однако, что по условию реберной перколяции полученная поверхность не должна иметь разрывов и отверстий. Это ограничение не обязательно вводить в определение бесконечного перколяционного кластера плакетов. Если определить бесконечный кластер, не предполагая одновременного возникновения сплошной поверхности, критическая точка плакетной модели будет иметь другое значение p'_c , причем $p'_c < p_c$.

Для установления связи с узельной перколяцией введем решетку смежности граней \tilde{L} для данной кубической решетки L . Поместим в центре граней решетки L точки и будем считать их узлами новой решетки \tilde{L} . Два узла решетки \tilde{L} будем считать соединенными ребром, если соответствующие им грани решетки L имеют общее ребро.

Перколяция плакетов на исходной кубической решетке эквивалентна узельной перколяции на решетке смежности граней, точно так же как перколяция ребер эквивалентна узельной перколяции на решетке смежности ребер. Поэтому при желании можно всегда перейти к проблеме

узельной перколяции, подбирая решетку нужным образом. Преимущество введения плакетной перколяции обнаруживается лишь в конкретных расчетах анизотропных моделей, для которых решетка смежности слишком сложна.

Выяснив отношение плакетной перколяции к традиционным моделям, мы можем привести физические соображения в пользу введения такой модели. Они связаны с трактовкой процесса разрушения. В обычных моделях, например в модели перколяции связей, точка разрушения отождествляется с потерей связности образца, т. е. с полным разъединением макроскопических участков твердого тела. В то же время экспериментальные данные о росте трещин позволяют выделить в этом процессе две стадии. Первая, относительно медленная, стадия состоит в накоплении микротрещин вплоть до образования магистральной трещины — макроскопического дефекта, пронизывающего весь образец. Затем происходит быстрое развитие магистральной трещины вплоть до полного разрыва. С точки зрения теории перколяции магистральная трещина — бесконечный кластер.

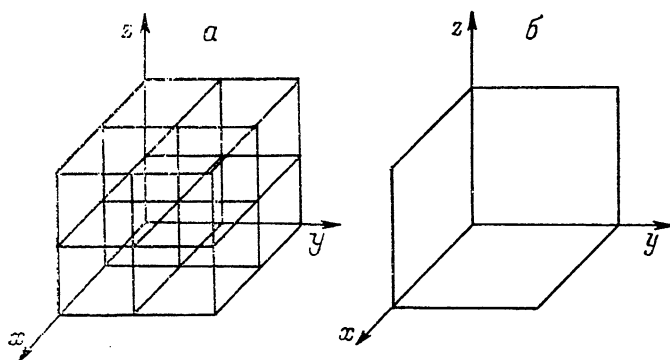


Рис. 1. Ренормируемый блок $b=2$ кубической решетки (а) и ренормированные грани новой решетки (б).

Если это — кластер плакетов, то он не должен содержать поверхность, разделяющую образец на несвязные части. Таким образом, определяя модель перколяции плакетов без дополнительных топологических ограничений на свойства бесконечного кластера, мы приходим к интерпретации точки разрушения как момента возникновения магистральной трещины.

Разумеется, такое описание магистральной трещины возможно и в любой другой модели перколяции, но для правильной оценки критической концентрации дефектов удобно пользоваться плакетами, которые наиболее точно воспроизводят геометрические свойства микротрещин [1].

Для изучения свойств введенной модели мы воспользуемся стандартным методом ренорм-группы в прямом пространстве. Опишем кратко простейшую процедуру перенормировки плакетов. На рис. 1 показан ренормируемый блок кубической решетки с размерами $b=2$ во всех трех направлениях. Вероятность возникновения плакета, перпендикулярного оси y , обозначим через p_{\perp} , вероятность остальных плакетов — через p_{\parallel} .

Для перечисления проводящих конфигураций плакетов удобно выбрать ренормируемую ячейку только из «существенных» граней единичных кубов на рис. 1. Такие грани изображены на рис. 2 вместе с гранью, получаемой после ренормализации. Остальные грани не влияют на условие проводимости в плоскости ренормированной грани.

Из рис. 2 следует, что в состав ячейки из существенных граней входит 12 граней. Перечисление проводящих конфигураций в изотропной модели ($p_{\perp}=p_{\parallel}$) дает следующее рекурсионное соотношение:

$$p' = R(p) = 8p^3q^3 + 82p^4q^8 + 384p^5q^7 + 748p^6q^6 + 752p^7q^5 + 489p^8q^4 + 220p^9q^3 + 66p^{10}q^2 + 12p^{11}q + p^{12}, \quad (1)$$

где $q=1-p$; p' — ренормированная вероятность возникновения плакета. При выводе соотношения (1) мы использовали условие одновременной

проводимости в двух направлениях — по горизонтали и по вертикали в плоскости ренормированной грани. Для анизотропного случая имеем $p'_\perp = R^{(1)}(p_\perp, p_\parallel) = p_\perp^8 + 8p_\perp^7 q_\perp + 28p_\perp^6 q_\perp^2 + 56p_\perp^5 q_\perp^3 + 64p_\perp^4 q_\perp^4 (1 - 16q_\parallel^2 - 48q_\parallel^3 + 32q_\parallel^4) + 8p_\perp^3 q_\perp^5 (1 + 2p_\parallel + 5p_\parallel^2 - p_\parallel^3 + 3p_\parallel^4)$, (2)

$$p'_\parallel = R^{(2)}(p_\perp, p_\parallel) = p_\parallel^{10} + 10p_\parallel^9 q_\parallel + 45p_\parallel^8 q_\parallel^2 + 120p_\parallel^7 q_\parallel^3 + 204p_\parallel^6 q_\parallel^4 + 8p_\parallel^5 q_\parallel^5 q_\perp^2 + 8p_\parallel^3 q_\parallel^5 (28 - 5q_\perp - q_\perp^2) + 2p_\parallel^4 q_\parallel^6 (29 + 30p_\perp + p_\perp^2) + 58p_\parallel^3 q_\parallel^7 p_\perp q_\perp. \quad (3)$$

Численное решение уравнений (2), (3) дает фазовую диаграмму модели (рис. 3). Точка *A* имеет координаты (0.350; 0.399) и является неподвижной точкой уравнений ренорм-группы. Точка *B* имеет координаты (0; 0.557). При $p_\parallel = 0$ продольные плакетты отсутствуют, и плакеттная перколяция в этом случае эквивалентна двумерной узельной перколяции с критической точкой $p_c = 0.593$ [8]. Положение точки *B* ($p_\parallel = 0.557$) согласуется с этим значением. Координаты точки *C* — (0.473; 0). Значение $p_\perp = 0$ соответствует перколяции в системе плоскостей, параллельных оси *y*. Как и

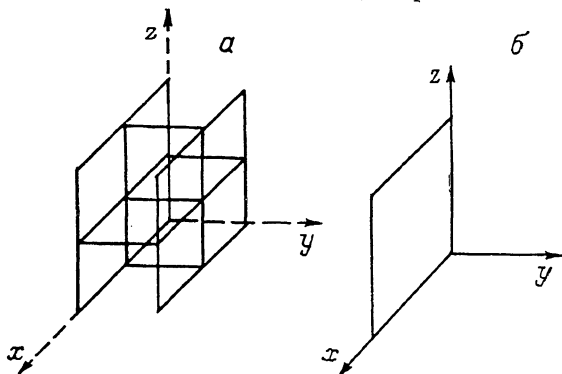


Рис. 2. Ренормируемая ячейка из «существенных» граней (а) и грань, получаемая после ренормализации (б).

следовало ожидать, критическая концентрация в этом случае ($p_\parallel = 0.473$) ниже, чем критическая точка двумерной узельной перколяции.

Положения точек *D* и *E* указывают на ограниченность нашего способа ренормализации при больших значениях p_\perp и p_\parallel . Условия связности плакеттов означают, что при $p_\perp = 1$ продольная перколяция должна возникать при сколь угодно малых p_\parallel . Следовательно, точка *D* должна иметь координаты (0, 1). По этой же причине правильное положение точки *E* — (1, 0).

На рис. 3 обозначены четыре области, соответствующие разным направлениям потоков уравнений ренорм-группы. Область *I* соответствует притяжению траекторий в точку (0, 1), область *II* — в точку (1, 1); *III* — точку (1, V), *IV* — в начало координат.

Проводя, как обычно, линеаризацию рекурсионных соотношений вблизи неподвижных точек и последующее масштабное преобразование блоков с сжимающим фактором $s=2$, находим значения поперечных и продольных критических индексов корреляционной длины

$$\nu_\perp = 0.712, \quad \nu_\parallel = 0.899. \quad (4)$$

Эти индексы входят в выражения для скейлинговых асимптотик напряжения разрыва твердого тела, упругого модуля и других критических характеристик [2-7].

Фазовая диаграмма (рис. 3) может быть использована для анализа устойчивости твердого тела при различных концентрациях продольных и поперечных трещин. Значения p_\perp, p_\parallel в области *I* приводят к преимущественному образованию поперечных магистральных трещин. В области *III* образуются продольные трещины, в области *II* — изотропные макродефекты. Область *IV* соответствует устойчивому состоянию образца.

Сравним полученную картину разрушения с той, которая следует из модели перколяции ребер [9]. Рассмотрим сначала модель разрыва связей, считая точкой разрушения полное разделение образца. Разрыву продольной связи (вдоль оси y) соответствует появление поперечного плакета с вероятностью p_{\perp} , разрыву поперечной связи — продольного плакета с p_{\parallel} . Тогда область устойчивости образца совпадает с областью перколяции связей. Кривая I на рис. 4 является границей этой области. Естественно, что разрушение образца в такой модели происходит при значительно больших концентрациях, чем в моделях, использующих представление о магистральной трещине.

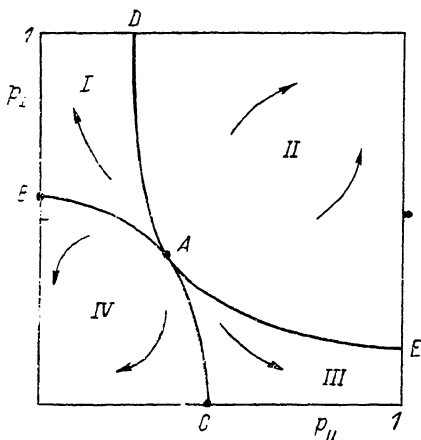


Рис. 3. Фазовая диаграмма модели.

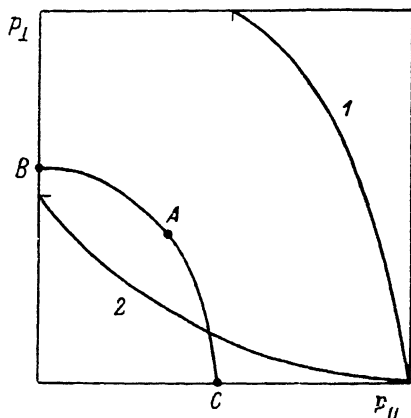


Рис. 4. Границы устойчивости.

Рассмотрим теперь другой вариант использования модели перколяции связей. Будем считать проводящее ребро микродефектом и найдем порог образования магистральной трещины, образованной такими дефектами. В этом случае порог разрушения значительно снижается. Граница устойчивости теперь изображается кривой 2 на рис. 4, которая получается отражением кривой 1 относительно диагонали квадрата.

Для сравнения на рис. 4 показана область устойчивости, полученная в модели перколяции плакетов. Кривая BAC обладает двумя важными особенностями. Во-первых, в отличие от кривой 2 она оканчивается в точке C при конечных значениях p_{\parallel} , что означает возможность образования магистральной трещины при конечной концентрации продольных микротрещин. Во-вторых, область устойчивости оказывается всюду выпуклой в отличие от области, ограниченной кривой 2. Эта особенность полученной диаграммы приводит к заметному увеличению области устойчивости в изотропной области $p_{\perp} \approx p_{\parallel}$ и может быть проверена экспериментально.

Список литературы

- [1] Томуш В. П., Куксенко В. С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига, 1978. 294 с.
- [2] Челидзе Т. Л. // Изв. АН СССР, МТТ. 1983. № 6. С. 114—123.
- [3] Roy P., Chakrabarti B. K. // J. Phys. C. 1985. V. 18. N 9. P. L185—L188.
- [4] de Arcangelis L., Redner S. // J. Physique Lett. 1985. V. 46. N 13. P. L585—L590.
- [5] Sieradzki K. // J. Phys. C. 1985. V. 18. N 27. P. L855—L856.
- [6] Sieradzki K., Li R. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. N 23. P. 2509—2512.
- [7] Sahimi M., Goddard J. D. // Phys. Rev. 1986. V. B33. N 11. P. 7848—7851.
- [8] Real — Space Renormalization / Ed. J. W. Burkhardt, J. V. Z. van Leenven. Berlin, Heidelberg, N. Y., 1982. 214 p.
- [9] Redner S., Stanley H. E. // J. Phys. A. 1979. V. 12. N 8. P. 1267—1283.