

УДК 538.632

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ДРОБНОГО КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ХОЛЛА

Ю. А. Бычков

На основе методов квантовой теории поля изучены некоторые общие свойства задачи о взаимодействии двумерных электронов в сильном магнитном поле B . Показано, что вклад поляризационных электронных петель может быть учтен с помощью простой перенормировки потенциала двухчастичного взаимодействия, что является специфической задачей о взаимодействии частиц на данном уровне Ландау. Связаны свойства полной вершинной части и пробной функции Лафлина.

В теории дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) существенное место занимает работа Лафлина [1]. В большинстве исследований, посвященных теории ДКЭХ, в значительной мере используется идея пробной функции Лафлина (см. обзор [2]). При этом рассматривается задача с заданным числом частиц при равной нулю температуре. По-видимому, наиболее деликатным элементом метода пробной функции является вопрос о введении элементарных возбуждений. В связи с этим представляется весьма соблазнительным исследовать проблему ДКЭХ с помощью хорошо разработанных методов квантовой теории поля. Вырождение электронного спектра энергий в двумерном случае на данном уровне Ландау требует введения с самого начала конечной температуры. Найти одночастичную функцию Грина в общем виде, по-видимому, невозможно. Поэтому задачей настоящей работы является установление общих свойств взаимодействия двумерных электронов в сильном магнитном поле B на языке диаграммной техники. В частности, удалось показать, что можно исключить из рассмотрения диаграммы, содержащие электронные поляризационные петли, с помощью явно найденной перенормировки потенциала двухчастичного взаимодействия.

Существенной особенностью пробной функции Лафлина являются нули третьего порядка по разности координат произвольной пары частиц. Такие функции для конечной системы возможны только при безразмерной плотности числа частиц $\nu \leq 1/3$ ($\nu = 2\pi l_H^2 n_s$, n_s — поверхностная плотность частиц, магнитная длина $l_H = (c\hbar/eB)^{1/2}$). Ниже показано, какие свойства вершинной части эквивалентны введению пробной функции Лафлина. Выводом из этих свойств является, по-видимому, необходимость введения в рассмотрение аномальных одночастичных функций Грина. Это утверждение не является вполне однозначным и требует дополнительного исследования.

1. Гамильтониан взаимодействия и его свойства

В соответствии с традиционным подходом к проблеме ДКЭХ ниже рассматривается взаимодействие двумерных электронов только на данном (s -м) уровне Ландау. Гамильтониан взаимодействия электронов можно тогда записать в следующем виде [3]:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{k_1, k_2} \int \frac{dq}{(2\pi)^2} V(q) \omega_s^2(q^2) e^{iqx(k_1 - k_2 - qy)} \hat{a}_{k_1}^+ \hat{a}_{k_2}^+ \hat{a}_{k_2 + qy} \hat{a}_{k_1 - qy}, \quad (1)$$

где \hat{a}_k (\hat{a}_k^\dagger) — операторы уничтожения (рождения) частиц с импульсом k частицы вдоль оси y . Здесь использована калибровка Ландау для векторного потенциала $\mathbf{A}=(0, Bx, 0)$, $V(q)$ — компонента Фурье потенциала взаимодействия электронов (для кулоновского взаимодействия $V(q)=2\pi e^2/\epsilon q$, ϵ — диэлектрическая проницаемость), а функция

$$w_s(x) = e^{-x^2/4} L_s(x),$$

где $L_s(x)$ — полином Лагерра. Магнитная длина l_H в (1) положена равной единице. В дальнейшем принято обозначение

$$\tilde{V}_s(q) = V(q) w_s^2(q^2).$$

В гамильтониан (1) входит оператор

$$\hat{A}_{k_1, k_2} = \int d\mathbf{q} \tilde{V}_s(q) e^{iqx(k_1 - k_2 - qy)} \hat{a}_{k_2 + qy}^\dagger \hat{a}_{k_1 - qy}.$$

Очень важным оказывается тождественное преобразование

$$\bar{A}_{k_1, k_2} \equiv \int \frac{dq'}{(2\pi)^2} \tilde{V}_s(q') e^{iq'p} \int d\mathbf{p} \int dq e^{-iqp} e^{iqx(k_1 - k_2 - qy)} \hat{a}_{k_2 + qy} \hat{a}_{k_1 - qy}. \quad (2)$$

Интегрирование по переменной \mathbf{p} приводит к функции $\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$, а последующее интегрирование по \mathbf{q}' приводит к первоначальному виду оператора \hat{A}_{k_1, k_2} . С другой стороны, выполнив вначале интегрирование по переменной q_x , учтя возникшую δ -функцию и переобозначив переменные p_x, p_y , получим, что

$$\bar{A}_{k_1, k_2} \equiv \int \tilde{V}'_s(q) e^{iqx(k_1 - k_2 - qy)} \hat{a}_{k_1 - qy} \hat{a}_{k_2 + qy} dq,$$

где новый потенциал

$$\tilde{V}'_s(q) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{q}\mathbf{p}} \tilde{V}_s(p). \quad (3)$$

Таким образом, преобразование (2) изменяет потенциал взаимодействия и переставляет индексы у операторов уничтожения частиц.

Преобразование (2) переводит гамильтониан (1) в такой же вид, но с потенциалом $-\tilde{V}'_s(q)$. Очевидно, что инвариантным по отношению к тождественному преобразованию (2) является гамильтониан с потенциалом взаимодействия

$$\tilde{U}_s(q) = 1/2 [\tilde{V}_s(q) - \tilde{V}'_s(q)]. \quad (4)$$

Для кулоновского взаимодействия потенциал $\tilde{U}_s(q) < 0$ при $q \geq 1$. Легко убедиться в том, что для потенциала взаимодействия в виде δ -функции в координатном пространстве ($V(q) = \text{const}$) $\tilde{U}_s(q) = 0$, т. е. отсутствует взаимодействие для Ферми-частиц.

В следующем разделе будет показано, что эффективный потенциал взаимодействия имеет достаточно глубокий физический смысл: преобразование (2) осуществляется диаграммами, содержащими электронные поляризационные петли.

Гамильтониан (1) удобно записать в другом представлении. Если ввести ортонормированный набор осцилляторных функций

$$\varphi_n(x) = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2},$$

где $H_n(x)$ — полином Эрмита, и воспользоваться очевидным соотношением

$$\sum_m \varphi_m(x) \varphi_m(x') = \delta(x - x'),$$

то можно совершить преобразование операторов \hat{a}_k

$$\hat{a}_k = \sum_m \varphi_m(k) \hat{b}_m, \quad \hat{b}_m = \sum_{k'} \varphi_m(k') \hat{a}_{k'} \quad (5)$$

Это преобразование операторов соответствует переходу к акспальной калибровке векторного потенциала, т. е. оператор $\hat{\delta}_m$ есть оператор уничтожения частицы в состоянии с волновой функцией ($s=0$)

$$\psi_m(\rho) = (2\pi 2^m m!)^{-1/2} (x + iy)^m e^{-\rho^2/4}, \quad \rho = (x, y). \quad (6)$$

В этом представлении гамильтониан взаимодействия, инвариантный относительно преобразования (2), принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} = & \frac{1}{2} \int \int dk_1 dk_2 \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{U}_s(q) e^{iqx(k_1 - k_2 - qy)} \times \\ & \times \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m'_1, m'_2}} \varphi_{m_1}(k_1) \varphi_{m_2}(k_2) \varphi_{m'_2}(k_2 + qy) \varphi_{m'_1}(k_1 - qy) \hat{\delta}_{m_1}^+ \hat{\delta}_{m_2}^+ \hat{\delta}_{m'_2} \hat{\delta}_{m'_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для изотропного потенциала $V(q)$ выполняется закон сохранения момента

$$m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2. \quad (8)$$

Отсюда следует, что \hat{H}_{int} коммутирует с оператором полного момента системы

$$\hat{M} = \sum_m m \hat{\delta}_m^+ \hat{\delta}_m. \quad (9)$$

В работе [4] были найдены операторы бесконечно малых магнитных трансляций, которые соответствуют повышению и понижению момента m одночастичных волновых функций. Они имеют вид

$$\hat{t}_+ = \sum_m \sqrt{2(m+1)} \hat{\delta}_{m+1}^+ \hat{\delta}_m, \quad \hat{t}_- = \sum_m \sqrt{2m} \hat{\delta}_{m-1}^+ \hat{\delta}_m. \quad (10)$$

Эти операторы конечно коммутируют с гамильтонианом системы. Справедливо также соотношение

$$[\hat{M}, \hat{t}_\pm] = \pm \hat{t}_\pm. \quad (11)$$

Следует отметить, что оператор $\hat{t}_- \hat{t}_+$ коммутирует с операторами $\hat{H}_{\text{int}}, \hat{M}$. Определим теперь физический смысл эффективного потенциала взаимодействия (4). Для простоты рассмотрим случай $s=0$, когда $\tilde{V}_0(q) = e^{-q^2/2} V(q)$. Согласно [5], уровни энергии двух частиц в магнитном поле в двумерном случае есть

$$E_m = \frac{1}{4\pi} \int d\rho e^{-\rho^2/4} \left(\frac{\rho^2}{4}\right)^m V(\rho) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-q^2} V(q) L_m(q^2). \quad (12)$$

С помощью простых преобразований, использующих свойства полиномов Лагерра [6], легко показать, что

$$\tilde{V}'_0(q) = \frac{1}{2\pi} \int d\rho e^{i\mathbf{q}\rho - \rho^2/2} V(\rho) = 4\pi \sum_m (-1)^m E_m e^{-q^2/2} L_m(q^2). \quad (13)$$

Таким образом, эффективный потенциал можно представить в виде

$$\tilde{U}_0(q) = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} E_{2k+1} e^{-q^2/2} L_{2k+1}(q^2), \quad (14)$$

т. е. он содержит только такие уровни энергии двух частиц, которые учитывают свойство антисимметрии их волновой функции относительно перестановки частиц. Это свойство, естественно, сохраняется и в случае произвольного уровня Ландау.

2. Топологические преобразования диаграмм

В этом разделе устанавливается связь преобразования (2) с топологическими преобразованиями диаграмм термодинамической теории возмущений для функций Грина [7]. Для одночастичной функции Грина в калибровке Ландау

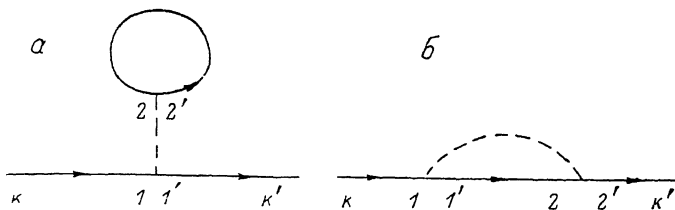


Рис. 1. Диаграммы первого порядка для одночастичной функции Грина. Символами 1, 2 обозначены соответственно импульсы k_1, k_2 , а символами 1', 2' — импульсы $k_1 - q_y$ и $k_2 + q_y$.

для функций Грина [7]. Для одночастичной функции Грина в калибровке Ландау

$$G_{k, k'}(\tau, \tau') = -\langle T_{\tau}(\hat{a}_k(\tau) \hat{a}_{k'}^+(\tau')) \rangle \quad (15)$$

в первом порядке теории возмущений существуют две диаграммы (рис. 1). Штриховая линия соответствует потенциалу $\tilde{V}_s(q)$, и указаны импульсы

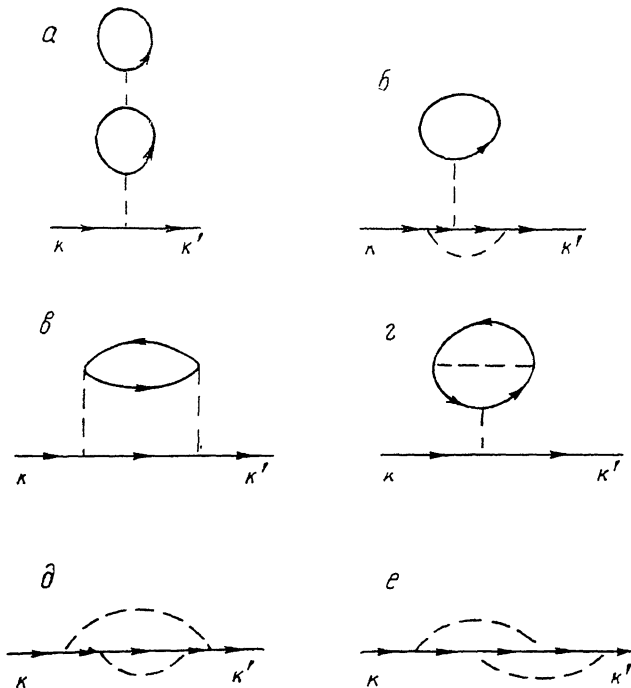


Рис. 2. Диаграммы второго порядка, отвечающие собственно-энергетической части для одночастичной функции Грина.

одночастичной функции Грина. Преобразование (2), примененное к диаграмме а, производит замену потенциала $\tilde{V}_s(q)$ на потенциал $\tilde{V}'_s(q)$, а также меняет местами значения импульсов, выходящих из вершины функций Грина $k_1 - q_y$ и $k_2 + q_y$. Перестановка этих импульсов приводит к тому, что диаграмма а становится топологически эквивалентной диаграмме б, но с потенциалом $\tilde{V}'_s(q)$. С учетом знаков диаграмм а и б (они противоположные) можно ограничиться в первом порядке теории возмущений только диаграммой б, но с эффективным потенциалом $2\tilde{U}_s(q)$.

Во втором порядке теории возмущений диаграммы, описывающие собственно-энергетическую часть функции Грина, изображены на рис. 2. Преобразования (2), произведенные над диаграммами, содержащими поляризационные петли, приводят к замене у выходящих из соответствующей вершины функций Грина начальных импульсов. В результате диаграммы

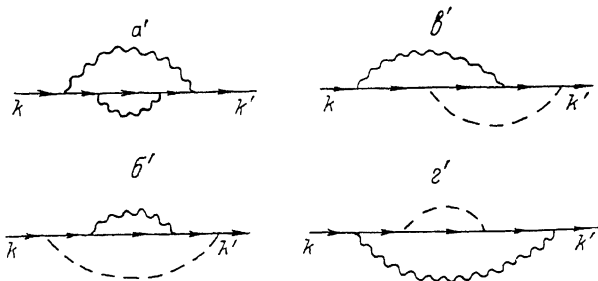


Рис. 3. Здесь показано, во что переходят содержащие поляризационные петли диаграммы $a-g$ (рис. 2) в результате применения преобразования (2).

$a-g$ (рис. 2) меняют топологический вид и переходят в диаграммы $a'-e'$ (рис. 3). Волнистая линия соответствует потенциалу $\tilde{V}_s(q)$. Диаграмма e' (рис. 2) топологически инвариантна относительно одновременного преобразования обоих входящих в нее потенциалов. Таким образом, роль поляризационных петель в теории возмущений состоит в перенормировке

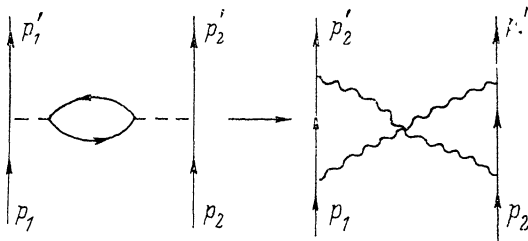


Рис. 4. Топологическое преобразование вершинной части.

потенциала $\tilde{V}_s(q)$. Введя с самого начала потенциал $\tilde{U}_s(q)$, можно вообще не учитывать диаграммы с поляризационными петлями, изменяя при этом число соответствующих диаграмм без поляризационных петель.

Нетрудно убедиться в том, что и в двухчастичной функции Грина происходит аналогичное топологическое преобразование диаграмм. В частности, для простейшей вершины с поляризационной петлей происходит топологическое преобразование диаграмм (рис. 4).

3. Вариационный принцип в термодинамической теории

Для одночастичной функции Грина в аксиальной калибровке векторного потенциала

$$G_{m, m'}(\tau - \tau') = -\langle T_\tau(\delta_m(\tau) \delta_{m'}^+(\tau')) \rangle \quad (16)$$

с учетом гамильтониана в виде (7) можно записать следующее соотношение (см. [7], $\beta=1/T$):

$$G_{m, m'}(\tau - \tau') = G_{m, m'}^{(0)}(\tau - \tau') + \sum_{\substack{m_1+m_2= \\ =m_1'+m_2'}} \iint dk_1 dk_2 \int \frac{dq}{(2\pi)^2} \tilde{U}_s(q) e^{iq_x(k_1-k_2-qq_y)} \times \\ \times \varphi_{m_1}(k_1) \varphi_{m_2}(k_2) \varphi_{m_2'}(k_2+q_y) \varphi_{m_1'}(k_1-q_y) \times \\ \times \int_0^\beta G_{m_1, m_1'}^{(0)}(\tau - \tau_1) \langle T_\tau(\delta_{m'}^+(\tau') \delta_{m_2}^+(\tau_1) \delta_{m_2'}(\tau_1) \delta_{m_1'}(\tau_1)) \rangle d\tau_1. \quad (17)$$

Если считать, что вершинная часть отлична от нуля только при сохранении полного момента, то возникает условие $m_1 = m'$. В результате соотношение (17) в частотном представлении [7] можно переписать в следующем виде ($\omega_n = \pi T (2n+1)$):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{m, m'}(\omega_n) = & \tilde{G}_{m, m'}^{(0)}(\omega_n) + \sum_{\substack{m'_1 + m'_2 = \\ = m_2 + m'}} \iint dk_1 dk_2 \int \frac{dq}{(2\pi)^2} \tilde{U}_s(q) e^{iqx(k_1 - k_2 - qy)} \times \\ & \times \varphi_{m'}(k_1) \varphi_{m_2}(k_2) \varphi_{m'_2}(k_2 + qy) \varphi_{m'_1}(k_1 - qy) \tilde{G}_{m, m'}^{(0)}(\omega_n) \times \\ & \times \int_0^\beta d\tau e^{-i\omega_n \tau} \langle \hat{b}_{m'}^+(\tau) \hat{b}_{m_2}^+(0) \hat{b}_{m'_2}(0) \hat{b}_{m'_1}(0) \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

при этом

$$\tilde{G}_{m, m'}^{(0)}(\omega_n) = \delta_{m, m'} g^{(0)}(\omega_n), \quad \tilde{G}_{m, m'}(\omega_n) = \delta_{m, m'} g_m(\omega_n).$$

Вводя стандартным образом параметр λ в потенциал взаимодействия, т. е. представив его в виде $\lambda \tilde{U}_s(q)$, можно получить следующее соотношение для термодинамического потенциала Ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{m_1 + m_2 = \\ = m'_1 + m'_2}} \iint dk_1 dk_2 \int \frac{dq}{(2\pi)^2} \tilde{U}_s(q) e^{iqx(k_1 - k_2 - qy)} \varphi_{m_1}(k_1) \varphi_{m_2}(k_2) \varphi_{m'_2}(k_2 + qy) \times \\ & \times \varphi_{m'_1}(k_1 - qy) \langle \hat{b}_{m_1}^+ \hat{b}_{m_2}^+ \hat{b}_{m'_2} b_{m'_1} \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда вытекает известное соотношение

$$\Omega = \Omega(\lambda=0) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} T \sum_{\substack{m, \omega \\ \tau=+0}} e^{i\omega \tau} g^{(0)-1}(\omega) (g_m(\omega, \lambda) - g^{(0)}(\omega)). \quad (20)$$

В выражение (19) входит полная вершинная часть при совпадающих «временах» τ

$$\langle \hat{b}_{m_1}^+ \hat{b}_{m_2}^+ \hat{b}_{m'_2} \hat{b}_{m'_1} \rangle. \quad (21)$$

Представляется весьма соблазнительным исключить из энергии системы некоторые члены в выражении для потенциала взаимодействия (14). Это исключение полностью соответствует пробной функции Лафлина, содержащей нули третьего (и более высокого) порядка по разности координат электронов. Для этой функции из энергии системы выпадает член в потенциале взаимодействия (14) с $k=0$. Легко показать, что если вершинная часть (21) устроена так, что отлична от нуля только имеющие конкретный вид выписанные ниже члены

$$\begin{aligned} \langle \hat{b}_{m_1}^+ \hat{b}_{m_2}^+ \hat{b}_{m_2+l} \hat{b}_{m_1-l} \rangle = & \langle \hat{b}_{m_1}^+ \hat{b}_{m_2}^+ \hat{b}_{m_2} \hat{b}_{m_1} \rangle \times \\ & \times (-1)^l \left[\frac{(m_2+l)! (m_1-l)!}{m_2! m_1!} \right]^{1/2} \frac{(k_0!)^2}{(k_0+l)! (k_0-l)!}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $|l| \leq k_0$, то в выражении (19) вклад в энергию системы дают только члены в потенциале (14) с $k \geq k_0$. Проще всего в этом убедиться в представлении, когда волновые функции электрона выбраны в виде (6).

Условие (22) в принципе возможно только при безразмерной плотности частиц $\nu \leq 1/(2k_0+1)$. Вид соотношений (22) позволяет сделать предположение о существовании «аномальных» корреляторов

$$\langle \hat{b}_m^+ \hat{b}_{m+l} \rangle \sim \sqrt{\frac{(m+l)!}{m!}} \frac{k_0!}{(k_0+l)!} \langle \hat{b}_m^+ \hat{b}_m \rangle. \quad (23)$$

Существенной особенностью коррелятора в левой части соотношения (23) является то, что он может быть вычислен только как матричный элемент между состояниями с разными значениями полного момента системы.

В принципе такой матричный элемент допустим, так как операторы бесконечно малых магнитных трансляций (10), с одной стороны, коммутируют с гамилтонианом системы, а с другой стороны, изменяют моменты системы. Это обстоятельство допускает вырождение энергии системы относительно величины момента системы. Однако следует еще раз подчеркнуть, что в соотношения (22) не входит в явном виде потенциал взаимодействия и они только соответствуют пробной функции Лафлина.

Если существуют «аномальные» функции Грина ($m \neq m'$)

$$\langle T_{\tau} (\delta_m(\tau) \delta_{m'}^{\dagger}(\tau')) \rangle, \quad (24)$$

то скорее всего они соответствуют некоторому типу коллективных возбуждений. Наиболее важным является вопрос о поведении этих функций в окрестности безразмерной плотности частиц $\nu=1/(2k_0+1)$. Наиболее естественной была бы непрерывность термодинамических потенциалов в этой точке. Ответы на эти вопросы выходят за рамки настоящей работы.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Laughlin R. B. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 18. P. 1395—1398.
- [2] Рашба Э. И., Тимофеев В. Б. // ФТП. 1986. Т. 20. № 6. С. 977—1024.
- [3] Бычков Ю. А., Рашба Э. И. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. № 5 (11). С. 1826—1848.
- [4] Бычков Ю. А., Рашба Э. И. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. № 1. С. 346—351.
- [5] Бычков Ю. А., Иоданский С. В., Элиашберг Г. М. // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. № 3. С. 152—155.
- [6] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 191 с.
- [7] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962. 443 с.

Институт теоретической
физики им. Л. Д. Ландау АН СССР
Черноголовка
Московская область

Поступило в Редакцию
11 января 1989 г.