УДК 537.634.2

# СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В ОДНООСНОМ СЛАБОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ С ПРОДОЛЬНОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНОЙ В ПЛОСКОСТИ БАЗИСА

*А. Ф. Кабыченков, В. Г. Шавров, А. Л. Шевченко*

Рассмотрено взаимодействие спиновых волн с продольной звуковой волной, распространяющейся в легкой плоскости одноосного слабого ферромагнетика вблизи ориентационного фазового перехода. Определены области устойчивости и неустойчивости и спектр спиновых волн в этих областях. Неустойчивость возникает, если скорость звука превышает характерную скорость спиновых волн. Показано, что усиление спиновых волн возможно в узком интервале скоростей спиновых волн вблизи скорости звука. Вычислены порог параметрического усиления спиновых волн, а также инкремент нарастания амплитуды волны. Определены поправки к скорости звука за счет взаимодействия с магнитной подсистемой.

Коллинеарные продольная звуковая и спиновая волны, распространяющиеся в легкой плоскости (ЛП) магнетика в направлении внешнего магнитного поля, линейно не связаны. Нелинейная магнитоупругая (МУ) связь возникает из-за модуляции благодаря магнитострикции эффективного поля анизотропии звуком. Если амплитуда распространяющейся в магнетике упругой волны (УВ) достаточно велика, чтобы не учитывать влияние на нее магнитной подсистемы, то нелинейное МУ взаимодействие сводится к параметрическому. Слабые возбуждения магнитной подсистемы в данном случае соответствуют спиновым волнам (СВ) в среде с заданной динамической неоднородностью и могут быть как затухающими, так и нарастающими во времени и в пространстве. Параметрическая накачка магнитной подсистемы ферромагнетика УВ в двухволновом приближении без анализа устойчивости рассматривалась в [1–3]. Устойчивость в средах с пространственно-временнóй модуляцией на основе модели индуктивно-емкостной линии без дисперсии и диссипации изучалась в [4]. Метод, развитый в [4], использовался при рассмотрении СВ в ферромагнетиках с пространственно-временнóй неоднородностью в случае устойчивости магнитной подсистемы [5]. Указанная неоднородность могла быть вызвана распространяющейся в ферромагнетике УВ.

В настоящей работе исследуется устойчивость магнитной подсистемы одноосных слабых ферромагнетиков кристаллографической группы $D_{3d}^6$ ($\alpha$-$Fe_2O_3$, $FeBO_3$, $FeF_3$, $MnCO_3$, $NiCO_3$ и др.), в плоскости базиса которых в направлении внешнего магнитного поля параллельно оси ЛП анизотропии распространяется продольная УВ большой амплитуды. Также исследуется распространение СВ в данных магнетиках. Выбор ЛП магнетиков обусловлен тем, что с уменьшением величины внешнего магнитного поля данные магнетики приближаются к точке ориентационного фазового перехода (ОФП). При этом МУ связь эффективно возрастает за счет «обменного усиления» и очень слабой ЛП анизотропии [6].

## 1. Основные уравнения

Уравнения движения магнитных моментов подрешеток и упругости получены на основе формализма Лагранжа. Решение этих уравнений будем искать в виде ряда по параметру $\varepsilon = B_{66} \sin^2 \varphi^{(0)}/u_{xx}^{(0)} c_{11} \ll 1$, который определяет влияние магнитной подсистемы на упругую. Здесь $B_{66}$, $c_{11}$ — константы магнитоупругости и упругости; $\varphi^{(0)}$ — максимальное значение азимутального угла $\varphi$ вектора антиферромагнетизма $\mathbf{L}$; $u_{xx}^{(0)}$ — амплитуда упругих деформаций. В нулевом приближении по $\varepsilon$ система МУ уравнений имеет решение в виде несвязанных УВ и СВ. В первом приближении при $ak^2 \ll e$ ($a$, $e$ — константы неоднородного и однородного обмена; $k$ — волновое число) и без учета переменных магнитных полей уравнение для $\varphi$ имеет вид

$$\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} - s^2 \Delta\varphi + (\omega_H^2 + \mu u_{xx} \cos \varphi) \sin \varphi = 0. \tag{1}$$

Здесь $R$ — параметр затухания; $s^2 = a' g^2 M_0^2 e/4$; $a'$ — константа неоднородного обмена; $M_0$ — величина магнитного момента подрешеток; $g$ — гиромагнитное отношение; $\mu = B_{66} g^2 e/2$; $u_{xx} = u_{xx}^{(0)} \cos \xi_0$ — деформации, обусловленные УВ; $\xi_0 = k_0 x - \omega_0 t$; $k_0$, $\omega_0$ — волновое число и частота УВ; $\omega_H^2 = (h_x \psi_0 + 14 b_1) g^2 M_0^2 e/2$; $\psi_0 = d/e$ — щель в спектре низкочастотных СВ; $d$, $b_1$ — константы Дзялошинского и ЛП анизотропии; $h_x = H_0/M_0$; $H_0$ — постоянное внешнее магнитное поле. Уравнение (1) справедливо при малом выходе векторов магнитных моментов подрешеток $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ из плоскости базиса и их слабой неколлинеарности. Эти условия выполняются вдали от точек ОФП типа «легкая ось—легкая плоскость» и при $h_x \ll d \ll e$. Численные оценки показывают, что для типичных ЛП магнетиков данные условия (наряду с условием $\varepsilon \ll 1$) могут быть легко реализованы в эксперименте. Уравнения движения для углов, характеризующих выход $\mathbf{L}$ из плоскости базиса и подсгиб векторов $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$, имеют аналогичный (1) вид. Частоты колебаний, соответствующие этим углам, на несколько порядков больше щели в спектре колебаний $\varphi$. Поэтому наиболее эффективно с УВ будут взаимодействовать низкочастотные СВ.

## 2. Устойчивость магнитной подсистемы

Исследуем устойчивость основного состояния $\varphi_0 = 0$. Для этого рассмотрим малые колебания $\varphi$, которые описываются лианеризованным уравнением (1). Эти колебания можно представить в виде суперпозиции собственных волн. Поскольку УВ создает периодическую пространственно-временную неоднородность, то собственные волны намагниченности будут описываться блоховскими функциями вида

$$\varphi_{\omega\mathbf{k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{\omega\mathbf{k}n} \exp\{i[(\omega + n\omega_0)t - (\mathbf{k} + n\mathbf{k}_0)\mathbf{r}]\}, \tag{2}$$

где $\varphi_{\omega\mathbf{k}n} \equiv \varphi_n$ — амплитуда $n$-й гармоники, $\mathbf{k}_0 = (\mathrm{k}_0, 0, 0)$. Подставляя (2) в лианеризованное уравнение (1), получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$a_n \varphi_n + \lambda(\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}) = 0, \tag{3}$$

где $a_n = -(\tilde{\Omega} + n)^2 + \nu^2(\varkappa + n\varkappa_0)^2 + \Omega_H^2 - \rho^2/4$, $\tilde{\Omega} = \Omega - i\rho/2$, $\Omega = \omega/\omega_0$, $\rho = R/\omega_0 \geqslant 0$, $\nu = s/v_0$, $v_0 = \omega_0/k_0$, $\varkappa = \mathbf{k}/k_0$, $\Omega_H = \omega_H/\omega_0$, $\lambda = B_{66} e u_{xx}^{(0)}/2M_0^2$ — параметр МУ связи. Из (3) находим дисперсионное уравнение

$$D(\Omega, \varkappa) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{n-1} & \lambda & 0 & \cdot \\ \cdot & \lambda & a_n & \lambda & \cdot \\ \cdot & 0 & \lambda & a_{n+1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = a_n - \frac{\lambda^2}{[a_{n-1}]} - \frac{\lambda^2}{[a_{n+1}]} = 0 \tag{4}$$

и соотношение между амплитудами гармоник

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n\mp1}}=-\frac{\lambda}{a_n-\lambda^2/[a_{n\pm1}]}=-\frac{[a_{n\mp1}]}{\lambda},\qquad \frac{\varphi_n}{\varphi_0}=\frac{\varphi_n}{\varphi_{n\mp1}}\frac{\varphi_{n\mp1}}{\varphi_{n\mp2}}\cdots\frac{\varphi_{\pm1}}{\varphi_0},\tag{5}$$

где $[a_{n\pm1}]\doteq a_{n\pm1}-\lambda^2/(a_{n\pm2}-\lambda^2/\ldots)$ — цепные дроби, а верхний и нижний знаки берутся соответственно при $n\gtrless 0$. Выражения (2), (4), (5) характеризуют в целом собственные волны магнитной подсистемы. Соотношение (4) неявно определяет зависимость $\Omega(\varkappa)$ или $\varkappa(\Omega)$. Из свойств блоховской функции следует $\omega(\mathbf{k})=\omega(\mathbf{k}+n\mathbf{k}_0)-n\omega_0$ и $\omega(\mathbf{k})\doteq-\omega^*(-\mathbf{k}^*)$, а также $\mathbf{k}(\omega)=\mathbf{k}(\omega+n\omega_0)-n\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}(\omega)=-\mathbf{k}^*(-\omega^*)$. При одновременном смещении $\omega$ на $n\omega_0$ и $\mathbf{k}$ на $n\mathbf{k}_0$ дисперсионные характеристики совмещаются с исходными. Поэтому достаточно исследовать спектр колебаний намагниченности в первой зоне Бриллюэна — полосе, ограниченной плоскостями, нормальными к дисперсионной прямой УВ и проходящими, например, через начало координат и точку ($\Omega=1$, $\varkappa_x=1$) [7]. Если для всех действительных $\varkappa$ и комплексных $\Omega$, удовлетворяющих (4), $\operatorname{Im}\Omega=\Omega''\geqslant 0$, то магнитная подсистема устойчива. Если же существуют действительные $\varkappa$ и комплексные $\Omega$ с $\Omega''<0$, удовлетворяющие (4), то состояние $\varphi_0=0$ неустойчиво. Амплитуда волн (2) нарастает со временем. При $\lambda\ll 1$ дисперсионное уравнение (4) можно представить в виде ряда по $\lambda^2$

$$D(\Omega,\varkappa)=\prod_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left\{1-\lambda^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m^{-1}a_{m+1}^{-1}\left[1-\lambda^2\sum_{l=-\infty}^{\infty}a_{m+l}^{-1}a_{m+l+1}^{-1}(1-\ldots)\right]\right\}=0.\tag{6}$$

В нулевом приближении по $\lambda^2$ из (6) получаем опорный спектр в виде набора дисперсионных поверхностей (кривых при $\varkappa_\perp^2\doteq\varkappa_y^2+\varkappa_z^2=0$) невзаимодействующих гармоник

$$\tilde\Omega_n=-n\pm[\nu^2(\varkappa_x+n)^2+\nu^2\varkappa_\perp^2+\Omega_H^2-\rho^2/4]^{1/2},\tag{7}$$

знаки «$\pm$» соответствуют верхней и нижней поверхностям, соединенным вертикальной линией. Инкремент затухания гармоник $\Omega_n''=\rho/2>0$. Все гармоники получаются из нулевой путем смещения последней вдоль дисперсионной прямой УВ на расстояние $nk_0(1+v_0^2)^{1/2}$. Опорные поверхности (7) с индексами $n$ и $n+l$ пересекаются по линиям синхронизма

$$\tilde\Omega_{n,\,n+l}=-n-\frac{1}{2}l\pm\nu Q_l^{1/2},\qquad \varkappa_{xn,\,n+l}=-n-\frac{1}{2}l\pm\nu^{-1}Q_l^{1/2},\tag{8}$$

где

$$Q_l\equiv Q_{n,\,n+l}=l^2/4+(\Omega_H^2+\nu^2\varkappa_{\perp,\,l}^2-\rho^2/4)(\nu^2-1)^{-1}>0,\qquad \varkappa_{\perp,\,l}\equiv\varkappa_{\perp,\,n,\,n+l}.$$

Будем считать, что $\Omega_H^2\ll\rho^2/4$. В случае $\nu^2>1$ всегда $Q_l>0$ и, следовательно, пересекаются все поверхности (7). Пересечение происходит только между верхними и только между нижними дисперсионными поверхностями по линиям типа парабол (соответственно знаки «$\pm$» в (8)). В случае $\nu^2<1$ пересекаются между собой только верхние и нижние дисперсионные поверхности $(n+l)$-й и $n$-й гармоник при условии $\nu^2<[l^2-4\Omega_H^2]/[l^2+4\varkappa_{\perp,l}^2]$. Пересечение происходит по линиям типа эллипса. При $Q_l=0$ эллипс стягивается в точку. Рассмотренное приближение справедливо вдали от линий пересечения гармоник, когда $\lambda^2a_n^{-1}a_{n+l}^{-1}\ll 1$. Здесь амплитуда волны (2) не увеличивается. Вблизи линий синхронизма $\lambda^2a_n^{-1}a_{n+l}^{-1}\sim 1$ и дисперсионные зависимости отклоняются от (7).

В окрестности линий пересечения дисперсионных поверхностей соседних гармоник из (8) с точностью до $\lambda^2$ получаем

$$\Delta\Omega_\pm=\mathrm{v}_{-1}^{(+)}\Delta\varkappa\pm[(\mathrm{v}_{-1}^{(-)}\Delta\varkappa)^2+\Lambda]^{1/2}+i(\rho/2).\tag{9}$$

Здесь $\Delta\Omega=\Omega-\Omega_{n,\,n-1}$, $\Delta\varkappa=\varkappa-\varkappa_{n,\,n-1}$, причем $\Delta\Omega\ll 2\Omega_{n,\,n-1}$, $2(\Omega_{n,\,n-1}-1)$, а $\Delta\varkappa^2\ll 2\Delta\varkappa\varkappa_{n,\,n-1}$, $2\Delta\varkappa(\varkappa_{n,\,n-1}-\varkappa_0)$; $\mathrm{v}_{n+l}=\nu^2[\varkappa_{n,\,n+l}+(n+l)\varkappa_0](\Omega_{n,\,n+l}+$

$+n+l)^{-1}$ — групповые скорости гармоник в точке синхронизма; $\mathbf{v}_l^{(\pm)} = (\mathbf{v}_n \pm \mathbf{v}_{n+l})/2$, причем здесь $l=-1$; $\Lambda = \lambda^2/[4(\Omega_{n,n-1}+n)(\Omega_{n,n-1}+n-1)] = \lambda^2/(4\nu^2 Q_{-1}-1)$ — параметр связи гармоник. Из (9) видно, что взаимодействие между гармониками распространяется на область $\Delta\Omega$, $|\Delta\varkappa| \sim \Lambda^{1/2}$. Эта область расширяется с увеличением $\lambda$ и уменьшением $\varkappa_\perp$. При $\nu^2 > 1$ действительным $\Delta\varkappa$ соответствуют комплексные $\Delta\Omega$ с $\Delta\Omega'' = \rho/2 \geqslant 0$. С ростом $|l|$ взаимодействие гармоник ослабевает. Следовательно, амплитуда волн (2) с $\Omega$ и $\varkappa$, близкими к линиям синхронизма, также не увеличивается. Таким образом, при $\nu^2 > 1$ магнитная подсистема устойчива.

При $\nu^2 < 1$ действительным $\Delta\varkappa$, для которых $|\pm\nu(1-\nu^2)Q_{-1}^{1/2}\Delta\varkappa_x + \nu^2\varkappa_{\perp,-1}\Delta\varkappa_\perp| < \lambda(1-4\nu^2 Q_{-1})^{1/2}$, соответствуют комплексные $\Delta\Omega$ с

$$\Delta\Omega'_\pm = \mathbf{v}_{-1}^{(+)}\Delta\varkappa, \qquad \Delta\Omega''_\pm = {}^1/_2\,\rho \pm [-(\mathbf{v}_{-1}^{(-)}\Delta\varkappa)^2 - \Lambda]^{1/2}. \tag{10}$$

Вне указанного интервала $\Delta\Omega''_\pm = \rho/2$, а $\Delta\Omega'_\pm$ определяется первыми двумя членами в (9). Из (10) следует, что магнитная подсистема будет неустойчива ($\Delta\Omega''_- < 0$), если $|\Lambda|$ превышает пороговое значение

$$|\Lambda_п| = {}^1/_4\,\rho^2 + (\mathbf{v}_{-1}^{(-)}\Delta\varkappa)^2. \tag{11}$$

С приближением к линиям синхронизма порог уменьшается. На самих линиях $\lambda_п = (1-4\nu^2 Q)^{1/2}\,\rho/2$ и определяется главным образом диссипацией. В отсутствие диссипации $\lambda_п = 0$. Используя (11), инкремент нарастания амплитуды волны можно записать в виде

$$\Delta\Omega'' = \rho/2 - [\rho^2/4 - \Lambda + \Lambda_п]^{1/2}. \tag{12}$$

Величина инкремента растет с превышением порога. Вблизи порога при условии $\Lambda_п - \Lambda \ll \rho^2/4$ величина $\Delta\Omega'' \simeq -(\Lambda_п - \Lambda)/\rho$. Вдали от порога при выполнении обратного неравенства величина $\Delta\Omega'' \simeq -(\Lambda_п - \Lambda)^{1/2}$.

Если соседние гармоники не взаимодействуют ($\nu^2 > [1-4(\Omega_H^2 - \rho^2/4)]/[1+4\varkappa_{\perp n,\,n-1}^2]$), то неустойчивость магнитной подсистемы будет определяться линией синхронизма с минимальным значением $|l| > 1$. При $\nu^2 \to 1$ это значение растет. В окрестности линий пересечения гармоник с $|l| > 1$ из (6) при тех же предположениях, что и в (9), получаем аналогичное (9) соотношение

$$\Delta_l\Omega_\pm = \mathbf{v}_l^{(+)}\Delta_l\varkappa \pm [(\mathbf{v}_l^{(-)}\Delta_l\varkappa)^2 + \Lambda_l]^{1/2} + i\,(\rho/2). \tag{13}$$

Здесь

$$\Delta_l\varkappa = \varkappa - (\varkappa_{n,\,n+l} + \varkappa_c), \qquad \varkappa_c = \lambda^2[\pm(1-\nu^2)Q_l^{1/2}\mathbf{i} + \nu\varkappa_{\perp,\,l}]\{\nu(1-\nu^2)(l^2-1)[(1-\nu^2)^2 Q_l + \nu^2\varkappa_{\perp,\,l}^2]\}^{-1},$$

знаки «$\pm$» соответствуют знакам в (8),

$$\Delta_l\Omega = \Omega - (\Omega_{n,\,n+l} + \Omega_c), \qquad \Omega_c = \nu^2\varkappa_{cx}, \qquad \Lambda_l = 4\lambda^4/[(4\nu^2 Q_l - l^2)(\nu^2-1)^2(l^2-1)^2].$$

Из (13) видно, что гармоники с $|l| > 1$ взаимодействуют слабее, чем соседние. Значение величин $\Delta_l\Omega$, $|\Delta_l\varkappa| \sim \Lambda_l^{1/2} \sim \lambda^2/(l^2-1)^2$. Взаимодействие уменьшается с ростом $l$. При $\nu^2 < 1$ действительным $\Delta_l\varkappa$, удовлетворяющим условию $|\pm\nu(1-\nu^2)Q_l^{1/2}(\Delta_l\varkappa)_x + \nu^2\varkappa_{\perp,\,l}(\Delta_l\varkappa)_\perp| < \lambda^2(l^2-4\nu^2 Q_l)^{1/2}/[|l|(1-\nu^2)(l^2-1)]$, соответствуют комплексные $\Delta_l\Omega$ с $\Delta_l\Omega'' < 0$, если $\lambda$ превышает пороговое значение

$$\lambda_{пl} = \{{}^1/_4(l^2-4\nu^2 Q_l)(l^2-1)^2(\nu^2-1)^2({}^1/_4\,\rho^2 + (\mathbf{v}_l^{(-)}\Delta_l\varkappa)^2)\}^{1/4}. \tag{14}$$

Порог растет с увеличением $l^2$. В отличие от взаимодействия соседних гармоник здесь при $\Delta_l\varkappa = 0$ величина $\lambda_{пl} \sim \rho^{1/2}$. В отсутствие диссипации $\lambda_{пl} = 0$. Дисперсия и инкремент изменения амплитуды волны определяются формулами (10), (12), в которых необходимо заменить $\Delta\Omega$, $\Delta\varkappa$, $\mathbf{v}_{-1}^{(\pm)}$, $\Lambda$ соответственно на $\Delta_l\Omega$, $\Delta_l\varkappa$, $\mathbf{v}_l^{(\pm)}$, $\Lambda_l$. Таким образом, при $\nu^2 < 1$ магнитная подсистема неустойчива, если упругие деформации превышают пороговое значение. В бездиссипативной среде порог отсутствует.

Выше рассматривались собственные волны (2). Рост со временем этих волн означает неустойчивость магнитной подсистемы относительно флуктуаций в виде блоховских волн. Однако вероятность возникновения таких неограниченных в пространстве флуктуаций бесконечно мала. Поэтому необходимо исследовать устойчивость магнитной подсистемы относительно ограниченных в пространстве возмущений. Эти возмущения можно разложить по собственным функциям (2) и рассматривать как волновой пакет из блоховских функций. При этом условия устойчивости останутся прежними. Однако поведение волнового пакета в случае неустойчивости может быть различным. Локализованное в начальный момент времени возмущение может распространяться на все пространство, и амплитуда $\varphi$ в каждой точке будет расти. Это соответствует абсолютной неустойчивости. В данном случае магнитная подсистема переходит в новое состояние. Для определения этого состояния необходимо решать нелинейное уравнение (1). В другом случае локализованное возмущение, нарастая во времени, может сноситься в пространстве настолько быстро, что амплитуда $\varphi$ в фиксированной точке во времени не увеличивается. Это соответствует конвективной неустойчивости. В данном состоянии флуктуации намагниченности усиливаются.

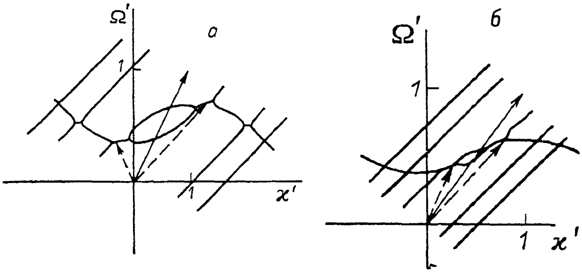


Рис. 1. Качественное изображение дисперсионных зависимостей в первой зоне Бриллюэна для $|n| \leqslant 3$, $\varkappa_\perp = 0$ и векторные диаграммы взаимодействия упругих и спиновых волн в случае абсолютной (*а*) и конвективной (*б*) неустойчивости.

Сплошные стрелки определяют фазовую скорость УВ, а штриховые — фазовые скорости СВ.

Для определения типа неустойчивости воспользуемся критериями, описанными в [8]. Асимптотическое поведение начального возмущения определяется особыми точками, в которых два корня $\varkappa(\Omega)$ дисперсионного уравнения (4) сливаются. Указанные особые точки расположены в окрестности линий синхронизма. Выразим из (9) $\Delta\varkappa_x$ как функцию $\Delta\Omega$, рассматривая $\Delta\varkappa_\perp$ в качестве параметра

$$(\Delta\varkappa_x)_\pm = \bar{v}_{-1}^{(+)}\Delta\tilde{\Omega} - \mathbf{e}_{-1}^{(+)}\Delta\varkappa_\perp \pm [(\bar{v}_{-1}^{(-)}\Delta\tilde{\Omega} - \mathbf{e}_{-1}^{(-)}\Delta\varkappa_\perp)^2 + \Lambda/v_{-1}^{(\text{п})}]^{1/2}. \tag{15}$$

Здесь

$\bar{v}_l^{(\pm)} = (v_{x,n}^{-1} \pm v_{x,n+l}^{-1})/2$, $\mathbf{e}_l^{(\pm)} = (v_{x,n}^{-1}\mathbf{v}_{\perp,n} \pm v_{x,n+l}^{-1}\mathbf{v}_{\perp,n+l})/2$, $v_l^{(\text{п})} = v_{x,n}v_{x,n+l}$, $l=-1$.

При $|\Delta\Omega| \to \infty$ корень $(\Delta\varkappa_x)_+ \to \Delta\Omega/v_{x,n}$, а $(\Delta\varkappa_x)_- \to \Delta\Omega/v_{x,n-1}$. В случае $v_{x,n}v_{x,n-1} < 0$ эти корни лежат в разных полуплоскостях. При увеличении $\Delta\Omega''$ корни сливаются в особой точке $\Delta\Omega_B = i\rho/2 - i2(\Lambda v_{x,n}v_{x,n-1})^{1/2}/|v_{x,n} - v_{x,n-1}|$. Эта точка расположена в нижней полуплоскости, если $\rho^2 < \lambda^2(4Q_{-1} - \nu^2)/[Q_{-1}(1-\nu^2)^2]$. Поскольку изменение $\varphi$ при $t \to \infty$ определяется $\Delta\Omega_B$, то в данном случае $\varphi$ будет неограниченно нарастать со временем (абсолютная неустойчивость). Спектр колебаний намагниченности в данном случае приведен на рис. 1, *а*. УВ распадается на две СВ с $x$-компонентами скоростей разных знаков. Из приведенного условия получим область магнитных полей и звуковых частот, соответствующих абсолютной неустойчивости $\Omega_H^2 < \{(1-\nu^2)[1-\nu^2/(1-\rho^2(1-\nu^2)^2/4\lambda^2)]/4\} - \nu^2\varkappa_{1,-1}^2$. Если приведенное неравенство не выполняется, необходимо рассматривать линии синхронизма с $|l| > 1$, но только те, для которых $\lambda > \lambda_{\text{п}l}$. Перепишем (13) в виде

$$(\Delta_l\varkappa_x)_\pm = \bar{v}_l^{(+)}\Delta_l\tilde{\Omega} - \mathbf{e}_l^{(+)}\Delta_l\varkappa_\perp \pm [(\bar{v}_l^{(-)}\Delta_l\tilde{\Omega} - \mathbf{e}_l^{(-)}\Delta_l\varkappa_\perp)^2 + \Delta_l/v_l^{(\text{п})}]^{1/2}. \tag{16}$$

Анализируя (16) таким же образом, как и (15), находим, что магнитная подсистема абсолютно неустойчива, если существует $l$ из указанных выше, для которого выполняется неравенство $\rho^2 < 4\lambda^4 (4Q_l - \nu^2 l^2)/[l^2 (l^2 - 1)^2 (1-\nu^2)^4 Q_l]$. Необходимым условием для этого является $v_{x,n} v_{x,\,n+l} < 0$, т. е. взаимодействующие активные гармоники ($\lambda_{\text{п}l} < \lambda$) должны иметь $x$-компоненты скоростей разных знаков. Таким образом, область магнитных полей и звуковых частот, соответствующих абсолютной неустойчивости, определяется соотношением

$$\Omega_H^2 < (l^2 (1-\nu^2)/4) [1 - \nu^2 (1 - \rho^2 l^2 (l^2 - 1)^2 (1-\nu^2)^4/16\lambda^4)^{-1}] - \nu^2 \varkappa_{\perp,\,-1}^2.$$

Если указанные неравенства не выполняются для всех $l$, которым соответствуют $\lambda_{\text{п}l} < \lambda$, то магнитная подсистема конвективно неустойчива. В частном случае $\lambda_{\text{п}} < \lambda < \lambda_{\text{п}2}$, что приближенно соответствует условию $\rho/2 < \lambda < \rho^{1/3} (1-\nu^2)^{3/4}$, магнитная подсистема конвективно неустойчива в диапазоне $(1-\nu^2)/4 - \nu^2 \varkappa_{\perp,\,-1}^2 < \Omega_H^2 < \{1 - \nu^2 [1 - \rho^2 (1-\nu^2)^2/4\lambda^2]^{-1}\}(1-\nu^2)/4 - \nu^2 \varkappa_{\perp,\,-1}^2$. С уменьшением $\lambda$ этот диапазон растет. Достаточным условием конвективной неустойчивости является $v_{x,\,n} v_{x,\,n+l} > 0$. В параметрически возбуждаемой системе это условие выполняется благодаря дисперсии. Соответствующий спектр приведен на рис. 1, *б*. В данном случае УВ распадается на две СВ с $x$-компонентами скоростей одного знака. В отсутствие диссипации $\lambda_{\text{п}} = \lambda_{\text{п}l} = 0$ и всегда существует $l$ такое, что $v_{x,\,n} v_{x,\,n+l} < 0$, и, следовательно, система абсолютно неустойчива. Конвективная неустойчивость при параметрическом возбуждении может существовать только в системах с дисперсией и диссипацией.

Приведем численные оценки. В гематите $\alpha$-$Fe_2O_3$ величина $s \simeq 3 \times 10^6$ см/с, а скорость УВ $v_0 \simeq 7 \cdot 10^5$ см/с [9], соответственно $\nu \simeq 4.3$. Следовательно, магнитная подсистема не возбуждается УВ. В $MnCO_3$ величина $s \simeq 1.5 \cdot 10^5$ см/с, а $v_0 \simeq 5 \cdot 10^5$ см/с [10, 11], следовательно, $\nu \simeq 0.3$. Ширина линии АФМР $\Delta H \simeq 10^2$ Э, а $M_0 \simeq 500$ Э, при этом $\rho \simeq 0.2$. Неустойчивость обусловлена только соседними гармониками, если $0.1 < \lambda < 0.5$. Полагая $\lambda \simeq 0.11$, получаем область конвективной неустойчивости $0.17 < \Omega_H^2 < 0.23$. В области $\Omega_H^2 < 0.17$ магнитная подсистема абсолютно неустойчива.

Приведенное выше рассмотрение относится к случаю $\lambda \ll 1$. Однако критерии устойчивости не изменяются и при $\lambda \lesssim 1$. Подробно дисперсионные зависимости при $\lambda \lesssim 1$ могут быть легко исследованы численно, поскольку цепные дроби в (4) и (5) быстро сходятся. Для более точного учета $\Delta\varkappa_\perp$ при $\varkappa_{\perp,\,l} \to 0$ в приведенных формулах необходимо заменить $\varkappa_{\perp,\,l}$ на $\varkappa_{\perp,\,l} + \Delta\varkappa_\perp/2$. Влияние диссипации на спектр можно учесть заменой в полученных выражениях $\Omega_H^2$ на $\Omega_H^2 - \rho^2/4$.

## 3. Распространение спиновых волн

Рассмотрим теперь граничную задачу о распространении СВ в присутствии УВ. Такая задача имеет смысл только для устойчивой или конвективно неустойчивой магнитной подсистемы. В данном случае $\omega$ действительная и задается внешним источником. Вдали от линий синхронизма дисперсионная зависимость и инкремент затухания определяются соотношениями

$$\varkappa'_{x\pm} = -n \pm \frac{1}{\nu\sqrt{2}} (\sqrt{B^2 + C^2} + B)^{1/2}, \qquad \varkappa''_{x\pm} = \pm \frac{1}{\nu\sqrt{2}} (\sqrt{B^2 + C^2} - B)^{1/2}, \tag{17}$$

где $B = (\Omega + n)^2 - \nu^2 \varkappa_\perp^2 - \Omega_H^2$, $C = -\rho\,(\Omega + n)$. Знак $\varkappa''_x$ выбирается из условия затухания волны, поскольку, как было показано выше, в рассматриваемых областях амплитуда волн не может увеличиваться. Вблизи линий пересечения дисперсионных поверхностей соседних гармоник на основании (15) имеем

$$(\Delta\varkappa'_x)_\pm = \bar{v}_{-1}^{(+)} \Delta\Omega - \mathrm{e}_{-1}^{(+)} \Delta\varkappa_\perp \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{b^2 + c^2} + b)^{1/2}, \tag{18a}$$

$$(\Delta\varkappa''_x)_\pm = -\frac{1}{2}\bar{v}^{(+)}_{-1}\rho \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{b^2+c^2}-b\right)^{1/2}, \tag{18б}$$

де

$$b = (\bar{v}^{(-)}_{-1}\Delta\Omega - e^{(-)}_{-1}\Delta\varkappa_\perp)^2 - (\bar{v}^{(-)}_{-1}\rho/2)^2 + \Lambda/v^{(п)}_{-1}, \quad c = -\rho\bar{v}^{(-)}_{-1}(\bar{v}^{(-)}_{-1}\Delta\Omega - e^{(-)}_{-1}\Delta\varkappa_\perp).$$

Если $b > 0$, то, как видно из (18), ветви гармоник расталкиваются, ι затухание обусловлено исключительно диссипацией. В отсутствие дис- ипации СВ распространяются без затухания. Условие расталкивания етвей можно записать в виде $\rho^2 < \lambda^2(4Q_{-1}-\nu^2)/(Q_{-1}(1-\nu^2)^2)$. В устойчи- ой подсистеме это условие выполняется только при $\Lambda > 0$ и $v_{x,n}v_{x,n-1} > 0$. Последнее неравенство указывает на то, что гармоники должны иметь $x$- омпоненты скоростей одного знака. В данном случае СВ рассеиваются на УВ без изменения знака $x$-компоненты фазовой скорости. Соответствующие исперсионные зависимости изображены на рис. 2, *а*.

Все СВ можно разделить на быстрые и медленные. Фазовая скорость ыстрых СВ больше скорости УВ, а медленных меньше. Такое различие возникает из-за того, что в присутствии УВ распространение СВ в положительном и отрицательном направлениях оси $X$ становится неэквивалентным. Энергия медленных СВ положительная в устойчивой подсистеме и отрицательная в неустойчивой подсистеме [12].

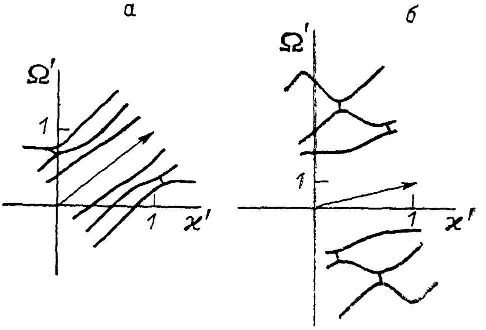


Рис. 2. Качественное изображение дисперсионных зависимостей в первой зоне Бриллюэна для $|n| \leqslant 3$, $\varkappa_\perp=0$ в случае расталкивания ветвей (*а*) и непропускания (*б*).

Если $b < 0$, то ветви $(\Delta\varkappa')_\pm$ сливаются, а инкремент изменения амплитуды волны определяется не только диссипацией, но и взаимодействием гармоник. Данное условие выполняется в интервале частот $\Delta\Omega^2 < \rho^2/4 - \lambda^2(4Q_{-1}-\nu^2)/[Q_{-1}(1-\nu^2)^2]$. В случае устойчивости в указанном интервале СВ сильно затухают. Имеет место непропускание. Дополнительное к диссипации затухание обусловлено брэгговским отражением. При $\nu^2 > 1$ значение $\Lambda > 0$ и, следовательно, достаточным условием непропускания является взаимодействие гармоник вблизи точек синхронизма с $x$-компонентами скоростей разных знаков ($v_{x,n}v_{x,n-1} < 0$ или $4\Omega_H^2 < (1-\nu^2)^2 - 4\nu^2\varkappa^2_{\perp,-1}$). Затухание за счет брэгговского отражения преобладает над диссипативным затуханием в случае $\lambda > \rho\,|\nu^2-1|/2$. Соответствующий спектр приведен на рис. 2, *б*. В данном случае СВ рассеиваются на УВ с изменением знака $x$-компоненты фазовой скорости на противоположный.

В конвективно-неустойчивой подсистеме возможно усиление СВ. Для определения условий усиления обратимся к выражению (15). При $\Delta\Omega'' \to -\infty$ корни $(\Delta\varkappa_x)_\pm$ будут лежать в одной полуплоскости, если $v_{x,n}v_{x,n-1} > 0$. В случае $v_{x,n}$, $v_{x,n-1} > 0$ эти корни лежат в нижней полуплоскости. При $\Delta\Omega''=0$ корни комплексно сопряжены, причем корень $(\Delta\varkappa_x)_+$ переходит из нижней полуплоскости в верхнюю. Следовательно, усиливаться будут СВ, распространяющиеся в направлении УВ [8]. Кроме того, необходимо, чтобы $|\Lambda|$ превышал пороговое значение

$$|\Lambda_п| = \frac{1}{4}\rho^2 + \left(\frac{\bar{v}^{(-)}_{-1}}{\bar{v}^{(+)}_{-1}}\Delta\Omega + \frac{e^{(-)}_{-1}}{\bar{v}^{(+)}_{-1}}\Delta\varkappa_\perp\right)^2. \tag{19}$$

Величина порога уменьшается при $\Delta\Omega$, $\varkappa_{\perp,-1} \to 0$ и при $\nu^2 \to 1-2\Omega_H$. Минимальное значение $\lambda_{п\,min} = \rho\,[\Omega_H(1-\Omega_H)]^{1/2}$, причем $\Omega_H < 1/2$. Вблизи порога из (18б) с учетом (19) инкремент нарастания амплитуды волны можно выразить в виде

$$\Delta \varkappa_x'' = -v_{x,-1}^{(+)} (\Lambda - \Lambda_{\text{п}}) / [v_{-1}^{(\text{п})} \rho^2 - 4 (v_{x,-1}^{(-)})^2 \Lambda_{\text{п}}]. \tag{20}$$

С превышением $|\Lambda|$ над порогом инкремент линейно растет. Вдали от порога $\Delta \varkappa_x'' \sim (\Lambda_{\text{п}} - \Lambda)^{1/2}$.

Если выразить из (15) $\Delta \varkappa_{\perp}$ как функцию $\Delta \Omega$ и рассматривать $\Delta \boldsymbol{\varkappa}_{\perp}$ в качестве параметра, то видно, что в отсутствие диссипации и при $\Delta \varkappa_x = 0$ действительным $\Delta \Omega$ соответствуют действительные $\Delta \boldsymbol{\varkappa}_{\perp}$. Следовательно, СВ, распространяющиеся нормально по отношению к УВ, не усиливаются.

Дисперсионные зависимости и инкремент изменения амплитуды СВ в окрестности линий синхронизма с $|l| > 1$ будут описываться, как видно из сравнения (15) и (16), соотношениями (18)—(20) с заменой в них $\Delta \varkappa_x$, $\Delta \boldsymbol{\varkappa}_{\perp,-1}$, $\Delta \Omega$, $\mathbf{v}_{-1}^{(\pm)}$, $\Lambda$ соответственно на $\Delta_l \varkappa_x$, $\Delta \boldsymbol{\varkappa}_{\perp, l}$, $\Delta_l \Omega$, $\mathbf{v}_l^{(\pm)}$, $\Lambda_l$. Если $b_l > 0$, то гармоники расталкиваются. Это условие может выполняться только в устойчивой подсистеме при $\Lambda_l > 0$ и $v_{x,n} v_{x,n+l} > 0$. Если же $b_l < 0$, то в случае устойчивости магнитной подсистемы имеет место непропускание, а в случае конвективной неустойчивости — усиление СВ. При фиксированной частоте будут возбуждаться все гармоники. Соотношение между амплитудами гармоник определяется выражением (5).

Приведем численные оценки. В гематите $\Delta H \simeq 10^2$ Э, $M_0 \simeq 10^3$ Э соответственно $\rho \simeq 0.1$. Ветви гармоник расталкиваются при $\Omega_H \gtrsim 8$ и $\lambda > 1$. Эти условия при $d \simeq 10$, $e \simeq 10^4$, $H_0 \simeq 20$ Э, $B_{66} \simeq 10^7$ эрг/см$^3$ записываются в виде $\omega_0 \lesssim 10^8$ с$^{-1}$, $u_{xx}^{(0)} > 10^{-5}$. Непропускание имеет место при $\Omega_H \lesssim 8$, $\omega_0 \gtrsim 10^8$ с$^{-1}$. Брэгговское отражение эффективно при $u_{xx}^{(0)} > 10^{-5}$. В $MnCO_3$ величина порога $u_{xx\,\text{п}}^{(0)} \simeq 10^{-6}$, а инкремент нарастания СВ вблизи порога $\Delta k'' \simeq 10$.

Рассмотрим обратное влияние магнитной подсистемы на упругую. Анализ уравнений магнитоупругости показывает, что магнитная подсистема действует на упругую как вынуждающая сила с компонентами вида $\cos (n+m) \xi_0$, $\sin (n+m) \xi_0$, $\cos \xi$, $\cos 2\xi$, где $\xi = \omega t - kx$, а также производными от этих компонент с фазами, равными полусумме и полуразности. Резонансные компоненты вида $\cos \xi_0$ приводят к изменению скорости волны накачки. Ограничиваясь членами порядка $\lambda$ (гармоники $\varphi_0$, $\varphi_{\pm}$), скорость продольной волны с учетом МУ связи можно представить в виде

$$v^2 = v_0^2 - \frac{\lambda B_{66} \varphi_0^2}{\rho u_{xx}^{(0)}} (\operatorname{Re} a_{-1}^{-1}). \tag{21}$$

Поправки к $v_0$ возрастают в точках синхронизма. Так, в случае расталкивания ветвей в точке ($n=0$, $m=-1$) относительное изменение скорости равно $\Delta v / v_0 = \pm B_{66} \varphi_0^2 (4\nu^2 Q - 1)^{1/2} / 4 \rho v_0^2 u_{xx}^{(0)} (1/2 + \nu Q^{1/2})$. В данном случае СВ верхней ветви ускоряет УВ, а СВ нижней ветви замедляет ее. Для гематита при $u_{xx}^{(0)} \simeq 10^{-6}$, $Q \simeq 1/2$ находим $\Delta v / v_0 \simeq \pm 10 \varphi_0^2$ и при $\varphi_0 \simeq 10^{-2}$ величина $\Delta v / v_0 \simeq \pm 10^{-3}$. Следовательно, СВ слабо влияют на скорость УВ. Амплитуда поперечной УВ $u_{xy}^{(0)} = B_{66} \varphi_0 / (\rho\, \omega^2 - c_{66} k^2) \sim \varphi_0$.

## 4. Обсуждение результатов

Колебания намагниченности при распространении УВ поперек магнитного поля описываются уравнением (1) с заменой $h_x$ на $h_y$. Поэтому полученные результаты остаются справедливыми и для данного случая. Влияние переменных магнитных полей рассмотрено в Приложении. При распространении СВ вдоль постоянного магнитного поля размагничивание слабо влияет на спектр СВ. Аналогичное (1) уравнение получается и при взаимодействии магнитной подсистемы с электромагнитной волной, имеющей компоненту магнитного поля, параллельную постоянному магнитному полю. Следовательно, полученные выше результаты с точностью до переобозначений относятся и к данному случаю. Вследствие того что скорость электромагнитной волны значительно превышает скорость СВ, область конвективной неустойчивости будет очень узкой. Возможно, это одна из причин, по которой наблюдать усиление СВ электромагнитной волной чрезвычайно трудно. Наиболее эффективно с электромагнитной волной будут взаимодействовать СВ высокочастотных ветвей спектра.

В ЛП антиферромагнетиках низкочастотные упругие поперечные и продольные волны эффективно связаны через магнитную подсистему. Поэтому рассмотренные эффекты должны наблюдаться и в упругой подсистеме магнетика. В частности, возможно усиление поперечной УВ продольной УВ.

Изменение амплитуды колебаний $\varphi$ из-за взаимодействия СВ со звуком приводит к пространственной неоднородности среднего магнитного момента. В результате в магнетике возникает постоянное поле размагничивания, не связанное с формой образца. Этот эффект аналогичен акустоэлектрическому эффекту в полупроводниках.

Отношение скоростей спиновой и упругой волн в магнетике пропорционально отношению температуры Нееля к температуре Дебая ($\nu \sim T_N/T_D$). Величина $T_D \sim 10^2$ K, а $T_N$ изменяется в широких пределах от $\sim 1$ до $\sim 10^3$ K. Поэтому выбором материала можно реализовать в эксперименте любое состояние магнитной подсистемы.

Авторы благодарны М. И. Каганову, Ф. В. Лисовскому и В. Л. Преображенскому за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Учет переменных магнитных полей сводится к замене в (1) $\omega_H^2$ на $\omega_H^2 + \tilde{\omega}_1^2$, где $\tilde{\omega}_1^2 = e\,\omega_0^2 \tilde{h}_x/4$, и к добавлению в правую часть (1) слагаемого $\tilde{\omega}_2^2 \cos\varphi$, где $\tilde{\omega}_2^2 = e\,\omega_0^2 \tilde{h}_y/4$. Переменную составляющую поля размагничивания можно записать на основании уравнений магнитостатики в виде

$$\tilde{\mathbf{h}}_d = -4\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\tilde{\mathbf{m}}_n(t)(\mathbf{k}+n\mathbf{k}_0)]\,((\mathbf{k}+n\mathbf{k}_0)/(\mathbf{k}+n\mathbf{k}_0)^2) \exp[-i(\mathbf{k}+n\mathbf{k}_0)\mathbf{r}].$$

Переменная составляющая $\tilde{\mathbf{m}}(t) = \psi_0 [\mathbf{i}(-\sin^2\varphi) + \mathbf{j}\sin\varphi] + \mathbf{k}\theta$. Поскольку $\varphi \ll 1$, а $\theta \approx -2\psi_0\dot{\varphi}/\omega_0 d \ll \omega_0\varphi$, то $\tilde{\mathbf{m}}(t) \approx \mathbf{j}\,\psi_0\varphi$ и, следовательно, $\tilde{\mathbf{m}}_n(t) = \mathbf{j}\,\psi_0\varphi_n(t)$. В результате получаем

$$\tilde{\omega}_2^2 = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_{dn}^2 \varphi_n(t) \exp[-i(\mathbf{k}+n\mathbf{k}_0)\mathbf{r}],$$

где

$$\omega_{dn}^2 = \pi\omega_0^2 (e+b)\,\psi_0 \varkappa_y^2/[(\varkappa_x+n)^2+\varkappa_\perp^2], \qquad \tilde{\omega}_1^2 \ll \omega_H^2.$$

Таким образом, учет размагничивания сводится к добавлению в $a_n$ слагаемого $\Omega_{dn}^2 = \omega_{dn}^2/\omega_0^2$. В случае $\varkappa_y^2/[(\varkappa_x+n)^2+\varkappa_\perp^2] \ll h_x$ или $\nu^2[(\varkappa_x+n)^2+\varkappa_\perp^2]^2 \gg \pi(e+b)\psi_0\varkappa_y^2$ это слагаемое мало по сравнению с остальными и размагничивание слабо влияет на спектр СВ. В частности, при $h_x > 1$ размагничивание можно не учитывать. В случае $\Omega_{dn}^2 \gg \nu^2(\varkappa+n\varkappa_0)^2$ пространственная дисперсия определяется полями размагничивания. Выражения (2), (4) и (5) с учетом $\Omega_{dn}^2$ определяют собственные безобменные СВ. Используя приведенное выше рассмотрение, можно определить все параметры этих СВ.

### Список литературы


[1] Гуревич А. Г. // ФТТ. 1964. Т. 6. № 3. С. 2376—2388.
[2] Haas C. W. // J. Phys. Chem. Sol. 1966. V. 27. N 10. P. 1687—1695.
[3] Matthews H., Morgenthaler F. R. // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. N 21. P. 614—616.
[4] Cassedy E. S., Oliner A. A. // Proc. IEEE. 1963. V. 51. N 10. P. 1330—1359.
[5] Кирюхин Н. Н., Лисовский Ф. В. // ФТТ. 1968. Т. 10. № 3. С. 709—721.

[6] Туров Е. А., Шавров В. Г. // УФН. 1983. Т. 140. № 2. С. 429—462.
[7] Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1951. 457 с.
[8] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М., 1979. 527 с.
[9] Seavey M. H. // Sol. St. Comm. 1972. V. 10. N 2. P. 219—223.
[10] Гакель В. Р. // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. № 6. С. 1827—1842.
[11] Holden T. M., Svenson E. C., Martel P. // Canad. J. Phys. 1972. V. 50. N 7. P. 687—691.
[12] Sturrock P. A. // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. P. 2052—2056.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
18 июля 1988 г.
В окончательной редакции
9 марта 1989 г.