УДК 621.315.592

МАГНИТООПТИЧЕСКОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ УЗКОЗОННЫМ ПОЛУПРОВОДНИКОМ В ИМПУЛЬСНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А. Г. Жилич, Э. К. Эльц

В рамках квазидираковской модели узкозонного полупроводника изучается совместное действие на оптический спектр полупроводника сильного постоянного магнитного и периодического (импульсного) электрического полей. Рассмотрение проводится на базе общего квазиэнергетического метода описания периодических систем. На базе использования точных решений уравнения Дирака в скрещенных постоянных полях предложен способ изучения его решений в импульсном электрическом поле. Путем диагонализации оператора эволюции за период поля найден и исследован квазиэнергетический спектр электронов. Исследованы особенности спектра межзонного магнитооптического поглощения, возникающие в окрестностях многоквантовых резонансов. Показано, что в согласии с экспериментальными данными многоквантовое поглощение проявляется в спектре особенностями типа корневых сингулярностей с одновременным ступенчатым возрастанием поглощения при переходе через резонанс.

К настоящему времени целым рядом теоретических работ, посвященных исследованию резонансного межзонного поглощения сильной электромагнитной волны собственным полупроводником, показано, что для правильной интерпретации экспериментальных данных необходимо учитывать влияние электрического поля волны на внутризонные состояния комбинирующих при поглощении зон [1-7]. Подход к задаче обобщался на важный случай узкозонных полупроводников [8-10] и наличие внешнего квантующего магнитного поля при различных взаимных направлениях магнитного и периодического электрического полей [1, 10-12].

В настоящей работе исследуются квазиэнергетический спектр [13] и резонансное магнитооптическое поглощение в узкозонном полупроводнике, описываемом двухзонной квазидираковской моделью, предложенной Л. В. Келдышем [14] и использованной позже в работах ряда авторов [11, 12, 15]. Для отыскания квазиэнергетических состояний в периодическом импульсном поле предложен метод диагонализации оператора эволюции. Найдены вероятности линейных и нелинейных межзонных переходов из различных начальных стационарных состояний с резонансным поглощением или испусканием определенного числа квантов поля. Изучается вид особенностей спектра магнитопоглощения вблизи многоквантовых резонансов.

1. Двухзонное уравнение, описывающее движение электронов в квазидираковской зонной схеме, формально совпадает с уравнением Дирака и имеет вид

$$[s(\alpha\mathbf{P}) + \gamma^{(0)}ms^2 - e\varphi]\,\Psi = i\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{1}$$

где $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla + (e/c)\,\mathbf{A}(\mathbf{r})$; α, $\gamma^{(0)}$ — матрицы Дирака в стандартном представлении. Параметр $s = (E_g/2m)^{1/2}$ заменяет в коэффициентах уравнения (1) скорость света c (E_g, m — ширина запрещенной зоны и эффективная масса). Внешние поля задаются эффективными потенциалами $\mathbf{A} = (s/c)\,\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r})$ и

© Издательство «Наука»
«Физика твердого тела», 1989 г.

$\varphi(t)=\varphi^{(0)}(t)$ ($\mathbf{A}^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ — истинные векторный и скалярный потенциалы). Соответственно для эффективных магнитного и электрического полей имеем $\mathbf{H}=(s/c)\,\mathbf{H}_0$, $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0$, где $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{E}_0$ — истинные поля. Далее для векторного потенциала используется калибровка Ландау $A_x^{(0)}=A_z^{(0)}=0$, $A_y^{(0)}=H_0 x$, соответствующая магнитному полю $\mathbf{H}_0 \| Oz$, а скалярный потенциал, определяющий внешнее периодическое электрическое поле, берется в виде

$$\varphi^{(0)}(t, x)=\varphi^{(0)}(t+T, x)=\begin{cases} -E_0 x, & -T/4<t<T/4 \text{ (область I)}, \\ E_0 x, & T/4<t<{}^3/_4 T \text{ (область II)}. \end{cases} \tag{2}$$

Такое ступенчатое электрическое поле при $E_0^2=\mathcal{E}_0^2/2$ достаточно хорошо аппроксимирует гармоническое одномодовое поле $\mathcal{E}_0 \cos(2\pi t/T)$ и в то же время позволяет нам использовать точные решения уравнения (1) в каждой из областей I и II (уравнение (1) в поле $\sim\cos\omega t$ точно не решается).

Существенное отличие двухзонной модели от приближения независимых зон в магнитооптике проявляется при параметрах $E_g \sim 0.1$ эВ, $m \sim 0.01\, m_0$. При $H_0 \sim 10^5$ Э и лазерных напряженностях электрического поля $E_0 \sim 10^4 \div 10^5$ В/см расстояния между уровнями Ландау одной зоны оказываются уже одного порядка с величиной E_g.

Решения уравнения (1) в постоянном магнитном поле хорошо известны. Чтобы построить нужные нам решения этого уравнения в скрещенных полях, будем рассматривать систему координат K (x, y, z, t), в которой действуют поля $\mathbf{H} \,||\, Oz$ и $\mathbf{E} \,||\, Ox$ и в которой записано уравнение (1) как неподвижную, и выразим необходимые нам решения $\Psi_\gamma^{(+)}$ уравнения (1) в области I с помощью преобразований Лоренца (при $c \to s$) через решения уравнения Дирака в системе K' (x', y', z', t'), движущейся относительно системы K со скоростью $v=-s\,(E/H)$ параллельно оси Oy. В системе K' действует только магнитное поле $H'=H\sqrt{1-\beta^2}$ $(\beta=E/H=$ $=cE_0/sH)$ и соответствующие решения $\Psi_\gamma^{(0)}$ известны. Используя явный вид преобразования Лоренца для биспинора [16], имеем

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{r}, t)=\hat{S}\Psi_\gamma^{(0)}(\mathbf{r}', t'), \tag{3}$$

$$\hat{S}=\exp\left[-{}^1/_2\,\vartheta\hat{\alpha}_y\right]=\operatorname{ch}\vartheta-\alpha_y \operatorname{sh}\vartheta, \quad \operatorname{th}\vartheta=\beta. \tag{4}$$

Выразив в правой части с помощью соответствующих формул преобразований Лоренца [15] штрихованные координаты через нештрихованные, получим

$$\Psi_\gamma^{(+)}(\mathbf{r}, t)=\exp\left[-i\mathcal{E}_\gamma t/\hbar\right]\psi_\gamma^{(+)}(\mathbf{r}). \tag{5}$$

Здесь индекс $\gamma\equiv(\pm, \sigma, n, \mathbf{k})$ указывает знак энергии (при $E_0=0$), эффективный спин $\sigma=\pm 1$, номер уровня Ландау n и волновой вектор $\mathbf{k}$ (k_y, k_z)

$$\psi_\gamma^{+}(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{\sqrt{L_x L_z}}\, e^{ik_y y+ik_z z}\hat{S}\begin{bmatrix} b_1(\gamma)\, u_{n_1(n)}(\xi_\gamma) \\ \cdots \\ b_4(\gamma)\, u_{n_4(n)}(\xi_\gamma) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\mathcal{E}_\gamma=-\hbar\beta k_y+\sqrt{1-\beta^2}\,\varepsilon_\gamma(n, \sigma, k_z), \tag{7}$$

$$\varepsilon_\gamma=\pm\left[(ms^2)^2+(\hbar s k_z)^2+2e\hbar s H\sqrt{1-\beta^2}\,(n+{}^1/_2+{}^1/_2\,\sigma)\right]^{1/2},$$

где знаки «$\pm$» соответствуют состояниям электрона в зоне проводимости и в валентной зоне; $u_{n_j}(\xi_\gamma)$ — функции гармонического осциллятора,

$$\xi_\gamma=a_H^{-1}(x+\eta_\gamma), \quad \eta_\gamma=a_H^2\left[k_y\sqrt{1-\beta^2}+\beta\hbar s\varepsilon_\gamma\right], \quad a_H^2\equiv\hbar s/eH\sqrt{1-\beta^2}.$$

Коэффициенты $b_j(\gamma)$ в четырехкомпонентных функциях (6) можно найти с помощью формул, приведенных в [17].

Собственные функции в области II

$$\Psi_\rho^{(-)}=\exp\left[-iE_\rho t/\hbar\right]\chi_\rho^{(-)}$$

можно получить заменой во всех формулах $\beta \rightarrow -\beta$; индекс ρ в области II имеет тот же смысл, что и индекс γ в области I.

2. Волновые функции квазиэнергетических состояний $\Phi_\lambda(\mathbf{r}, t)$ ищем в виде

$$\Phi_\lambda = \sum_\gamma A_\gamma^{(\lambda)} e^{-\frac{i\mathcal{E}_\gamma}{\hbar}t} \psi_\gamma^{(+)} \quad (\text{обл. I}), \qquad \Phi_\lambda = \sum_{\gamma, \rho} C_{\rho\gamma} A_\gamma^{(\lambda)} e^{-i\frac{E_\rho t}{\hbar}} \chi_\rho^{(-)}(\mathbf{r}) \quad (\text{обл. II}). \tag{8}$$

Требование непрерывности в момент $t=T/4$ дает

$$C_{\rho\gamma} = \exp\left[i\left(E_\rho - \mathcal{E}_\gamma\right) T/4\hbar\right] \langle\rho \mid \gamma\rangle, \quad \langle\rho \mid \gamma\rangle = \int \chi_\rho^{(-)*} \psi_\gamma^{(+)} d\mathbf{r}. \tag{9}$$

Условие

$$\Phi_\lambda(\mathbf{r}, t+T) = \exp(-i\lambda T)\, \Phi_\lambda(\mathbf{r}, t) \tag{10}$$

приводит к задаче о диагонализации унитарного оператора эволюции системы $\hat{W}(t)$ за период поля

$$\hat{W}(t) = \exp\left[-i\hat{H}_{\mathrm{I}} T/2\hbar\right] \exp\left[-i\hat{H}_{\mathrm{II}} T/2\hbar\right], \tag{11}$$

где $\hat{H}_{\mathrm{I}}$, $\hat{H}_{\mathrm{II}}$ — некоммутирующие гамильтонианы уравнения (1) в областях I и II.

Диагонализация оператора $W(T)$ сводится к решению с требуемой точностью системы уравнений

$$\sum_{\gamma'} \left[e^{a_\gamma} \langle\gamma \mid F(1) \mid \gamma'\rangle - \delta_{\gamma\gamma'} e^{-i\lambda T}\right] B_{\gamma'}^{(\lambda)} = 0, \tag{12}$$

где

$$F(\tau) = e^{\tau\left(-\frac{i}{2\hbar}\hat{H}_{\mathrm{I}} T + i\hat{D}\right)}, \qquad \hat{D} = \frac{1}{\hbar} eE_0 \left[x + a_H^2 k_y \left(1-\beta^2\right)^{1/2}\right], \tag{13}$$

$$a_\gamma = -i\bar{\varepsilon}_\gamma T/2\hbar, \qquad \bar{\varepsilon}_\gamma \equiv \sqrt{1-\beta^2}\, \varepsilon_\gamma(n, \sigma, k_z), \qquad B_\gamma^{(\lambda)} = e^{-i\frac{\mathcal{E}_\gamma T}{4\hbar}} A_\gamma^{(\lambda)}. \tag{14}$$

Учитывая структуру функций (6)—(7), можно убедиться, что коэффициенты в системе (12) не зависят от k_y, а значит, от k_y не зависит и квазиэнергия.

С точностью до членов $\sim D_{\gamma\gamma'}^2$ вычисление входящих в (12) матричных элементов оператора $F(1)$ (см. Приложение) дает

$$\langle\gamma \mid F(1) \mid \gamma'\rangle = e^{a_\gamma}\delta_{\gamma\gamma'} + D_{\gamma\gamma'} \frac{e^{a_\gamma} - e^{a_{\gamma'}}}{a_\gamma - a_{\gamma'}} + \sum_{\gamma''} \frac{D_{\gamma\gamma''} D_{\gamma''\gamma'}}{a_\gamma - a_{\gamma''}} \left(\frac{e^{a_\gamma} - e^{a_{\gamma'}}}{a_\gamma - a_{\gamma'}} - \frac{e^{a_\gamma} - e^{a_{\gamma''}}}{a_\gamma - a_{\gamma''}}\right). \tag{15}$$

Матричные элементы $D_{\gamma\gamma'}$, вычисляемые на точных функциях (6) для различных пар состояний γ, γ', могут иметь различный порядок по амплитуде E_0 переменного электрического поля. Это определяет характер резонанса, возникающего при приближении разности энергий этих состояний к величине, кратной частоте поля $\omega = 2\pi/T$.

Приведем результаты расчета квазиэнергий и вероятностей межзонных переходов на частотах, близких к «линейным» и «квадратичным» по E_0 резонансам.

3. В первом порядке по E_0 отличны от нуля матричные элементы оператора $\hat{D}$, связывающие состояния γ, отличающиеся знаком энергии и знаком спина, но с одним и тем же n. Имея в виду исследование квазиэнергетических состояний вблизи конкретного резонанса, в системе (12) в данном случае можно ограничиться двумя уравнениями, связывающими два состояния указанного типа $\gamma=1\,(+, \sigma, n, \mathbf{k})$ и $\gamma'=3\,(-, -\sigma, n, \mathbf{k})$ (см. рисунок). После перенормировки, обеспечивающей сохранение унитарности матрицы коэффициентов в (12) при приближенной диагонализации, система (12) принимает вид

$$\left(\frac{1}{\Delta^{1/2}}e^{2a_1}-e^{-i\lambda T}\right)B_1^{(\lambda)}+\frac{1}{\Delta^{1/2}}D_{13}qe^{(3a_1+a_3)/2}B_3^{(\lambda)}=0,$$

$$-\frac{1}{\Delta^{1/2}}D_{13}qe^{(a_1+3a_3)/2}B_1^{(\lambda)}+\left(\frac{1}{\Delta^{1/2}}e^{2a_3}-e^{-i\lambda T}\right)B_3^{(\lambda)}=0, \qquad (16)$$

где

$$q=\sin\left[\pi\frac{\bar{\varepsilon}_1-\bar{\varepsilon}_3}{2\hbar\omega}\right]\Big/\frac{\pi(\bar{\varepsilon}_1-\bar{\varepsilon}_3)}{2\hbar\omega}, \qquad \Delta=1+|D_{13}q|^2. \qquad (17)$$

Решение системы дает квазиэнергии (в ед. $\hbar$)

$$\lambda_{1,3}=\frac{1}{2\hbar}(\bar{\varepsilon}_1+\bar{\varepsilon}_3)\mp\theta^{(1)}/T, \qquad \theta^{(1)}=\arccos\left[\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\cos\frac{\pi}{\hbar\omega}(\bar{\varepsilon}_1-\bar{\varepsilon}_3)\right], \qquad (18)$$

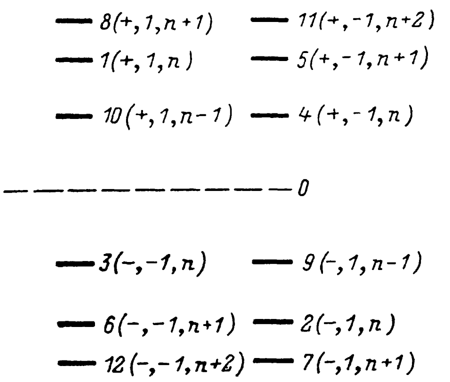
где $\bar{\varepsilon}_\gamma$, a_γ определены формулами (14).

В непосредственной близости к резонансу

$$\lambda_{1,3}\simeq\frac{1}{2\hbar}(\bar{\varepsilon}_1+\bar{\varepsilon}_3+l\hbar\omega)\pm\Omega^{(1)}(l), \qquad \Omega^{(1)}(l)=$$

$$=\frac{1}{2\hbar}\sqrt{(\bar{\varepsilon}_1-\bar{\varepsilon}_3-l\hbar\omega)^2+\left(\frac{\hbar\omega}{\pi}\right)^2|D_{13}q|^2}+\nu\omega, \qquad (19)$$

ν — произвольное целое число. Нумерация квазиэнергетических уровней λ_γ выбрана так, чтобы при удалении от резонанса или при $E_0\to 0$ они соответствовали уровням Ландау с тем же индексом γ.



Из формул (16)—(19) видно, что в линейном по электрическому полю приближении кратность резонансов l может быть только нечетной: $l=1$, 3, 5, ... При приближении частоты к четному резонансу $\bar{\varepsilon}_1-\bar{\varepsilon}_3\to 2l'\hbar\omega$ $q\to 0$ и связь между состояниями типа $\gamma=1$, $\gamma'=3$ разрывается.

Расположение уровней Ландау γ ($\pm$, σ, n, $k_z=0$), сильно взаимодействующих с полем вблизи резонансной частоты.

Решая при найденных λ_γ систему (16), можно найти соответствующие коэффициенты $B_\gamma^{(\lambda)}$, формирующие квазиэнергетическое состояние (8).

Будем считать, что до включения переменного электрического поля при $t<t_0$ (удобно полагать $t_0=-T/4$) полупроводник находился в основном состоянии, т. е. все состояния валентной зоны (отрицательные состояния) заняты, а состояния зоны проводимости (положительные состояния) свободны. После включения поля любая одноэлектронная функция может быть представлена разложением по квазиэнергетическим состояниям (8). При частоте поля, близкой к одному из линейных резонансов, в таком разложении практически достаточно учесть только два в общем случае невырожденных квазиэнергетических состояния, соответствующих данному резонансу. Если построенная так волновая функция $\Psi(t)$ удовлетворяет при $t=t_0$ и $E_0\to 0$ условно $\Psi(t_0)=\Psi_3^{(0)}$, то расчет дает, что через N периодов вероятность найти электрон в стационарном состоянии $\Psi_\gamma^{(0)}$ равна

$$w_{\gamma 3}(NT)=|\langle\Psi_\gamma^{(0)}|\Psi(t)\rangle|^2=\left|\frac{D_{13}(n,\sigma)q}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{\hbar\omega}(\bar{\varepsilon}_1-\bar{\varepsilon}_3)+|D_{13}q|^2}}\sin N\theta^{(1)}e^{-i\frac{\bar{\varepsilon}_1}{\hbar}NT}\right.\times$$

$$\times\langle\psi_\gamma^{(0)}|\psi_1^{(+)}\rangle+\left[-\frac{i\sin\frac{\pi}{\hbar\omega}(\bar\varepsilon_1-\bar\varepsilon_3)}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{\hbar\omega}(\bar\varepsilon_1-\bar\varepsilon_3)+|D_{13}q|^2}}\sin N\theta^{(1)}+\cos N\theta^{(1)}\right]\times$$

$$\left.\times e^{-i\frac{\bar\varepsilon_3}{\hbar}NT}\langle\psi_\gamma^{(0)}|\psi_3^{(+)}\rangle\right|^2, \tag{20}$$

где с точностью до β^2

$$D_{13}=\exp\left[-\frac{1}{2}a_H^2\frac{\beta^2}{(\hbar s)^2}(\bar\varepsilon_1-\bar\varepsilon_3)^2\right]d_{13}\simeq\exp\left[-\frac{1}{2}a_H^2\frac{(\beta\omega l)^2}{s^2}\right]d_{13},$$

$$d_{13}=\pi\frac{eE_0}{\hbar\omega}a_H\frac{\sqrt{e\hbar sH\sqrt{1-\beta^2}}}{(\bar\varepsilon_1|\bar\varepsilon_3)^{1/2}}\frac{\sqrt{(ms^2+\bar\varepsilon_1)(ms^2+|\bar\varepsilon_3|}}{\bar\varepsilon_1+|\bar\varepsilon_3|}. \tag{21}$$

Из фиксированного начального состояния $\gamma=3$ ($-$, σ, n, k) переходы разрешены, вообще говоря, в любое конечное состояние γ. Однако резонансный характер при $l\hbar\omega\to\bar\varepsilon_\gamma-\bar\varepsilon_3$ переходы будут иметь только в конечные состояния типа $\gamma=1$ ($+$, $-\sigma$, n, k). Из формулы (21) видно, что при заданной внешней частоте с ростом порядка резонанса l (например, при увеличении квантового числа n) его интенсивность убывает $\sim\exp(-l^2)$. В приведенных формулах экспоненциальная зависимость от электрического поля возникает из-за появления такой зависимости в точных волновых функциях $\psi_\gamma^{(+)}$. Хотя наши результаты получены для полей, при которых $\beta<1$, явная экспоненциальная зависимость в формулах (20)—(21) сохранена, так как для резонансов достаточно высоких порядков показатель экспоненты в этих формулах может быть большим.

Суммируя вероятности (20) по всем конечным состояниям, можно получить полную вероятность возбуждения электрона в зону проводимости. В частности, вблизи резонанса l-го порядка (при обычном в теории возмущений условии $|\bar\varepsilon_1-\bar\varepsilon_3-l\hbar\omega|>|D_{13}q|^2$) для квазиэнергии можно использовать выражения (19). В этом случае после суммирования по конечным состояниям полная вероятность возбуждения электрона при $N\to\infty$ оказывается пропорциональной NT и можно ввести вероятность возбуждения за единицу времени в единице объема, для которой получаем

$$\bar w_1^{(l)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT}\frac{1}{2\pi a_H^2}\sum_{n,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}w_{\gamma 3}^{(l)}(NT)\,dk_z=\frac{\omega^2}{8\pi^2 a_H^2}\sum_{n,\sigma}\sqrt{2\mu(n,\sigma)}\times$$

$$\times\frac{|D_{13}(n,\sigma)q|^2}{\sqrt{l\hbar\omega-\bar\varepsilon_1(n,\sigma,0)-|\bar\varepsilon_3(n,-\sigma,0)|}}|\langle\psi_\gamma^{(0)}|\psi_1^{(+)}\rangle|^2,$$

$$\mu(n,\sigma)=\frac{\mu_1\mu_3}{\mu_1+\mu_3},\qquad \mu_\gamma s^2=\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{(ms^2)^2+2e\hbar sH\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma_\gamma\right)\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{22}$$

Общий вывод, который следует из нашего расчета, состоит в том, что переходы с матричными элементами $\sim E_0$ дают вклад в резонансное многоквантовое поглощение только с нечетным числом квантов l. Выполняются правила отбора $\Delta n=0$, $\sigma_\gamma=-\sigma_3$. Резонансы проявляются обычными для магнитооптики корневыми особенностями спектра.

Поскольку в зонной модели Дирака уровни Ландау одной зоны существенно неэквидистантны, приведенное рассмотрение пригодно и для циклотронных переходов внутри одной зоны ($\Delta n=\pm 1$, $\Delta\sigma=0$).

4. Рассмотрим резонанс с внешним полем уровней, для которых связывающие их матричные элементы $D_{\gamma\gamma'}$ отличны от нуля во втором порядке по E_0. Такая связь целиком обусловлена возмущением внутризонных волновых функций переменным электрическим полем. В данном случае группа сильно взаимодействующих уровней состоит из уровней состояний $\gamma=1$ ($+$, σ, n, $\mathbf{k}$), $\gamma=6$ ($-$, $-\sigma$, $n+1$, $\mathbf{k}$) и соответственно

совпадающих с ними при $\sigma=1$ уровней $\gamma=5$ $(+, -\sigma, n+1, \mathbf{k})$ и $\gamma=2$ $(-, \sigma, n, \mathbf{k})$.

В системе четырех уравнений (12), определяющих квазиэнергии, теперь необходимо учесть не только прямое взаимодействие друг с другом этих четырех близких к резонансу состояний, но и их взаимодействие через те промежуточные состояния m, для которых $D_{\gamma m} \sim E_0$. Прямое взаимодействие описывается матричными элементами $\langle\gamma \mid F(1) \mid \gamma'\rangle \sim E_0^2$, $\gamma, \gamma'=1, 6, 5, 2$, а взаимодействие через промежуточные состояния — соответствующими составными матричными элементами оператора $F(1)$ [18]. С учетом этого волновые функции квазиэнергетических состояний представляются в виде

$$\Phi_\lambda=\sum_\gamma B_\gamma^{(\lambda)} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_\gamma\left(t-\frac{T}{4}\right)}\tilde{\psi}_\gamma^{(+)}, \tag{23}$$

$$\tilde{\psi}_\gamma^{(+)}=\frac{1}{\sqrt{Q_{\gamma\gamma}}}\left[\psi_\gamma^{(+)}+\sum_{m\neq\gamma}\left(\frac{U_{m\gamma}}{e^{2a_\gamma}-e^{2a_m}}\psi_m^{(+)}-\frac{1}{2}Q_{m\gamma}\psi_m^{(+)}\right)\right], \tag{24}$$

$$U_{m\gamma}=\frac{e^{a_m}-e^{a_\gamma}}{a_m-a_\gamma}e^{a_\gamma}D_{m\gamma}, \qquad Q_{m\gamma}=\delta_{m\gamma}+\sum_k\frac{U_{km}^*U_{k\gamma}}{\left(e^{2a_m}-e^{2a_k}\right)\left(e^{2a_\gamma}-e^{2a_k}\right)}. \tag{25}$$

Здесь и дальше индекс $\gamma=1, 6, 5, 2$, а индексы m, k обозначают промежуточные состояния, для которых $D_{m\gamma} \sim E_0$. Все такие промежуточные состояния показаны на рисунке. $B_\gamma^{(\lambda)}$ — собственные векторы четырехрядной унитарной матрицы $(\lambda=\lambda_6, \lambda_1, \lambda_5, \lambda_2)$

$$\sum_{\gamma'}\left\{e^{2a_\gamma}\left[(1+iV_{\gamma\gamma})\delta_{\gamma\gamma'}+V_{\gamma\gamma'}(1-\delta_{\gamma\gamma'})\right]-e^{-i\lambda T}\delta_{\gamma\gamma'}\right\}B_{\gamma'}^{(\lambda)}=0, \tag{26}$$

где

$$e^{2a_\gamma}(1+iV_{\gamma\gamma})\delta_{\gamma\gamma'}+V_{\gamma\gamma'}(1-\delta_{\gamma\gamma'})=U_{\gamma\gamma'}+K_{\gamma\gamma'}+R_{\gamma\gamma'}, \tag{27}$$

$$K_{\gamma\gamma'}=\sum_m\frac{D_{\gamma m}D_{m\gamma'}}{a_{\gamma'}-a_m}\left(\frac{e^{a_{\gamma'}}-e^{a_\gamma}}{a_{\gamma'}-a_\gamma}-\frac{e^{a_m}-e^{a_\gamma}}{a_m-a_\gamma}\right)e^{a_\gamma},$$

$$R_{\gamma\gamma'}=\sum_m\left[\frac{U_{\gamma m}U_{m\gamma'}}{e^{2a_\gamma}-e^{2a_m}}+\frac{U_{m\gamma'}U_{m\gamma}^*\left(e^{2a_{\gamma'}}-e^{2a_\gamma}\right)}{2\left(e^{2a_{\gamma'}}-e^{2a_m}\right)\left(e^{2a_\gamma}-e^{2a_m}\right)}\right]. \tag{28}$$

Прямой расчет по формулам (27)—(28) показывает, что $V_{\gamma\gamma'}=-V_{\gamma'\gamma}$. Диагональные матричные элементы $V_{\gamma\gamma}$ вещественны и могут быть представлены в виде $V_{\gamma\gamma}=v_{\gamma\gamma}+\varkappa_{\gamma\gamma}a_H^2k_z^2$, причем $V_{22}=-V_{11}$, $V_{55}=-V_{66}$. При $n\gg 1$: $\varkappa_{\gamma\gamma}\to 0$, $V_{11}\approx -V_{66}\sim\sqrt{n}$. Для недиагональных элементов имеем: $V_{16}=-V_{52}=v_{16}+\varkappa_{16}a_H^2k_z^2$, $V_{15}=V_{26}=\varkappa_{15}a_Hk_z$, $V_{12}=-V_{56}=\varkappa_{12}a_Hk_z$, где $\varkappa_{15}$, $\varkappa_{12}$ вещественны и при $n\gg 1$ стремятся к нулю. Поскольку наибольший интерес представляют решения уравнений при k_z, близких к нулю (максимум плотности состояний), то в (26) можно считать матричные элементы V_{15} и V_{12}, связывающие пару состояний 1, 6 с парой 5, 2, малыми по сравнению с остальными, что существенно упрощает процедуру решения.

Решение системы (26) дает

$$\lambda_{6,1}T=-\lambda_{5,2}=\pi\frac{\bar{\varepsilon}_1+\bar{\varepsilon}_6}{\hbar\omega}-\frac{1}{2}(V_{11}+V_{66})-\frac{|V_{15}|^2}{|V_{11}|+|V_{66}|}\mp\theta^{(2)}, \tag{29}$$

$$\theta^{(2)}=\arccos\frac{\cos\left(\frac{\pi}{\hbar\omega}\left[\bar{\varepsilon}_1-\bar{\varepsilon}_6-\frac{\hbar\omega}{2\pi}(V_{66}-V_{11})\right]\right)}{\sqrt{1+|V_{16}|^2}}.$$

Резонансы теперь будут иметь место при $\bar{\varepsilon}_1-\bar{\varepsilon}_6-(\hbar\omega/2\pi)(V_{66}-V_{11})\sim$ $\sim l\hbar\omega$, причем l — любое целое число. Резонансные частоты и соответственно возникающие в спектре квазиэнергий щели благодаря динамическому эффекту Штарка сдвигаются на величины $\sim(V_{66}-V_{11})$. Вблизи l-квантового резонанса квазиэнергии можно представить в виде

$$\lambda_{6,1}=-\lambda_{5,2}\simeq\frac{1}{2\hbar}(\bar{\varepsilon}_1+\bar{\varepsilon}_6+l\hbar\omega)-\frac{\omega}{4\pi}(V_{11}+V_{66})-$$

$$-\frac{\omega}{2\pi}\frac{|V_{15}|^2}{|V_{11}|+|V_{66}|}\mp\Omega^{(2)}(l)+\nu\omega, \tag{30}$$

$$\Omega^2(l)=\sqrt{\left[\frac{1}{2\hbar}(\bar{\varepsilon}_1-\bar{\varepsilon}_6-l\hbar\omega)+\frac{\omega}{4\pi}(V_{66}-V_{11})\right]^2+\frac{\omega^2}{2\pi^2}|V_{16}|^2}.$$

Таким образом, резонансы с четным числом квантов, в частности с $l=2$, появляются в приближениях, учитывающих переходы с матричными элементами не ниже второго порядка по амплитуде переменного электрического поля.

Как и в случае линейных по полю переходов, построим из квазиэнергетических функций (23) линейную комбинацию, обращающуюся при $t=-T/4$ и $E_0\to 0$ в функцию стационарного состояния валентной зоны $\Psi_6^{(0)}(\mathbf{r}, t)$. Рассматривая это состояние как начальное, найдем, что через N периодов поля вероятность найти электрон в произвольном состоянии будет равной

$$w_{\gamma 6n}^{(l)}(NT)=\frac{|V_{16}|^2}{\rho}\left|\langle\psi_\gamma^{(0)}|\Phi_1^{(+)}\rangle\sin N\theta^{(2)}+2iT\frac{|V_{15}|^2\sin 2N\theta^{(2)}}{(|V_{15}|^2+|V_{12}|^2)(|V_{11}|+|V_{66}|)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(V_{21}e^{\frac{2i}{\hbar}\varepsilon_1 NT}\langle\psi_\gamma^{(0)}|\Phi_2^{(+)}\rangle+V_{15}\langle\psi_\gamma^{(0)}|\psi_5^{(+)}\rangle\right)\right|^2, \tag{31}$$

$$\rho=\sin^2\left[\frac{\pi}{\hbar\omega}(\bar{\varepsilon}_1-\varepsilon_6)+\frac{1}{2}(V_{66}-V_{11})\right]+|V_{16}|^2.$$

В непосредственной близости к l-квантовому резонансу при $N\to\infty$ вероятность перехода электрона в зону проводимости становится пропорциональной NT.Суммируя по всем состояниям с разными σ, n, k и используя для λ_γ выражения(30), для полного числа таких переходов за единицу времени в единице объема получаем

$$\bar{w}_1^{(l)}=\frac{\omega^2}{8\pi^2 a_H^2}\sum_{n,\sigma}\frac{\sqrt{\mu_1(n,\sigma)}}{\Delta_l^{1/2}(n,\sigma,\omega)}\left|v_{16}+\varkappa_{16}a_H^2\mu_1(n,\sigma)\Delta_l(n,\sigma,\omega)\frac{1}{\hbar^2}\right|^2\times$$

$$\times\left|\langle\psi_\gamma^{(0)}|\Phi_1^{(+)}\rangle+\frac{8\pi i\sqrt{\mu_1(n,\sigma)}\,a_H\varkappa_{15}^2\Delta_l^{1/2}(n,\sigma,\omega)}{\hbar\omega(\varkappa_{15}^2+\varkappa_{12}^2)(|V_{11}|+|V_{66}|)}\left(i\varkappa_{12}e^{\frac{2i}{\hbar}\varepsilon_1 NT}\langle\psi_\gamma^{(0)}|\Phi_2^{(+)}\rangle+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\varkappa_{15}\langle\psi_\gamma^{(0)}|\Phi_5^{+}\rangle\right)\right|^2, \tag{32}$$

где

$$s^2\mu_1(n,\sigma)=\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{(ms^2)^2+2e\hbar sH\sqrt{1-\beta^2}\,(n+{}^1/_2+{}^1/_2\,\sigma)},$$

$$\mu_6=\mu_1,\quad \Delta_l(n,\sigma,\omega)=\left|l\hbar\omega-\frac{\hbar\omega}{2\pi}(V_{66}-V_{11})-2\bar{\varepsilon}_1(n,\sigma,0)\right|.$$

В приведенном выражении $\bar{w}_1^{(l)}$ использованы введенные выше обозначения для $V_{\gamma\gamma'}$. Поскольку все величины $v_{\gamma\gamma'}$ и $\varkappa_{\gamma\gamma'}\sim E_0^2$, то $\bar{w}_1^{(l)}\sim E_0^4$. Из (32) следует, что в спектре многоквантового магнитооптического нелинейного поглощения на частотах, удовлетворяющих условию резонанса $\Delta_l^{1/2}(\omega)\to 0$ при любой четности l, могут проявляться сразу и корневые особенности $\sim\Delta_l^{-1/2}$, и ступенчатое возрастание поглощения $\sim\Delta_l^{1/2}$ и $\sim\Delta_l^{3/2}$ (переходы типа $\gamma=6\to\gamma=1$, $|\bar{\varepsilon}_6|=\bar{\varepsilon}_1$ с правилами отбора $\Delta n=\mp 1$, $\Delta\sigma=\pm 2$; см. рисунок) или только ступеньки $\sim\Delta_l^{1/2}$ (переходы типа $\gamma=6\to\gamma=5$, $|\bar{\varepsilon}_6|=\varepsilon_5$, $\Delta n=0$, $\Delta\sigma=0$). Так же как и для линейных резонансов, интенсивности квадратичных, возникающих при учете ускорения зонных электронов переменным полем при фиксированной частоте поля ω, экспоненциально быстро падают с ростом l.

5. Наши выводы согласуются с имеющимися экспериментальными данными [19] и существенно дополняют теоретические результаты, полученные ранее для модели независимых зон [1, 11] и дираковской модели при поляризации $E_0 \,||\, H_0$ и $l \gg 1$ [10].

Полученные результаты могут быть применены для качественного, а с соответствующими поправками на отличие реальных зонных структур от идеально дираковской схемы и анизотропию [15] и для количественного анализа спектров резонансного магнитопоглощения в реальных полупроводниках.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представим оператор $F(\tau)$ в виде

$$F(\tau) = \exp(\tau\hat{A})\, G(\tau),$$

где $\hat{A} = -iH_{\rm I}T/2\hbar$, а $G(\tau)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$G(\tau) = 1 + \int_0^\tau e^{-s\hat{A}} \hat{D} e^{s\hat{A}} \hat{G}(s)\, ds. \qquad (\text{П. } 1)$$

Решая (П. 1) методом итераций и вычисляя матричные элементы возникающего при этом разложения по степеням $\hat{D}$, получим выражение (15).

Список литературы

[1] Weiler M. H., Reine M., Lax B. // Phys. Rev. 1968. V. 171. N 3. P. 949—958; Weiler M. H. // Phys. Rev. B. 1973. V. 37. N 12. P. 5403—5405.
[2] Галицкий В. А., Гореславский С. П., Елесин В. Ф. // ЖЭТФ. 1969. Т. 57. № 1. С. 207.
[3] Перлин Е. Ю., Коварский В. А. // ФТТ. 1970. Т. 12. № 4. С. 3105—3108; 1971. № 4. С. 1217—1219.
[4] Александров А. С., Елесин В. Ф., Кремлев А. Н., Яковлев В. П. // ЖЭТФ. 1977. Т. 12. № 5. С. 1913—1925.
[5] Балкарей Ю. И., Эпштейн Э. М. // ФТТ. 1975. Т. 17. № 8. С. 2312—2314; ФТП. 1974. Т. 8. № 2. С. 407—410.
[6] Арутюнян С. Л., Казарян Э. М., Минасян Г. Р. // ФТТ. 1976. Т. 18. № 9. С. 2568—2570.
[7] Ивченко Е. Л., Перлин Е. Ю. // ФТТ. 1973. Т. 15. № 9. С. 2781—2783.
[8] Аветисян С. К., Казарян Э. М., Минасян Г. Р. // ФТТ. 1979. Т. 21. № 12. С. 3610—3613; ФТП. 1981. Т. 15. № 8. С. 1493—1497.
[9] Олейник В. П., Абакаров Д. И., Белоусов И. В. // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 1. С. 312.
[10] Жилич А. Г., Монозон Б. С. // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 11. С. 1721—1728; 1980. Т. 78. № 3. С. 1087—1098.
[11] Чайковский И. А., Коварский В. А., Перлин Ю. Е. // ФТТ. 1972. Т. 14. № 3. С. 728—734.
[12] Жилич А. Г., Монозон Б. С. Магнито- и электропоглощение света в полупроводниках. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 204 с.
[13] Зельдович Я. Б. // УФН. 1973. Т. 110. С. 139.
[14] Келдыш Л. В. // ЖЭТФ. 1963. Т. 45. № 1. С. 364—370.
[15] Аронов А. Г., Пикус Г. Е. // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. № 8. С. 505—515.
[16] Фок В. А. Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976. 376 с.
[17] Жилич А. Г., Эльц Э. К. // ФТТ. 1986. Т. 27. № 10. С. 3062—3069.
[18] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. 702 с.
[19] Weiler M. H., Bierig R. W., Lax B. // Phys. Rev. 1969. V. 184. N 2. P. 709—714; Zawadski W., Wiasak J. // J. Phys. C. 1976. V. 9. P. 663—667; Button K. J., Lax B., Weiler M. H., Reine M. // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17. N 18. P. 1005—1007.

Ленинградский государственный университет
Ленинград

Поступило в Редакцию 12 апреля 1988 г.
В окончательной редакции 22 июля 1988 г.