Расчет вихревого тока в мелкой проводящей частице сферической формы

© С.В. Березкина, И.А. Кузнецова, А.А. Юшканов*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
* Московский государственный областной университет,
107005 Москва, Россия

E-mail: kuz@uniyar.ru

(Поступила в Редакцию 28 ноября 2005 г.
В окончательной редакции 27 марта 2006 г.)

Вычислен вихревой ток в мелкой проводящей сферической частице, находящейся в поле плоской электромагнитной волны. Рассматриваемые частоты ограничены сверху частотами ближнего ИК-диапазона. Расчет выполнен в рамках кинетического подхода для сравнительно мелкой частицы ($\sim 10\,\mathrm{nm}$), что позволяет пренебречь скин-эффектом; соотношение между размером частицы a и длиной свободного пробега электронов λ считается произвольным. Рассмотрен чисто диффузный механизм взаимодействия носителей заряда с границей образца. Исследовано влияние температуры на плотность тока в частице.

PACS: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 73.23.-b

Электромагнитные свойства малых проводящих частиц (радиус частицы a много меньше длины волны электромагнитного излучения Λ) могут существенно отличаться от свойств массивных образцов рядом особенностей [1–4]. Среди причин, обусловливающих это различие, помимо квантовых размерных эффектов могут быть эффекты, имеющие классическое объяснение. Так, если радиус частицы a сравним с длиной свободного пробега носителей заряда λ или меньше ее ($a < \lambda$), взаимодействие носителей заряда с границей образца начинает оказывать значительное влияние на электрофизические и оптические свойства частицы. В этом случае классическая теория (теория Ми [5]) взаимодействия электромагнитного излучения со сферической частицей, основанная на локальных уравнениях макроскопической электродинамики, оказывается неприменимой, и решение задачи необходимо проводить в рамках кинетического подхода.

В работе [2] рассмотрен вопрос о поглощении электромагнитного излучения в малой металлической частице сферической формы (для вырожденного электронного газа, т.е. при температуре $T \to 0$). В дипольном приближении рассчитано сечение поглощения, обусловленное вихревыми токами, индуцируемыми в частице внешним магнитным полем волны. Для высокопроводящих частиц размером порядка 10 nm это поглощение доминирует. Отметим, что интерес представляет не только интегральная величина — сечение поглощения, но и распределение плотности вихревого тока в частице. Так, например, работы [6,7] посвящены расчету плотности вихревого тока в сферической частице в низкочастотном приближении ($\omega \to 0$) в частном случае, когда размер частицы a много меньше длины свободного пробега электронов λ ($a \ll \lambda$). При этом рассмотрение проводилось только для нулевой температуры.

В настоящей работе кинетическим методом рассчитывается плотность вихревого тока в частице в зависимости от частоты внешнего поля ω для случая ненулевых температур. Соотношение между длиной свободного пробега носителй заряда λ и размером частицы a может быть произвольным. Радиус частицы a считается меньше глубины скин-слоя δ, что позволяет пренебречь скин-эффектом.

1. Постановка задачи

Рассмотрим малую проводящую частицу полуметалла или сильно легированного примесного полупроводника n-типа (p-типа) проводимости в однородном периодическом во времени магнитном поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t)$. Это поле индуцирует вихревое электрическое поле, определяемое из уравнения индукции Максвелла и имеющее вид [8]

$$\mathbf{E}\frac{1}{2c}\left[\mathbf{r}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right] = \frac{\omega}{2ic}[\mathbf{r}\mathbf{H}_0]\exp(-i\omega t), \qquad (1)$$

где ω — угловая частота волны, c — скорость света, $\mathbf{H}_0$ — амплитуда магнитного поля волны, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор (начало координат в центре частицы). Электрическое поле $\mathbf{E}$ приводит в свою очередь к возникновению вихревого тока $\mathbf{j}$. При условии $a \gg \lambda$ для нахождения тока $\mathbf{j}$ можно применить локальный закон Ома [8]

$$\mathbf{j} = \Sigma(\omega)\mathbf{E},$$

$$\Sigma(\omega) = \Sigma_0/(1 - i\tau\omega), \qquad (2)$$

где $\Sigma(\omega)$ — проводимость Друде, $\Sigma_0 = e^2 n\tau/m$ — статическая проводимость, e — заряд электрона, n и m — соответственно равновесная концентрация и эффективная масса электрона (дырки), τ — время релаксации.

В случае когда радиус частицы a сравним с длиной свободного пробега электрона (дырки) λ, связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ имеет нелокальный характер и макроскопическая электродинамика становится неприменима. Электрическое поле действует на носители заряда в частице, что вызывает отклонение f_1 их функции распределения f от равновесной фермиевской f_0

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r},\mathbf{v}), \tag{3}$$

$$f_0 = \frac{1}{\exp\bigl((\varepsilon-\mu)/k_0T\bigr)+1}; \tag{4}$$

здесь $\mathbf{v}$ и $\varepsilon = mv^2/2$ — скорость и кинетическая энергия электрона (дырки) в случае сферически-симметричной энергетической зоны, μ — химический потенциал, T — температура частицы, k_0 — постоянная Больцмана. Вихревой ток, возникающий в частице, имеет вид [9,10]

$$\mathbf{j} = e\int \mathbf{v}f\,\frac{2d^3(mv)}{h^3} = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3 e\int \mathbf{v}f_1 d^3v. \tag{5}$$

Задача сводится к отысканию отклонения f_1 функции распределения от равновесной фермиевской функции f_0, возникающего под воздействием вихревого поля (1). В линейном (по внешнему полю) приближении функция f_1 удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана [9,10]

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v}(\partial f_1/\partial\mathbf{r}) + e\mathbf{v}\mathbf{E}(\partial f_0/\partial\varepsilon) = -f_1/\tau; \tag{6}$$

здесь предполагается гармоническая зависимость от времени ($f_1 \sim \exp(-i\omega t)$), а интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации

$$(df_1/dt)_s = -f_1/\tau. \tag{7}$$

Таким образом, решая уравнение (6), найдем функцию f_1, затем ток $\mathbf{j}$ (5).

Для определения функции f_1 зададим граничное условие на сферической поверхности частицы, предполагая диффузный механизм отражения носителей заряда от границы образца (т. е. сразу после отражения функция распределения становится равновесной)

$$f_1(\mathbf{r},\mathbf{v}) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}| = a, \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{v} < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Для решения уравнения (6) используем метод характеристик [11]

$$f_1 = A\bigl(\exp(-\nu t') - 1\bigr)/\nu, \quad t' \geq 0, \tag{9}$$

где

$$\nu = 1/\tau - i\omega,$$

$$A = e\mathbf{v}\mathbf{E}\left(\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{e\omega}{2ic}\left(\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)[\mathbf{v}\mathbf{r}]\mathbf{H}_0\exp(-i\omega t). \tag{10}$$

Здесь величины A и $\mathbf{v}$ постоянны вдоль траектории (характеристики), а параметр t' имеет смысл времени движения электрона (дырки) со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль траектории от границы частицы до точки $\mathbf{r}$ и имеет вид

$$t' = \left(\mathbf{r}\mathbf{v} + \left[(\mathbf{r}\mathbf{v})^2 + (a^2 - r^2)v^2\right]^{1/2}\right)/v^2. \tag{11}$$

Соотношения (10)–(11) полностью определяют функцию $f_1(\mathbf{r},\mathbf{v})$. Найденная функция распределения позволяет рассчитать ток (5).

При вычислении тока (5) удобно перейти к сферическим координатам как в пространстве координат (r, θ, φ, полярная ось $z \parallel \mathbf{H}_0$), так и в пространстве скоростей (v, α, β, полярная ось — ось v_r). Поле $\mathbf{E}$ в сферических координатах имеет только φ-компоненту [2]

$$\mathbf{E} = E_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad E_\varphi = \frac{i\omega}{2c}rH_0\sin(\theta)\exp(-i\omega t). \tag{12}$$

Ток $\mathbf{j}$ (5) также обладает лишь φ-компонентой (линии тока — замкнутые окружности с центрами на оси z в плоскости, перпендикулярной оси z)

$$j_\varphi = -2\left(\frac{m}{h}\right)^3\frac{e^2E_\varphi}{\nu}\int\left(\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\bigl(1 - \exp(-\nu t')\bigr)v_\varphi^2 d^3v$$

$$= \Sigma_0 E_\varphi J(\xi, u_\mu), \tag{13}$$

$$J(\xi, u_\mu) = \frac{1}{I_0}\frac{x}{2z}$$

$$\times\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi \frac{\exp(u-u_\mu)[1-\exp(-z\eta)]}{[\exp(u-u_\mu)+1]^2}u^{3/2}\sin^3(\alpha)\,d\alpha\,du, \tag{14}$$

$$I_0 = \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{u}\,du}{[\exp(u-u_\mu)+1]}.$$

Здесь введены безразмерные переменные

$$z = \nu\frac{a}{v_1} = \frac{a}{v_1\tau} - \frac{ia\omega}{v_1} = x - iy,$$

$$u = \frac{\varepsilon}{kT}, \quad u_\mu = \frac{\mu}{kT},$$

$$\eta = \frac{v_1 t}{a} = \frac{\tilde{v}_1}{\sqrt{u}}\left[\xi\cos(\alpha) + \left(1 - \xi^2\sin^2(\alpha)\right)^{1/2}\right],$$

$$\xi = \frac{r}{a},$$

$$\tilde{v}_1 = I_0^{-1/2}\left(\frac{5}{3}\int\limits_0^\infty \frac{u^{3/2}du}{\exp(u-u_\mu)+1}\right)^{1/2}, \tag{15}$$

z, x и y нормированы на характерную скорость носителей заряда v_1, которая вводится следующим образом:

$$mv_1^2 = \frac{5}{3}\int v^2 f_0\,\frac{2d^3(mv)}{h^3},$$

$$v_1^2 = \frac{2kT}{m}\tilde{v}_1^2,$$

$$n = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3\int f_0 d^3v = 4\pi\left(\frac{m}{h}\right)^3\left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} I_0. \tag{16}$$

Для случая вырожденного Ферми-газа ($T \to 0$) $v_1 \to v_F$, где v_F — фермиевская скорость, определяемая выражением (16) для функции Ферми f_0 $(T \to 0)$. В другом предельном случае (при $T \to \infty$) $v_1 \to (5kT/m)^{1/2}$, т. е. имеет порядок средней тепловой скорости носителей заряда.

При условиях $a \gg \lambda$ и безразмерной частоте $y \to 0$ интеграл $J(\xi, u_\mu) \to 1$, т. е. выражение (13) переходит в локальный закон Ома.

2. Обсуждение результатов

1. В предельном случае низких температур $(u_\mu \to \infty)$ двукратный интеграл (14) сводится к однократному и имеет вид

$$J(\xi, u_\mu \to \infty) = \frac{3}{4}\frac{x}{z}\int\limits_0^\pi [1 - \exp(-z\eta)] \sin^3(\alpha) d\alpha.$$

2. В другом предельном случае, при $u_\mu \to -\infty$ (классический газ), выражение (14) также заметно упрощается за счет возможности пренебречь единицей по сравнению с экспонентой в знаменателе

$$J(\xi, u_\mu \to -\infty) = \frac{x}{\sqrt{\pi} z} \times \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \frac{[1 - \exp(-z\eta)]}{\exp(u)} u^{3/2} \sin^3(\alpha) d\alpha du.$$

3. На рис. 1 и 2 представлены зависимости абсолютной величины безразмерной плотности тока $|J|$ (14) (при $z = 0.1-0.1i$ и $0.1-10i$ соответственно) от обратной безразмерной температуры u_μ при различных значениях безразмерного расстояния $\xi = r/a$ от центра частицы. На рис. 3 и 4 для тех же значений параметров приведены зависимости фазы J от u_μ. Видно, что при низких

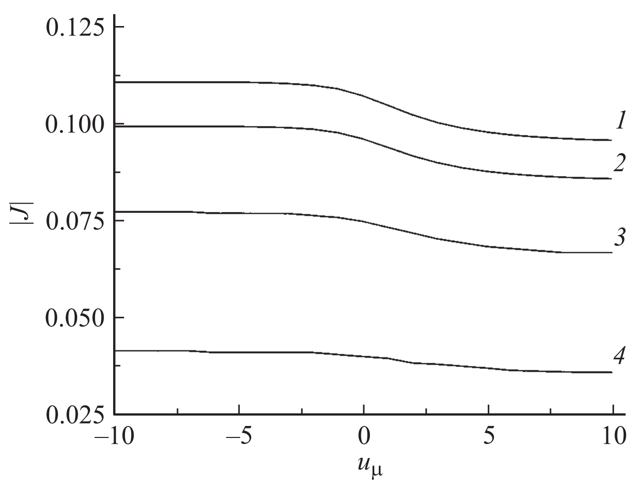

Рис. 1. Зависимость абсолютного значения безразмерной плотности тока $|J|$ от обратной безразмерной температуры u_μ при различных значениях безразмерного расстояния от центра частицы ξ (кривые *1–4* — $\xi = 0$, 0.5, 0.8, 1 соответственно) для $z = 0.1-0.1i$.

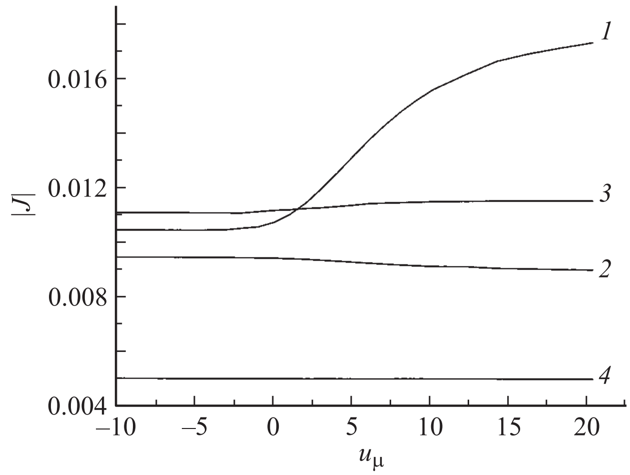

Рис. 2. То же, что на рис. 1, для $z = 0.1-10i$.

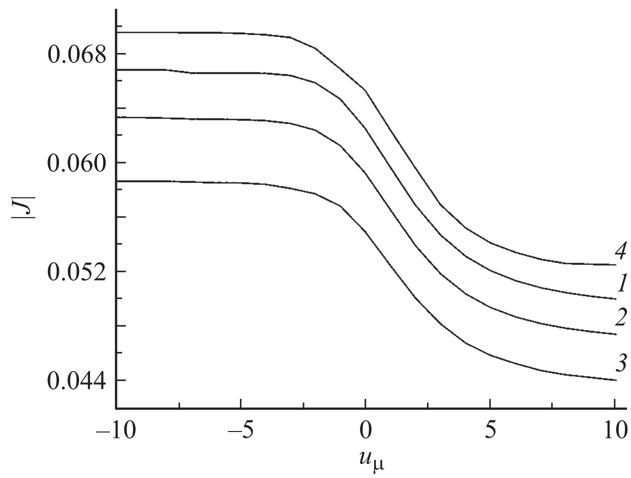

Рис. 3. Зависимость фазы J от обратной безразмерной температуры u_μ при различных значениях безразмерного расстояния от центра частицы ξ (кривые *1–4* — $\xi = 0$, 0.5, 0.8, 1 соответственно) для $z = 0.1-0.1i$.

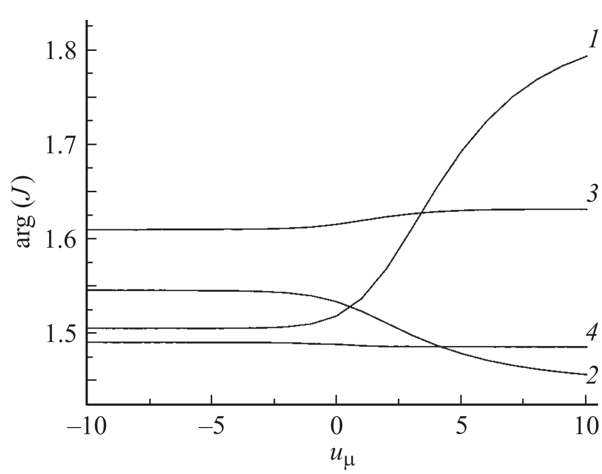

Рис. 4. То же, что на рис. 3, для $z = 0.1-10i$.

частотах (рис. 1 и 3) понижение температуры приводит к монотонному уменьшению абсолютного значения и фазы J как в центре, так и вблизи поверхности частицы. При заданной частоте поля y изменение температуры оказывает большее влияние на плотность тока в центре частицы. С увеличением частоты внешнего поля (рис. 2 и 4) наиболее существенно меняется характер температурных зависимостей безразмерной плотности тока также в центре частицы.

4. На рис. 5 построена зависимость $|J|$ от безразмерного расстояния $\xi = r/a$ при $y = 10$ и при безразмерной обратной длине свободного пробега $x = 0.1$ $(z = 0.1-10i)$ для различных значений обратной безразмерной температуры $u_\mu = \mu/kT$. На рис. 6 для тех же параметров построена аналогичная зависимость фазы $J(\xi)$. Из графиков видно, что при всех значениях u_μ зависимости модуля и фазы $J(\xi)$ имеют немонотонный характер, с приближением к границе образца модуль безразмерной плотности тока и его фаза уменьшаются.

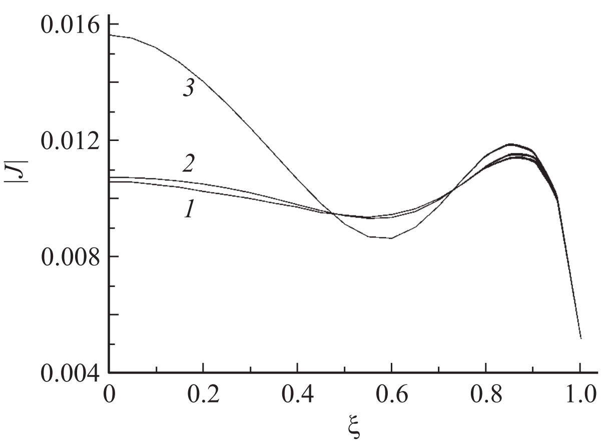

Рис. 5. Зависимость абсолютного значения безразмерной плотности тока $|J|$ от безразмерного расстояния от центра частицы $\xi = r/a$ при различных значениях обратной безразмерной температуры u_μ (кривые *1–3* — $u_\mu = -10$, 0, 10 соответственно) для $z = 0.1-10i$.

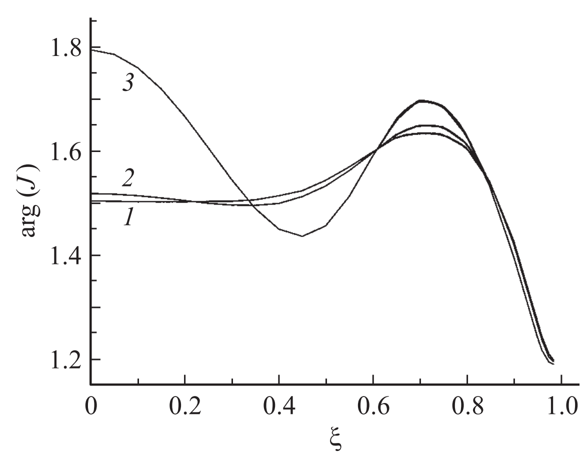

Рис. 6. Зависимость фазы J от безразмерного расстояния от центра частицы $\xi = r/a$ при различных значениях обратной безразмерной температуры u_μ (кривые *1–3* — $u_\mu = -10$, 0, 10 соответственно) для $z = 0.1-10i$.

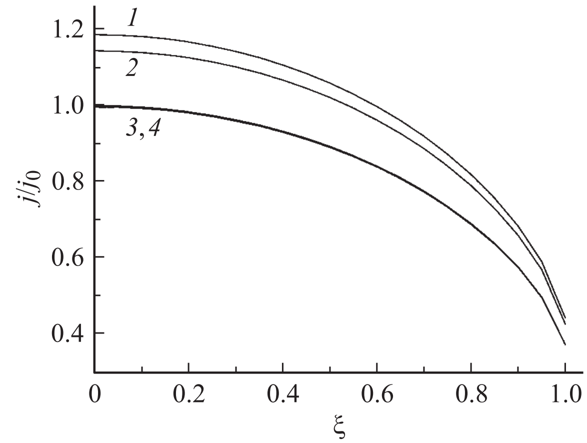

Рис. 7. Зависимость безразмерной плотности тока j/j_0 от безразмерного расстояния от центра частицы $\xi = r/a$ при различных значениях обратной безразмерной температуры u_μ (кривые *1–3* — $u_\mu = -10$, 0, 10 соответственно) для $z = 0-0.01i$. Кривая *4* — результат расчетов [6,7].

5. На рис. 7 показано влияние температуры на режим, рассмотренный в [6,7]: низкочастотное приближение $(y = 0.01)$, размер частицы a много меньше длины свободного пробега электронов λ $(x \to 0)$. Здесь плотность тока $j(\xi, u_\mu)$ (13) обезразмерена в соответствии с [6,7] на $j_0 = j(0, u_\mu \to \infty)$. При $u_\mu = 10$ (обратная безразмерная температура) построенная зависимость $j(\xi)/j_0$ (кривая *3*) совпадает с расчетами [6,7] (кривая *4*).

3. Заключение

Нагрев частицы и ее теплообмен с окружающей средой существенно зависят от распределения плотности поглощаемой энергии по объему частицы. Плотность поглощаемой энергии пропорциональна произведению плотности тока **j** на напряженность электрического поля **E**. Таким образом, в случае когда длина свободного пробега λ велика по сравнению с размером частицы a (мала безразмерная величина x), кинетические эффекты, обусловленные взаимодействием носителей заряда с границей образца, оказывают существенное влияние на нагрев и распределение температуры в частице в поле электромагнитной волны. Эти эффекты пространственного распределения источников нагрева частицы необходимо учитывать при анализе испарения частиц (в том числе в поле лазерного излучения) [12].

С уменьшением длины свободного пробега λ (увеличением x) вклад поверхностных столкновений в плотность тока по сравнению с объемными уменьшается, и в предельном случае $\lambda \ll a$ справедлива классическая теория Друде (2) [8].

Список литературы

[1] И.Д. Морохов, В.И. Петинов, Л.И. Трусов, В.Ф. Петрунин. УФН **133**, 653 (1981).
[2] А.Г. Лесскис, В.Е. Пастернак, А.А. Юшканов. ЖЭТФ **83**, 310 (1982).
[3] П.М. Томчук, Б.П. Томчук. ЖЭТФ **112**, 661 (1997).
[4] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов. ЖТФ **71**, 114 (2001).
[5] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. Наука, М. (1973).
[6] H.J. Trodahl. J. Phys. C **15**, 7245 (1982).
[7] H.J. Trodahl. Phys. Rev. **19**, 1316 (1979).
[8] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1972).
[9] Дж. Займан. Электроны и фононы. ИЛ, М. (1962).
[10] У. Харрисон. Теория твердого тела. Мир, М. (1972).
[11] Р. Курант. Уравнения с частными производными. Мир, М. (1964).
[12] Дж. Реди. Действие мощного лазерного излучения. Мир, М. (1974).