УДК 537.312

# ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В СВЕРХПРОВОДЯЩИХ СИСТЕМАХ С $d$-СПАРИВАНИЕМ

*Ю. М. Иванченко, А. А. Лисянский, А. Э. Филиппов*

Исследовано критическое поведение орторомбических высокотемпературных сверхпроводников. Методами ренормгруппового (РГ) анализа и с помощью точно решаемой модели показано, что при малом параметре квадратичной орторомбической анизотропии переход в низкотемпературную фазу является флуктуационно-индуцированным фазовым переходом первого рода. При большой анизотропии этот переход сменяется одним или двумя непрерывными переходами. Конкретный сценарий этой смены определяется соотношением параметров функционала Гинзбурга—Ландау.

В связи с недавним открытием высокотемпературных сверхпроводников [1, 2], имеющих при температурах сверхпроводящего перехода слабые орторомбические искажения кристаллической решетки (отношение разности постоянных решетки в базисной плоскости $(b-a)/b \simeq 0.02$ [3, 4]), существенно возрос интерес к исследованию характера фазовых превращений в таких системах. В особенности этот интерес стимулировался экспериментальным обнаружением в сверхпроводящих керамиках тонкой структуры сверхпроводящего перехода [5, 6]. Кроме того, указанные системы привлекли внимание также тем, что, согласно оценкам параметра Гинзбурга Gi [7], флуктуационная область в них достаточно широка (порядка градусов Кельвина) для того, чтобы впервые для сверхпроводников оказаться достижимой экспериментально. Результаты измерений флуктуационных поправок к теплоемкости неплохо согласуются с этими оценками [8].

Объяснению расщепления фазового перехода в сверхпроводящее состояние в $YBa_2Cu_3O_7$, обнаруженного в [5], была посвящена работа [9]. В ней показано, что в случае $d$-спаривания в тетрагональных системах орторомбическое слабое возмущение может привести к возникновению узкого температурного интервала, где фазовый переход расщепляется на два с образованием промежуточной фазы. В пользу возможности $d$-спаривания в $YBa_2Cu_3O_7$ свидетельствуют также эксперименты по измерению здесь найтовского сдвига на ионах Cu [10]. Приведенное в [9] объяснение расщепления перехода к сверхпроводимости тесно связано с его непрерывным характером в рамках теории среднего поля. В то же время в работе [6] было сообщено, что первый фазовый переход является скачкообразным. Причиной этого, как отмечено в работе [9], может быть взаимодействие сверхпроводящих флуктуаций с флуктуациями калибровочного электромагнитного поля [11]. В настоящей работе мы укажем на другую существенную возможность — флуктуационное индуцирование скачкообразного перехода за счет взаимодействия одних лишь сверхпроводящих флуктуаций между собой (причем в этом случае переход идет сразу в низкосимметричное состояние). Оба этих предсказания опираются на известную трактовку поведения флуктуирующей системы в тех случаях, когда уравнения РГ для нее не имеют устойчивых неподвижных точек (либо затравочные значения вершин функционала Гинзбурга—Ландау лежат вне области притяжения к устойчивой точке) [12, 13]. Предположение о фазовом переходе первого рода в этом случае, строго говоря, является гипотезой. Поэтому оно требует верификации для каждой конкретной ситуации. Предпринятая в настоящей работе проверка результатов РГ-анализа для исследуемой задачи с помощью точно решаемой модели в этой связи представляет, как нам кажется, помимо прикладного, и теоретический интерес. Этот интерес подкрепляется также тем, что используемый здесь функционал Гинзбурга—Ландау неспецифичен исключительно для ВТСП керамики. Тот же функционал возникает, например, при анализе структурного перехода в несоизмеримую фазу в $BaMnF_4$ [14]. В этом веществе обнаружен [15] скачкообразный фазовый переход, который можно трактовать как флуктуационно-индуцированный фазовый переход первого рода, поскольку теория среднего поля предсказывает здесь появление фазового перехода второго рода.

## 1. РГ-анализ

Функционал Гинзбурга—Ландау исследуемой системы имеет вид [16]

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\int\left[\tau\eta\eta^*+\beta_1(\eta\eta^*)^2+\beta_2|\eta^2|^2+\beta_3(|\eta_x|^4+|\eta_y|^4\right]d\mathbf{r}. \tag{1}$$

Для того чтобы выписать уравнения РГ, описывающие эволюцию вершин функционала $\mathscr{H}$ в критической области, представим явным образом двухкомпонентные векторы $\eta_x$ и $\eta_y$ в виде

$$\eta_x=\varphi_1+i\varphi_2,\quad \eta_y=\varphi_3+i\varphi_4. \tag{2}$$

В терминах переменных $\varphi_i$ форма четвертого порядка $\mathscr{H}_4$ в функционале $\mathscr{H}$ является некоторой формой четырехкомпонентного параметра порядка $\varphi=\{\varphi_i\}$, $i=1, 2, 3, 4$. Выбор трех базисных инвариантов этой формы в известных пределах произволен. В частности, для получения и анализа уравнений РГ удобно скомпоновать переменные $\varphi_i$ следующим образом:

$$\mathscr{H}_4=\int\Big[\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\,[(\varphi_1^2+\varphi_2^2)^2+(\varphi_3^2+\varphi_4^2)^2]+\beta_1(\varphi_1^2+\varphi_2^2)(\varphi_3^2+\varphi_4^2)+$$

$$+\beta_3\,[(\varphi_1\varphi_3+\varphi_2\varphi_4)^2-(\varphi_1\varphi_4-\varphi_2\varphi_3)^2]\Big]d\mathbf{r} \tag{3}$$

и выбрать в качестве инвариантных зарядов величины

$$u={}^1/_6\,(\beta_1+\beta_2+\beta_3),\quad \nu=\beta_1/6,\quad \mu=\beta_2/6. \tag{4}$$

В однопетлевом приближении искомые уравнения имеют вид

$$\dot u=u-5u^2-\mu^2-\nu^2,\quad \dot\nu=\nu-4u\nu-2\nu^2-4\mu^2,\quad \dot\mu=\mu\,[1-2u-4\nu]. \tag{5}$$

Для описания критического поведения необходимо прежде всего найти неподвижные точки системы (5) и исследовать их на устойчивость. Из четырех точек: 1) $\mu=\nu=0$, $u=1/5$; 2) $\mu=0$, $u=\nu=1/6$; 3а) $\mu=1/10$, $u=1/10$, $\nu=2/10$; 3б) $\mu=-1/10$, $u=1/10$, $\nu=2/10$ три (1, 3а, 3б) являются неустойчивыми, а одна, — соответствующая гейзенберговской $O(4)$-симметрии функционала $\mathscr{H}_4$, — имеет промежуточную устойчивость. Это является общим свойством систем с четырехкомпонентным параметром порядка [17]. Для выяснения вопроса об устойчивости гейзенберговской точки в таких системах необходимо исследовать уравнения РГ двухпетлевого приближения. Авторами работы [18] был выполнен общий симметрийный анализ такого типа уравнений, из которого, в частности, следует, что для функционала $\mathscr{H}_4$ (3), имеющего ортоцилиндрическую симметрию $D_2\times D_\infty$, в двухпетлевом приближении гейзенберговская точка расщепляется на неустойчивые точки. Мы будем учитывать этот результат при анализе фазового портрета системы (5), считая ниже точку «2» неустойчивой.

Для существования статической суммы с функционалом Гинзбурга—Ландау, имеющим форму четвертого порядка (3), необходимо, чтобы эта форма была положительно определенной. Можно показать, что это условие определяет следующие границы устойчивости:

$$2(\beta_1+\beta_2)+\beta_3=0,\quad \beta_1+\beta_2+\beta_3=0,\quad 2\beta_1+\beta_2=0.$$

Учитывая, что структура упорядоченной фазы определяется не самими вершинами $\beta_i$, а их отношениями, перепишем уравнения (5) для этих отношений

$$\frac{1}{u}\dot{x}=x(x-1)^2+(x-4)y^2,\quad \frac{1}{u}\dot{y}=y\left[(x-1)(x-3)+y^2\right], \tag{6}$$

где $x=\nu/u$, $y=\mu/u$. Границы устойчивости в этих переменных имеют вид соответственно: $y=-(1+x)$; $x, y\to\infty$; $y=1+x$. Двумерный характер плоскости $(x, y)$ позволяет однозначно изобразить на ней фазовый портрет системы (6) (рис. 1). Очень важно указать на нем сепаратрисы — линии, разделяющие области ухода фазовых траекторий к различным границам устойчивости $y=\pm(1+x)$ и $x, y\to\infty$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что прямые $y=\pm(x-1)$ являются особыми интегралами системы (6). Из рис. 1 видно, что они выполняют роль искомых сепаратрис. Для выяснения физического смысла этих прямых восстановим соответствующие им условия для вершин $\beta_i$: $2\beta_2+\beta_3=0$ и $\beta_3=0$, а также проанализируем кратко границы раздела фаз для функционала (1) в рамках теории среднего поля.

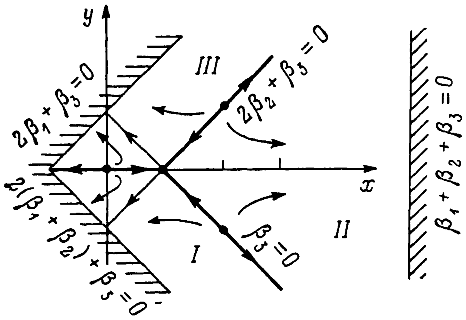


**Рис. 1. Фазовый портрет системы уравнений ренормализационной группы (6).**

Заштрихованы границы устойчивости (граница $\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$, т. е. $x, y\to\infty$ показана условно). Сепаратрисы секторов *I*, *II*, *III* выделены жирными линиями.

Такой анализ был выполнен ранее в работе [9]. Для целей настоящего раздела следует ограничиться случаем $\Delta=(\tau_x-\tau_y)/2=0$ и переписать результаты работы [9] в терминах переменных $\varphi_i$. Имеем следующие три симметрийно различные фазы и условия их реализации

$$\begin{aligned}
&\text{I.}\quad \varphi_1=\varphi_3,\quad \varphi_2=\varphi_4=0;\quad \beta_3\geqslant 0,\quad \beta_2\leqslant 0,\\
&\text{II.}\quad \varphi_1\neq 0,\quad \varphi_{k\neq 1}=0;\quad \beta_3\leqslant 0,\quad 2\beta_2+\beta_3\leqslant 0,\\
&\text{III.}\quad \varphi_1=\varphi_4,\quad \varphi_2=\varphi_3=0;\quad \beta_2\geqslant 0,\quad 2\beta_2+\beta_3\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Остальные эквивалентные структуры легко получить поворотами $(\varphi_1\pm\pm\varphi_2)/\sqrt{2}=\varkappa_{1,2}$ и т. д. Соответствующие им области на рис. 1 обозначены как секторы *I*, *II*, *III*. Очевидно, что границы различных фаз в теории среднего поля и особые интегралы $2\beta_2+\beta_3=0$ и $\beta_3=0$ совпадают.

Поскольку, согласно принятой идеологии метода РГ [12, 13], пересечение фазовыми траекториями границ устойчивости $y=-(1+x)$, $x$, $y\to\infty$ и $y=1+x$ означает флуктуационное индуцирование скачкообразных фазовых переходов в структуры *I*, *II* и *III* соответственно, то эти структуры в результате оказываются теми же, что и предсказывались теорией Ландау. Единственное отличие состоит лишь в смене рода перехода со второго на первый. Это отличие, однако, достаточно существенно при включении слабого орторомбического искажения решетки

$$\Delta\mathscr{H}=\frac{1}{2}\Delta\int d\mathbf{r}\left[|\eta_x|^2-|\eta_y|^2\right]=\frac{1}{2}\Delta\int d\mathbf{r}\left[(\varphi_1^2+\varphi_2^2)-(\varphi_3^2+\varphi_4^2)\right]. \tag{8}$$

Действительно, как было показано в работах [19, 20], слабая квадратичная анизотропия типа (8) сказывается на характере перехода пороговым образом. Т. е. вплоть до некоторого конечного $\Delta_{\min}$ фазовый переход остается скачкообразным. При $\Delta=\Delta_{\min}$ на фазовой диаграмме возникает трикритическая точка, а при $\Delta>\Delta_{\min}$ переход становится непрерывным и качественно удовлетворительно описывается теорией среднего поля.

В заключение раздела заметим, что при фазовом переходе первого рода система сразу попадает непосредственно в низкотемпературные фазы I или III (при подходящих $\beta_i$). Так что если $\Delta$ достаточно мало, то для перехода в эти фазы нет необходимости в промежуточном состоянии типа II, как это имеет место в теории среднего поля. К сожалению, метод РГ не позволяет корректно оценить величину $\Delta_{\min}$. Кроме того, предположение о скачкообразном переходе при пересечении границ устойчивости само по себе является гипотезой, требующей, строго говоря, верификации в каждом конкретном случае с помощью расчета свободной энергии. Последнее можно сделать с помощью специальным образом организованной модели, частично сохраняющей учет влияния флуктуаций. Этот расчет выполнен в следующем разделе.

## 2. Исследование модели

Для формулировки точно решаемой модели удобно несколько изменить структуру инвариантов, составленных из компонент $\varphi_i$ в функционале $\mathscr{H}_4$, а именно заметим, что

$$|\eta^2|^2=(\eta\eta^*)^2-[2(\varphi_1\varphi_4-\varphi_2\varphi_3)]^2. \tag{9}$$

Объединяя первое слагаемое в (9) с аналогичным членом в (3), получим новую вершину $\beta=\beta_2+\beta_3$, а второе слагаемое в (9) будем рассматривать в качестве нового базисного инварианта $\mathscr{H}_4$. Очевидно, что $\mathscr{H}_4$ образует теперь сумму квадратов величин $(\eta\eta^*)$, $|\eta_x|^2$, $|\eta_y|^2$ и $2(\varphi_1\varphi_4-\varphi_2\varphi_3)$ с соответствующими коэффициентами ($\beta/2$; $\beta_{2,3}/2$). Сущность модели состоит в замене интегралов типа $\int d\mathbf{r}A^2$ на $\left(\int d\mathbf{r}A\right)^2\Big/V$, эквивалентной сохранению взаимодействия флуктуаций с попарно равными волновыми векторами [21–23]. Функционалы типа $a=\int d\mathbf{r}A$ являются квадратичными относительно полей $\varphi_i$.

Использование преобразования Стратоновича—Хаббарда

$$\exp\left(-\frac{\beta}{2}a^2\right)=\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}d\alpha\exp\left[\frac{\alpha^2}{2\beta}-\alpha a\right]\Bigg/\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}d\alpha\exp\left[\frac{\alpha^2}{2\beta}\right] \tag{10}$$

позволяет линеаризовать показатель экспоненты в статической сумме

$$Z=\int D\varphi_i\exp\left[-\mathscr{H}[\varphi_i]\right]$$

относительно этих квадратичных функционалов и проинтегрировать $Z$ по $\varphi_i$ явно.

Будем для переменных интегрирования в формуле (10) при $a=(\eta\eta^*)$, $a=|\eta_{x,y}|^2$ и $a=2(\varphi_1\varphi_4-\varphi_2\varphi_3)$ использовать обозначения соответственно $\alpha$, $\rho_{x,y}$ и $\xi$. Интересующая нас квадратичная по $\varphi_i$ форма в $Z$ имеет вид

$$R=(\tau_x+\alpha+\rho_x)\varphi_1^2+2\xi\varphi_1\varphi_4+(\tau_y+\alpha+\rho_y)\varphi_4^2+$$
$$+(\tau_x+\alpha+\rho_x)\varphi_2^2-2\xi\varphi_2\varphi_3+(\tau_y+\alpha+\rho_y)\varphi_3^2=\varphi^+\hat{A}\varphi,$$

где $\varphi^+=(\varphi_1,\ \varphi_4,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$. Для интегрирования по $\varphi_i$ форму удобно диагонализовать. Поскольку матрица $\hat{A}$ является квазидиагональной с двумя одинаковыми (с точностью до знака недиагональных элементов) блоками, то она имеет пару дваждывырожденных собственных значений $\lambda^+$ и $\lambda^-$, так что квадратичная форма $R$ после диагонализации примет вид

$$R=\sum_{+,-}\lambda^{\pm}[(\chi_1^{\pm})^2+(\chi_2^{\pm})^2],$$

где

$$\lambda^{\pm}=a+\tau+\frac{\rho_x+\rho_y}{2}\pm\sqrt{\left(\Delta+\frac{\rho_x-\rho_y}{2}\right)^2+\xi^2}, \tag{11}$$
$$\tau=(\tau_x+\tau_y)/2,\quad \Delta=(\tau_x-\tau_y)/2.$$

Величины $\chi^{\pm}_{1,\,2}$ удобно объединить в два двухкомпонентных вектора $\boldsymbol{\chi}^{\pm}=(\chi_1^{\pm},\chi_2^{\pm})$, после чего форма $R$ записывается в виде

$$R=\sum_{+,-}\lambda^{\pm}(\boldsymbol{\chi}^{\pm})^2.$$

Интегрирование по $\boldsymbol{\chi}^{\pm}$ проводится элементарно. В результате для $Z$ имеем представление

$$Z\sim\int d\chi_0^{\pm}\int da\,d\rho_x d\rho_y d\xi\times$$
$$\times\exp\left\{-V\left[-\frac{a^2}{2\beta}-\frac{\rho_x^2+\rho_y^2}{2\beta_2}+\frac{\xi^2}{2\beta_2}+2\sum_{+,-}(\Phi^{\pm}+\lambda^{\pm}(\chi_0^{\pm})^2)\right]\right\}. \tag{12}$$

Здесь

$$\Phi^{\pm}=V^{-1}\sum_q\ln(\lambda^{\pm}+q^2)=-(\lambda^{\pm})^{3/2}\Theta(\lambda^{\pm})/6\pi,$$

$\Theta(\lambda^{\pm})$ — функция Хэвисайда. В формуле (12) оставлены недоинтегрированными переменные $\chi_0^{\pm}\equiv\chi^{\pm}_{\mathbf{q}=0}/\sqrt{V}$, которые могут становиться неэргодическими в окрестности точек фазовых переходов [21-23] и играть роль параметров порядка в свободной энергии $\mathscr{F}=-\ln Z$. При этом они определяются как решения уравнений состояния $\partial\mathscr{F}/\partial\chi_0^{\pm}=0$. В термодинамическом пределе $V\to\infty$ интегралы в (12) вычисляются точно методом перевала. Система уравнений для седловых точек (включая, естественно, уравнения состояния) имеет вид

$$\frac{1}{V}\partial\mathscr{F}/\partial\chi_0^{\pm}=2\chi_0^{\pm}\lambda^{\pm}=0;$$

$$\frac{1}{V}\partial\mathscr{F}/\partial a=-a/\beta+\sum_{+,-}((\chi_0^{\pm})^2-2f^{\pm})=0;$$

$$\frac{1}{V}\partial\mathscr{F}/\partial\rho_{x,y}=-\rho_{x,y}/\beta_3+\sum_{+,-}((\chi_0^{\pm})^2-2f^{\pm})\frac{\partial\lambda^{\pm}}{\partial\rho_{x,y}}=0,$$

$$\frac{1}{V}\partial\mathscr{F}/\partial\xi=\xi/\beta_2+\sum_{+,-}((\chi_0^{\pm})^2-2f^{\pm})\,\partial\lambda^{\pm}/\partial\xi=0, \tag{13}$$

где

$$f^{\pm}=\partial\Phi^{\pm}/\partial\lambda^{\pm}=-\sqrt{\lambda^{\pm}}\,\Theta(\lambda^{\pm})/4\pi.$$

Непосредственное дифференцирование дает

$$\frac{\partial\lambda^{\pm}}{\partial\rho_x}=\frac{\partial\lambda^{\mp}}{\partial\rho_y}=\frac{1}{2}\left[1\pm\frac{2\Delta+\rho_x-\rho_y}{\lambda^+-\lambda^-}\right],\quad \frac{\partial\lambda^{\pm}}{\partial\xi}=\frac{\pm2\xi}{\lambda^+-\lambda^-}.$$

Для аналитического решения удобно переписать систему (13) несколько компактнее

$$\chi_0^{\pm}\lambda^{\pm}=0,$$
$$(\rho_x+\rho_y)/\beta_3=a/\beta=\sum,$$

$$(\rho_x - \rho_y)/\beta_3 = \frac{2\Delta + (\rho_x - \rho_y)}{\lambda^+ - \lambda^-} D,$$

$$\xi \left[ \frac{1}{\beta_2} + \frac{2D}{\lambda^+ - \lambda^-} \right] = 0, \tag{14}$$

где введены обозначения

$$\sum = \sum_{+,-} [(\chi_0^\pm)^2 - 2f^\pm], \quad D = [(\chi_0^+)^2 - f^+] - [(\chi_0^-)^2 - 2f^-].$$

Из (13) непосредственно видно, что существуют два вида решений: 1) $\chi_0^\pm \neq 0$, $\lambda^\pm = 0$; 2) $\chi_0^+ = 0$, $\chi_0^- \neq 0$ при $\lambda^+ \neq 0$, $\lambda^- = 0$ (и наоборот: «+» $\leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ «—»). Кроме того, каждый из них имеет две ветви, определенные выбором $\xi = 0$ или $\xi \neq 0$.

Расчеты искомых величин на каждой из этих ветвей опираются на элементарную, но громоздкую алгебру. Приведем лишь окончательные выражения:

1а. $\chi_0^\pm \neq 0$, $\lambda^\pm = 0$, $\xi = 0$

$$\frac{1}{2} (\chi_0^\pm)^2 = -\frac{\tau}{\beta + \beta_3} \pm \frac{\Delta}{\beta_3}, \tag{15}$$

$$\mathscr{F}_{\mathrm{I}a} = -\frac{1}{4} \left[ \frac{\tau^2 (2\beta + \beta_3)}{(\beta + \beta_3)^2} + \frac{\Delta^2}{\beta_3} \right], \tag{16}$$

1б. $\chi_0^\pm \neq 0$, $\lambda^\pm = 0$, $\xi \neq 0$

$$(\chi_0^\pm)^2 = -\tau \frac{\beta + \beta_3}{\beta (2\beta + \beta_3)}, \tag{17}$$

$$\mathscr{F}_{\mathrm{I}b} = -\frac{1}{4} \left[ \frac{\tau^2}{2\beta + \beta_3} + \frac{\Delta^2}{2\beta_2 + \beta_3} \right], \tag{18}$$

2а. $\chi_0^+ = 0$, $\chi_0^- \neq 0$, $\lambda^+ \neq 0$, $\lambda^- = 0$, $\xi = 0$

$$\sqrt{\lambda_{1,2}^+} = \sqrt{\lambda_c^+} \left[ 1 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{(2\beta + \beta_3)\Delta}{(\beta + \beta_3)\lambda_c^+}\right)\left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right)} \right], \tag{19}$$

$$\sqrt{\lambda_c^+} = \frac{\beta_3 (2\beta + \beta_3)}{4\pi (\beta + \beta_3)}, \quad \tau_c = \left[ \frac{2\beta + \beta_3}{\beta + \beta_3} \Delta + \lambda_c^+ \right] \frac{(\beta + \beta_3)}{(-\beta_3)}, \tag{20}$$

$$(\chi_{1,2}^-)^2 = -\frac{1}{\beta + \beta_3} \left[ \tau - \Delta + \frac{\beta \sqrt{\lambda_{1,2}^+}}{2\pi} \right], \tag{21}$$

$$\mathscr{F}_{\mathrm{II}} = -\frac{1}{4} \left[ \frac{(\lambda^+ - 2\tau)^2}{2\beta + \beta_3} + \frac{(\lambda^+ - 2\Delta)^2}{\beta_3} \right] + 2\Phi^+, \tag{22}$$

2б. $\chi_0^+ = 0$, $\chi_0^- \neq 0$, $\lambda^+ \neq 0$, $\lambda^- = 0$, $\xi \neq 0$

$$\sqrt{\lambda_{1,2}^+} = \sqrt{\lambda_c^+} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \tau/\tau_c} \right], \tag{23}$$

$$\sqrt{\lambda_c^+} = -\frac{\beta_2 (2\beta + \beta_3)}{\pi (2\beta_1 + \beta_3)}, \quad \tau_c = \frac{2\beta_1 + \beta_2}{4\beta_2} \lambda_c^+, \tag{24}$$

$$(\chi_{1,2}^-)^2 = \frac{\sqrt{\lambda_{1,2}^+}}{2\pi\beta_2} \left[ \pi \sqrt{\lambda_{1,2}^+} + \beta_2 \right], \tag{25}$$

$$\mathscr{F}_{\mathrm{III}} = -\frac{1}{4} \left[ \frac{(\lambda^+ - 2\tau)^2}{2\beta + \beta_3} - \frac{(\lambda^+)^2}{2\beta_2} + \frac{(2\Delta)^2}{2\beta_2 + \beta_3} \right] + 2\Phi^+. \tag{26}$$

Легко видеть, что первая пара решений (15)—(18) описывает фазовый переход второго рода при $\tau = 0$ (или $\tau \sim 0\ (\Delta)$). Что же касается второй пары решений, то они возникают при некотором $\tau_c$ таким образом, что у свободной энергии $\mathscr{F}_{\mathrm{II}}$ (или $\mathscr{F}_{\mathrm{III}}$) появляется точка перегиба, соответствующая $\sqrt{\lambda_{1,2}^+} = \sqrt{\lambda_c^+}$ с последующим расщеплением ее на пару экстремумов (определяемых величинами $\sqrt{\lambda_1^+}$ и $\sqrt{\lambda_2^+}$) в точках $\chi_{1,2}^-$. Иными словами, структура $\mathcal{F}_{II}$ и $\mathcal{F}_{III}$ характерна для фазовых переходов первого рода.

Нашей ближайшей целью будет сравнение результатов, полученных из модели и РГ-анализа. Для этого достаточно ограничиться пределом $\Delta=0$ и рассмотреть вначале лишь вторую пару решений (19)—(26). Заметим, что упорядочению типа $\chi_0^+=0$, $\chi_0^-\neq 0$ при $\xi=0$ соответствует структура II (см. (7)) $\varphi_1\neq 0$, $\varphi_{k\neq 1}=0$, тогда как при $\xi\neq 0$ (а именно $\xi=\sqrt{\lambda^+/2}$) этому упорядочению соответствует структура III, где $\varphi_1=\varphi_4$, $\varphi_2=\varphi_3=0$. Согласно неравенствам (7), в теории среднего поля эти структуры выгодны энергетически соответственно в секторах *II* и *III* (рис. 1). Покажем, что то же имеет место и в модели. Для этого воспользуемся тем, что при $\Delta=0$ функционал Гинзбурга—Ландау имеет дополнительную симметрию относительно одновременной замены вершин $(-\beta_3)\leftrightarrow 2\beta_2$ и поворотов

$$\frac{\varphi_1\pm\varphi_4}{\sqrt{2}}=\psi_{1,4},\quad \frac{\varphi_2\pm\varphi_3}{\sqrt{2}}=\psi_{2,3}. \tag{27}$$

Повороты (27) переводят друг в друга структуры II и III, тогда как замена $(-\beta_3)\leftrightarrow 2\beta_2$ инверсирует секторы *II* и *III* относительно линии их раздела $2\beta_2+\beta_3=0$.

Можно убедиться, что решения (19)—(22) и (23)—(26) удовлетворяют указанной симметрии при $\Delta=0$ и переходят друг в друга при соответствующих преобразованиях. Таким образом, достаточно проанализировать одно (любое) из них и сделать заключение о его выгодности исходя из знака неравенства $2\beta_2+\beta_3\lessgtr 0$.

Минимум свободной энергии располагается в точке $\chi^-$, задаваемой решением $\sqrt{\lambda_1^+}=\sqrt{\lambda_c^+}\,[1+\sqrt{1-\tau/\tau_c}]$. Впервые он возникает (как точка перегиба) на перегревной спинодами при $\tau=\tau_c$ и соответственно

$$(\chi_c^-)_{II}=\sqrt{2\beta+\beta_3}\,\frac{\beta_3}{4\pi\,(\beta+\beta_3)}\ (\text{II}\leftrightarrow\text{III}\ \text{ при }\ (-\beta_3)\leftrightarrow 2\beta_2). \tag{28}$$

От начала координат $(\chi_0^-=0)$ он отделен барьером, положение которого $\chi_2^-$ определяется вторым корнем $\sqrt{\lambda_2^+}$. Этот барьер исчезает на спинодали переохлаждения, когда $\chi_2^-$ обращается в нуль при температуре такой, что

$$\tau_{\text{кр}_{II}}=-\beta\beta_3/(2\pi)^2\ \ (\text{II}\leftrightarrow\text{III}). \tag{29}$$

Скачок параметра порядка $\chi_{\text{кр}}^-$ при этом равен

$$(\chi_{\text{кр}}^-)_{II}=-\beta_3\sqrt{\beta}/2\pi\,(\beta+\beta_3)\ \ (\text{II}\leftrightarrow\text{III}). \tag{30}$$

Пусть для определенности $2\beta_2+\beta_3>0$. Используя описанное выше свойство симметрии, нетрудно убедиться, что при этом нетривиальное решение III возникает раньше $\left(\text{т. е. } \tau_{c_{III}}>\tau_{c_{II}} \text{ при обоих } \tau_c>0\right)$ и достигает спинодали переохлаждения при более высокой $\tau_{\text{кр}}\left(\tau_{\text{кр}_{III}}>\right.$ $\left.>\tau_{\text{кр}_{II}} \text{ при } \tau_{\text{кр}}>0\right)$. Причем, когда система находится между спинодалями перегрева и переохлаждения, минимум $\mathcal{F}_{III}$ лежит ниже, чем минимум $\mathcal{F}_{II}$. Иначе говоря, в рамках модели фазы II и III оказываются выгодными в тех же секторах, что и в теории среднего поля или в РГ. Поскольку при $\beta_2>0$ и $\beta_3<0$ обе $\tau_{\text{кр}}>0$, то переход в любую из этих структур происходит во всяком случае при $\tau>0$, так что решения «1а» и «1б» для модели не могут составить здесь конкуренции только что исследованным решениям «2а» и «2б».

Если же оба неравенства обратны (т. е. $\beta_2<0$ и $\beta_2>0$, так что параметры $\beta_i$ лежат в секторе *I* на рис. 1), то не только обе $\tau_{\text{кр}}<0$, но и сами решения для $\sqrt{\lambda_{1,2}^{+}}$ и $\chi_{1,2}^-$ оказываются лишенными физического смысла (по крайней мере при $\tau\to+\infty$). Единственно приемлемы в этом случае оказывается решение с фазовым переходом 2-го рода. Для определения областей параметров $\beta_i$, в которых «работают» ветви решения «1а» или «1б», сравним свободные энергии $\mathscr{F}_{Ia}$ (1 ) и $\mathscr{F}_{Ib}$ (18). Интересно отметить при этом, что, хотя при $\Delta \to 0$ величина $\xi \neq 0$, на второй ветви ($\xi \sim \Delta$) также стремится к нулю. Формально это похоже на подход к решению к ветви «1a». Однако при $\Delta = +0$ энергии $\mathscr{F}_{Ia}$, $\mathscr{F}_{Ib}$ отличаются на конечную величину, так что

$$\left|\frac{\mathscr{F}_{Ia}}{\mathscr{F}_{Ib}}\right| = \left(\frac{2\beta+\beta_3}{\beta+\beta_3}\right)^2.$$

Имеем в результате, что при $\beta > 0$ (т. е. $\beta_1 > -\beta_2$ или $x > -y$ на рис. 1) реализуется решение «1a», а в противном случае решение «1б».

Вернемся снова к более общей ситуации с $\Delta \neq 0$. Проще всего это сделать для двух первых ветвей решения. Поскольку в секторе $I$ имеют место неравенства $\beta_2 < 0$, $\beta_3 > 0$, то, как видно из формул (16) и (18), наличие $\Delta^2 > 0$ улучшает условия реализации ветви «1a» за счет «1б». С другой стороны, на ветви «1a» обе величины $(\chi_0^\pm)^2$ отличны от нуля одновременно (а это необходимо здесь) только начиная с $\tau = -(\beta+\beta_3)|\Delta|/\beta_3 < 0$, тогда как нетривиальное решение «1б» возникает при $\tau = 0$. Это позволяет так подобрать параметры $\Delta$ и $\beta_i$, чтобы вначале при $\tau = 0$ возникала структура с одинаковыми $\chi_0^+$ и $\chi_0^-$, а затем происходило их расщепление с переходом в энергетически более выгодную фазу $\chi_0^+ \neq \chi_0^-$. Противоречие с результатами метода РГ в этом секторе, однако, указывает на то, что скорее всего описанный процесс является специфическим свойством модели, имеющей все-таки несколько условную природу.

Более убедительными выглядят результаты для секторов $II$ и $III$ (рис. 1), где выводы РГ и модели совпадают. При $\Delta \neq 0$ отмеченная выше симметрия между решениями «2a» и «2б» исчезает. Рассмотрим поэтому вначале случай «2a». Если $\Delta \gg \lambda_c^+$, то, согласно (20), величина $\tau_c$ стремится к $\tau_c = (2\beta+\beta_3)\Delta/(-\beta_3)$. При этом из (21) следует, что

$$(\chi_c^-)^2 \to -\frac{1}{\beta+\beta_3}|\tau_c - \Delta| = \frac{2\Delta}{\beta_3} < 0.$$

Т. е. при любом соотношении параметров $\beta_i$ в секторе II найдется такое $\Delta_{\min}$, при котором точка перегиба свободной энергии будет возникать сразу при $(\chi^-)^2 = 0$. Для $\Delta > \Delta_{\min}$ фазовый переход в состояние с $\varphi_{k\neq 1} = 0$, $\varphi_1 \neq 0$ будет уже фазовым переходом 2-го рода. Обратимся теперь к случаю «2б». Формулы (23)—(25) не содержат параметра $\Delta$, и на первый взгляд различие $\tau_x$ и $\tau_y$ никак не сказывается на этой ветви решения. Это, однако, не так. При $\Delta \neq 0$ величина $\xi \neq 0$ определяется соотношением

$$\xi^2 = \left(\frac{\lambda^+}{2}\right)^2 - \Delta^2\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2+\beta_3}\right)^2,$$

и при достаточно большом $\Delta$ она становится мнимой. Напомним теперь, что поля $\chi^\pm$ возникли после диагонализации квадратичной формы, состоящей из полей $\varphi_i$ с собственными значениями (11). Матрица этого преобразования квазидиагональная и содержит два одинаковых с точностью до замены $\xi \to -\xi$ блока вида

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{2}\,B^{1/2}(1+B)^{1/2}}\begin{pmatrix} 1+B & -P \\ P & 1+B \end{pmatrix}, \quad \det \hat{S} = 1,$$

где

$$P = \pm 2\xi/(\Delta + (\rho_x - \rho_y)/2), \quad B = \sqrt{1+P^2}.$$

Возвращаясь к нашей конкретной ситуации, когда отлично от нуля лишь поле $\chi_0^-$, получаем поля $\varphi_1$ и $\varphi_4$ в виде $\varphi_1 \sim \xi\chi_0^-$, $\varphi_4 \sim \chi_0^-$. Если величина $\xi$ мнимая, то одна из переменных $\varphi_i$ также окажется мнимой. Однако при построении функционала (3) все $\varphi_i$ предполагались вещественными. Таким образом, при достаточно большом $\Delta$ решение с $\xi \neq 0$ и $\chi_0^+ = 0$ становится некорректным. В то же время при $\Delta = (2\beta_2+\beta_3)\lambda^+/4\beta_2$ величина $\xi$, прежде чем стать мнимой, обращается в нуль, так что существует возможность перехода на ветвь решения с $\xi = 0$, $\varphi_i \neq 0$, $\varphi_{j\neq i} = 0$. Это решение, как уже отмечалось, дает плавное вырождение скачкообразного перехода в непрерывный.

Последние предсказания модели хорошо стыкуются как со следствиями РГ-анализа, так и с выводами работы [9]. Во-первых, флуктуационно-индуцированный фазовый переход первого рода имеет место вплоть до некоторого порогового $\Delta_{\min}$. Во-вторых, если низкотемпературной фазой является структура $\eta=(1, 0)$, то при $\Delta=\Delta_{\min}$ этот переход плавно сменяется непрерывным переходом в ту же фазу. Если же низкосимметричная структура описывается параметром порядка типа $\eta=(1, i)$, то непосредственный переход в нее возможен лишь как скачкообразный. При больших $\Delta$, когда флуктуации одного из полей $\eta_{x,y}$ сильно подавлены, этот переход должен расщепиться на два, как это предсказывает теория среднего поля.

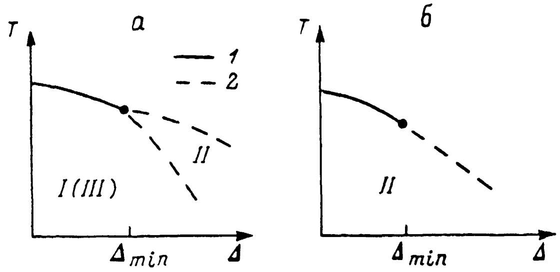


**Рис. 2. Возможные виды фазовых диаграмм.**

*а* — для низкотемпературных фаз типа I или III, *б* — для фазы типа II. *1*, *2* — линии фазовых переходов 1-го и 2-го рода соответственно.

Суммируя результаты всех трех подходов (РГ, модели и среднего поля), картину фазового перехода к сверхпроводимости в системах с $d$-спариванием и слабой орторомбичностью можно представить фазовыми диаграммами (рис. 2).

В заключение отметим, что недавно нам стала известной работа [24], в которой уравнения РГ получены для функционала (1) с учетом анизотропии квадратичной по градиентам части

$$\delta\mathscr{H} = \gamma \int d^d k k_x k_y \left(\eta_x \eta_y^* + \eta_y \eta_x^*\right).$$

При этом к уравнениям (5) возникают добавки вида

$$\delta\dot{u} = -2u(\mu + 2\nu)\,\delta, \quad \delta\dot{\nu} = -2(\nu^2 + 2\mu\nu + 2u^2)\,\delta, \quad \delta\dot{\mu} = -(u^2 + \nu^2 + 5\mu^2)\,\delta,$$

где параметр $\delta$ пропорционален анизотропии $\gamma^2$. Появление этих добавок не приводит, однако, к существенной трансформации фазового портрета. В частности, можно проверить, что сепаратриса секторов *II* и *III* $(2\beta_2 + \beta_3 = 0)$ остается той же и для усложненных уравнений РГ. В результате качественные предсказания, сделанные выше, сохраняют свою силу.

## Список литературы


[1] Wu M. K., Ashburn J. R. et al. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. N 9. P. 908—910.
[2] Tsurumi S., Hikita M. et al. // Jap. J. Appl. Phys. 1987. V. 26. N 5. P. L856—L857.
[3] Jorgensen J. D., Beno M.A. et al. // Phys. Rev. B. 1987. V. 36. N 7. P. 3608—3616.
[4] Сухаревский Б. Я., Шаталова Г. Е. и др. // ФНТ. 1987. Т. 13. № 9. С. 992—995.
[5] Inderhees S. E., Salamon M. B. et al. // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. N 11. P. 1170—1172.
[6] Butera R. A. // Phys. Rev. B. 1988. V. 37. N 9. P. 5909.
[7] Lobb S. J. // Phys. Rev. B. 1987. V. 36. N 7. P. 3930—3932.
[8] Salamon M. B., Inderhees S. E. // Phys. Rev. B. 1988. V. 38. N 1. P. 885—888.
[9] Воловик Г. Е. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 48. № 1. С. 39—42.
[10] Takigava M., Hammel P. C., Heffner R. H., Fisk Z. // Preprint, Los Alamos Nat. Lab., 1988.
[11] Halperin B. I., Lubensky T. C., Ma S.-K. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. N 6. P. 292—295.

[12] Бразовский С. А., Дзялошинский И. Е. // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. № 6. С. 360—364.
[13] Bak P., Krinsky S., Mukamel D. // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36. N 1. P. 52—55.
[14] Dvorak V., Fousek J. // Phys. St. Sol. (a). V. 61. N 1. P. 99—105.
[15] Pisarev R. V., Krichevtzov B. B., Markovin P. A. et al. // Phys. Rev. B. 1983. V. 28. P. 2677—2685.
[16] Воловик Г. Е., Горьков Л. П. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 4. С. 1412—1428.
[17] Brezin E., Le Gullou J. C., Zinn Justin J. // Phys. Rev. B. 1974. V. 10. N 3. P. 892—900.
[18] Toledano J. C., Michel L., Toledano P., Bresin E. // Phys. Rev. B. 1985. V. 31. N 11. P. 7171—7196.
[19] Kerszberg M., Mukamel D. // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43. N 4. P. 293—296.
[20] Blankschtein D., Mukamel D. // Phys. Rev. B. 1982. V. 25. N 11. P. 6939—6951.
[21] Ivanchenko Yu. M., Lisyanskii A. A., Filippov A. E. // Phys. Lett. A. 1986. V. 119. N 2. P. 55—59.
[22] Иванченко Ю. М., Лисянский А. А., Филиппов А. Э. // ТМФ. 1987. Т. 71. № 3. С. 441—450.
[23] Иванченко Ю. М., Лисянский А. А., Филиппов А. Э. // ТМФ. 1987. Т. 72. № 1. С. 149—154.
[24] Голуб А. А., Маштаков О. Ю. // I Всес. совещ. по ВТСП. Харьков, 1988. Т. 1. С. 62—63.

Донецкий физико-технический
институт АН УССР
Донецк

Поступило в Редакцию
30 января 1989 г.
В окончательной редакции
23 мая 1989 г.