

УДК 537.226

## О СПЕКТРЕ КОЛЕБАНИЙ ДОМЕННЫХ ГРАНИЦ В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАХ-СЕГНЕТОЭЛАСТИКАХ

В. Н. Нечаев, А. М. Рошупкин

Исследованы изгибные колебания доменных границ в сегнетоэлектриках-сегнетоэластиках. Показано, что скорость волн, локализованных на доменной границе, монотонно изменяется от скорости рэлеевской волны для материала с данными упругими свойствами при распространении волны в направлении, перпендикулярном вектору спонтанной поляризации  $P_s$ , до скорости поперечного звука при распространении волны вдоль  $P_s$ .

Исследованию свойств поверхностных упругих волн в твердых телах в последнее время уделяется большое внимание в связи с широким применением их в акустоэлектронике. Отличие задачи о волнах, локализованных на доменных или межфазных границах, от классических задач о волнах Рэлея, Лява, Стоунли [1] состоит в том, что в первом случае необходимо учитывать движение самих границ как самостоятельных объектов, обладающих определенными инерционными свойствами и жесткостью по отношению к изгибу. В [2] рассматривались колебания доменных границ в сегнетоэлектриках. В этой работе было установлено, что вследствие кулоновского взаимодействия электрических зарядов, возникающих при изгибных колебаниях границы, она обладает нелокальной эффективной жесткостью  $c \propto 1/k$ , где  $k$  — модуль волнового вектора изгибной волны. Поскольку доменной границе в указанной работе приписывалась локальная масса  $m_l$ , то частоты собственных колебаний границы оказывались  $\propto k \sqrt{c/m} \propto k^{1/2}$ .

В работе [3] применительно к этой задаче показано, что сопутствующее колебаниям границы переменное электрическое поле через пьезоэлектрическую связь вовлекает в движение слой материала толщиной  $\sim 1/k$  вблизи границы. Учитываемая таким образом инерция среды существенно перенормирует эффективную массу границы, делая ее нелокальной и, так же как и  $c$ , пропорциональной  $\propto 1/k$ . Это приводит к изменению по отношению к результатам работы [2] зависимости частоты колебаний границы от волнового вектора  $k$ , которая при учете инерционных свойств среды становится линейной по  $k$ .

В работе [4] точно решена задача о длинноволновых колебаниях доменных границ в сегнетоэластиках. В [5] поставлена задача исследования изгибных колебаний доменных границ в сегнетоэлектриках-сегнетоэластиках. Однако решение системы уравнений теории упругости в [5] не отвечает поставленной задаче, а именно необоснованно полагается, что упругие поля, возникающие при колебаниях границы, удовлетворяют условиям: а) вектор упругого смещения точек среды  $\mathbf{u}$  в обозначениях этой работы не зависит от координаты  $z$ ; б) колебания среды не сопровождаются дилатацией материала  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ . Кроме того, в [5] не учитывалось то обстоятельство, что домены в сегнетоэлектрике-сегнетоэластике различаются не только спонтанной поляризацией  $P_s$ , но и спонтанной деформацией  $u_{ik}^s$ . Таким образом, вопрос об изгибных колебаниях доменных границ в сегнетоэлектриках-сегнетоэластиках в настоящее время является открытым.

Цель настоящей работы — восполнить существующий в литературе пробел. В отличие от чистого сегнетоэластика в этом случае наряду с эффективной жесткостью доменных границ, обусловленной возникновением при их прогибе упругих полей [4], необходимо учитывать вклад в жесткость кулоновского отталкивания электрических зарядов, также возникающих при их прогибе.

Исходная система уравнений включает уравнения электростатики (запаздыванием электромагнитного поля в задачах о колебаниях границ, как показано в [3], можно пренебречь)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi q, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

динамическое уравнение теории упругости

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = f_i \quad (2)$$

и уравнение движения доменной границы в сегнетоэлектрике-сегнетоэластике [6]

$$\{\mathbf{E}\} [P_s] + \{\sigma_{ik}\} [u_{ik}^s] = 0, \quad (3)$$

представляющее собой обобщение на динамический случай условия равенства нулю конфигурационной силы в каждой точке границы. Система уравнений (1)–(3), дополненная материальными соотношениями [7, с. 104]

$$u_{ik} = \mu_{iklm} \sigma_{lm} + \gamma_{lik} E_l, \quad (4)$$

$$D_i = 4\pi P_{si} + \varepsilon_{ik} E_k + 4\pi \gamma_{ikl} \sigma_{kl}, \quad (5)$$

связывающими тензор напряжений  $\sigma_{ik}$  и тензор деформаций  $u_{ik}$  с вектором электрической индукции  $\mathbf{D}$  и напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , образует полную систему соотношений, описывающую колебания доменных границ и элементов объема сегнетоэлектрика-сегнетоэластика. Здесь  $q$  — плотность электрических зарядов;  $\rho$  — плотность вещества кристалла;  $f_i$  — плотность объемных сил, действующих на элементы кристалла;  $\lambda_{iklm}$ ,  $\mu_{iklm}$  — тензоры упругих модулей и упругих податливостей;  $\varepsilon_{ik}$  — тензор диэлектрической проницаемости;  $\gamma_{lik}$  — тензор пьезоэлектрических констант;  $[P_s] = P_s^{(2)} - P_s^{(1)}$  — скачок вектора спонтанной поляризации, а  $[u_{ik}^s] = u_{ik}^{s(2)} - u_{ik}^{s(1)}$  — скачок тензора спонтанной деформации при переходе через границу, разделяющую домены 1 и 2. Фигурные скобки в выражении (3) обозначают полусумму значений стоящей в них величины по обе стороны от границы в непосредственной близости от нее. Отметим, что в работе [5] при исследовании изгибных колебаний границы использовано неправильное выражение для конфигурационной силы, содержащее лишь первый член выражения (3) и пренебрежимо малые в подавляющей области значений волновых векторов  $k$  слагаемые, связанные с микроструктурой границы.

Вводя в рассмотрение электрический потенциал  $\varphi$  ( $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ ) и используя материальные соотношения (4), (5), перепишем уравнения (1), (2) следующим образом:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} - \varepsilon_{lik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \partial x_k} = f_i, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \partial x_k} - 4\pi \gamma_{ikl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_i} = -4\pi q. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение  $g_{lik} = \lambda_{iklm} \gamma_{lnm}$ . Представим электрический потенциал в виде суммы двух слагаемых  $\varphi = \varphi' + \varphi''$ , где  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  соответственно удовлетворяют уравнениям

$$\varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x_l \partial x_k} - 4\pi \gamma_{ikl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_i} = 0, \quad (8)$$

$${}_{ik} \partial x_i \overline{\partial x_k} = -4\pi q. \quad (9)$$

Часть электрического поля, описываемая потенциалом  $\varphi'$ , как легко видеть, приводит к перенормировке упругих модулей (см., например, [7, с. 111])

$$\lambda_{iklm}^{\text{эфф}} = \lambda_{iklm} + \frac{\lambda_{ikst} \gamma_{jst} \gamma_{npq} \lambda_{pqlm}}{\varepsilon_{ik} k_i k_k} k_j k_n.$$

Потенциал  $\varphi''$ , согласно (9), полностью определяется электрическими зарядами, возникающими на поверхности доменной границы при ее прогибе [3]:  $\rho = -[\mathbf{P}_s] \mathbf{n} \delta(\zeta)$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к границе;  $\zeta$  — координата, описывающая смещение границы вдоль нормали  $\mathbf{n}$ .

Учитывая сказанное выше, представим  $u_i$  в виде  $u_i = u'_i + u''_i$ ,

$$\rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} = \lambda_{iklm}^{\text{эфф}} \frac{\partial^2 u'_m}{\partial x_k \partial x_l} + f_i, \quad (10)$$

$$\lambda_{iklm}^{\text{эфф}} \frac{\partial^2 u''_m}{\partial x_k \partial x_l} + g_{lik} \frac{\partial^2 \varphi''}{\partial x_l \partial x_k} = 0. \quad (11)$$

Вектор  $u''$  описывает ту часть деформации кристалла, которая отслеживает электрическое поле, создаваемое границей, не вызывая в нем напряжений (см. (4)), и, следовательно, не дает вклада в конфигурационную силу (3).

Перейдем теперь к решению упругой задачи. Поскольку в выражение для конфигурационной силы входят напряжения, то задачу удобно сформулировать в напряжениях. Для этого необходимо в условии совместности полных деформаций Сен-Венана выразить, используя закон Гука, тензор упругих деформаций через тензор напряжений и учесть уравнение равновесия (10). Выводу такого уравнения для упругоизотропного случая посвящена статья [8]. В результате получаем динамическое уравнение Бельтрами, обобщенное на случай несовместных деформаций

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c_i^2} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial t^2} - \frac{1}{2(1+\nu)} \delta_{ik} \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial t^2} \right) - \Delta \sigma_{ik} - \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \Delta \sigma_{ll} \right) = \\ & = \rho \frac{\partial}{\partial t} (j_{ik} + j_{ki} - \delta_{ik} j_{ll}) - 2\mu \eta_{ik}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $c_i$  — скорость поперечного звука,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\mu$  — модуль сдвига,

$$\eta_{ik} = \varepsilon_{kjn} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho_{in} - \frac{1}{2} \delta_{in} \rho_{ll} \right)$$

— тензор несовместности деформаций [9], связанный с тензором плотности двойникующих дислокаций  $\rho_{ik}$ , возникающих при прогибе границы [10]

$$\rho_{in} = \varepsilon_{ilm} n_l [u_{mn}^s] \delta(\zeta),$$

$\varepsilon_{ilm}$  — символ Леви-Чивита,

$$j_{ik} = V [u_{ik}^s] \delta(\zeta)$$

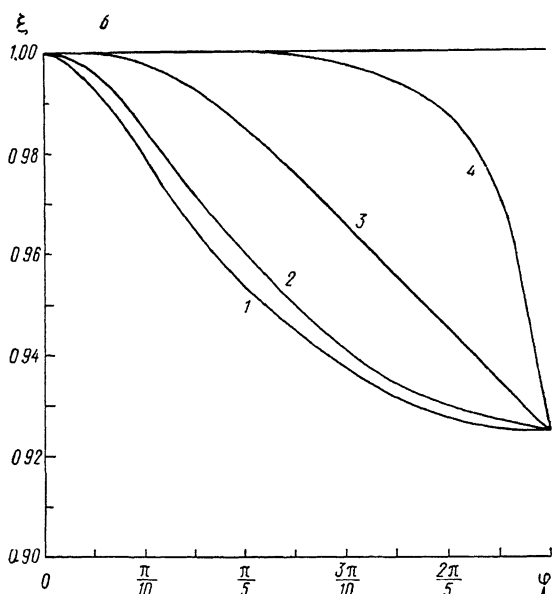
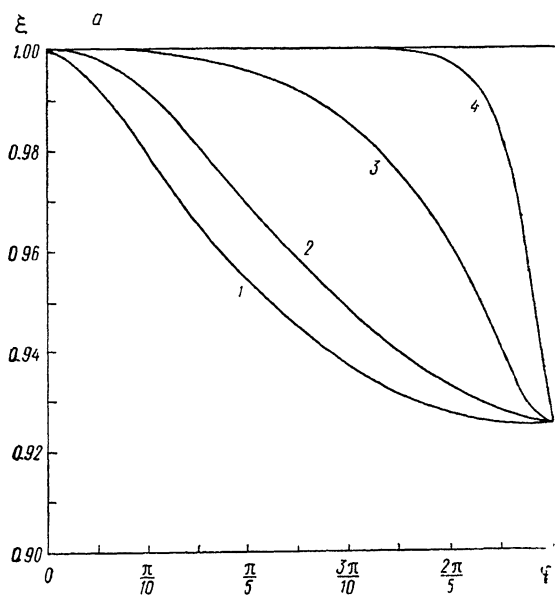
— тензор плотности потока двойникующих дислокаций [10],  $V$  — проекция скорости движения границы на направление нормали  $\mathbf{n}$ .

Будем предполагать, что равновесное положение границы совпадает с координатной плоскостью  $(x, y)$ , вектор спонтанной поляризации  $\mathbf{P}_s$  направлен вдоль оси  $x$ , тензор спонтанной деформации имеет отличные от нуля компоненты  $u_{ik}^s = 1/2 u_0 (\delta_{i2} \delta_{k3} + \delta_{i3} \delta_{k2})$ . Определяя в линейном по смещению границы из равновесного положения приближении  $\varphi$  и  $\sigma_{ik}$  из уравнений (9), (12) и подставляя в (3), находим уравнение колебаний границы. Решение аналогичной системы уравнений отдельно в сегнетоэластиках и сегнетоэлектриках подробно описано в [3, 4], поэтому во из-

бежание необоснованных повторений сразу выпишем дисперсионное уравнение для изгибных колебаний доменной границы

$$\frac{k_x^2 - \omega^2/c_z^2}{\sqrt{k^2 - \omega^2/c_z^2}} + \frac{2}{1 - \nu} \frac{k_y^2}{\sqrt{k^2 - \omega^2/c_z^2} + \sqrt{k^2 - \omega^2/c_l^2}} + \frac{ak_x^2}{\sqrt{(\epsilon_{\parallel}/\epsilon_{\perp})k_x^2 + k_y^2}} = 0, \quad (13)$$

где  $c_l$  — скорость продольного звука;  $\epsilon_{\parallel}$ ,  $\epsilon_{\perp}$  — диэлектрические проницаемости кристалла соответственно вдоль сегнетоактивной оси  $x$  и в пер-



Зависимость скорости изгибной волны  $V$ , нормированной на скорость поперечного звука  $c_z$ , от угла  $\varphi$ , образуемого направлением распространения волны с вектором спонтанной поляризации  $P_s$ .

$\epsilon_{\parallel}/\epsilon_{\perp} = 10$  (а), 100 (б);  $\xi = V/c_z$ ;  $\alpha = 0$  (1), 1 (2), 10 (3), 100 (4).

пендикулярном направлении;  $\alpha = 16\pi P_s^2/\epsilon_{\perp}\mu_0^2$ . Из характера уравнения (13) ясно, что закон дисперсии изгибных колебаний имеет вид  $\omega = \xi c_l k$ , где  $\xi$  — безразмерный параметр, определяющий скорость изгибной волны, зависящий от  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\epsilon_{\parallel}/\epsilon_{\perp}$ .

Зависимость  $\xi$  от угла  $\varphi$ , образуемого направлением распространения изгибной волны и осью  $x$ , полученная в результате численного решения уравнения (13) для нескольких значений параметров  $\alpha$ ,  $\epsilon_{\parallel}/\epsilon_{\perp}$  ( $\nu=0.3$ ), приведена на рисунке. Для типичных сегнетоэлектриков-сегнетоэластиков  $\text{KN}_2\text{PO}_4$  и сегнетовой соли значения этих параметров таковы [11]:  $\alpha \approx 23.9$ ,  $\epsilon_{\parallel}/\epsilon_{\perp} \approx 100$  при  $T=100$  К в  $\text{KN}_2\text{PO}_4$ ;  $\alpha \approx 52.9$ ,  $\epsilon_{\parallel}/\epsilon_{\perp} \approx 12$  при  $T=288$  К в сегнетовой соли.

Как видно из рисунка, при изменении  $\varphi$  от  $\pi/2$  до 0 значение  $\xi$  меняется от 0.925 до 1. При этом чисто рэлеевская волна, распространяющаяся вдоль оси  $y$  ( $\varphi = \pi/2$ ) [4], монотонно перестраивается в объемную волну при  $\varphi = 0$ . Так же как и в [4], легко убедиться в том, что найденное решение отвечает локализованным на доменной границе упругим волнам, а степень локализации определяется параметром  $\xi$ . По сравнению с сегнетоэластиком, не являющимся сегнетоэлектриком (кривая 1 на рисунке) скорость упругих волн в сегнетоэлектрике-сегнетоэластике для тех же значений  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\nu_0$ ,  $\varphi$  всегда больше. Причем с ростом параметра  $\alpha$  зависимость  $\xi$  от  $\varphi$  становится все более резкой и появляется существенная тенденция к делокализации колебаний.

#### Список литературы

- [1] Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
- [2] Лайхтман Б. Д. // ФТТ. 1973. Т. 15. № 1. С. 93—102.
- [3] Нечаев В. Н., Рошупкин А. М. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 6. С. 1908—1910.
- [4] Нечаев В. Н., Рошупкин А. М. // ФТТ. 1989. Т. 31. № 8. 77—82.
- [5] Федосов В. Н. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 9. С. 2872—2874.
- [6] Нечаев В. Н., Рошупкин А. М. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 8. С. 2286—2291.
- [7] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [8] Gross H. // Phys. St. Sol. 1964. V. 5. N 2. P. 329—342.
- [9] Де Вит Р. Континуальная теория дислокаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
- [10] Косилов А. Т., Перевозников А. М., Рошупкин А. М. // Поверхность. 1983. № 10. С. 36—51.
- [11] Иона Ф., Ширане Д. Сегнетоэлектрические кристаллы. М.: Мир, 1965. 555 с.

Воронежский политехнический институт  
Воронеж

Поступило в Редакцию  
10 марта 1989 г.  
В окончательной редакции  
29 июня 1989 г.