

# Солитоноподобные режимы распространения пикосекундных акустических импульсов в парамагнитном кристалле

© А.Н. Бугай, С.В. Сазонов

Российский государственный университет им. И. Канта,  
236041 Калининград, Россия

E-mail: barab@newmail.ru

(Поступила в Редакцию 20 декабря 2005 г.)

Исследовано нелинейное распространение пикосекундных акустических импульсов в упругоизотропном низкотемпературном парамагнитном кристалле под произвольным углом к внешнему магнитному полю. Выявлены различные солитоноподобные режимы распространения, возникающие вследствие влияния спин-фононного взаимодействия, акустического ангармонизма, а также проанализирована их устойчивость по отношению к поперечным возмущениям. При дефокусирующем характере кубической нелинейности возможны импульсы сжатия, испытывающие дефокусировку, и импульсы растяжения, распространяющиеся в режиме самоканализирования. В случае фокусирующей кубической нелинейности при выполнении условий устойчивости по отношению к самофокусировке могут распространяться только импульсы сжатия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-02-16422а).

PACS: 43.25.Dc, 43.25.Rq

## 1. Введение

Важным направлением исследований нелинейных эффектов в оптике и акустике является изучение распространения в различных средах импульсов все более короткой длительности. Использование пикосекундных акустических импульсов [1–7] открывает новые возможности в акустической спектроскопии, нелинейной и прикладной акустике. Здесь следует выделить особый случай акустических импульсов в половину колебания. По устоявшейся терминологии данные образования называют видеоимпульсами или предельно короткими импульсами (ПКИ). Главная их особенность — отсутствие несущей частоты.

В указанной области наибольший интерес представляют солитонные или солитоноподобные режимы распространения импульсов. Как известно, формирование солитона есть результат взаимной компенсации двух конкурирующих эффектов. Первый из них связан с нелинейностью среды, которая приводит к самокручению профиля волны. Второй обусловлен влиянием дисперсии, приводящим к распыванию волнового пакета. В акустике для достаточно мощных волн деформации проявляются эффекты ангармонизма колебаний узлов кристаллической решетки. Для пикосекундных акустических импульсов важны эффекты пространственной дисперсии. При длительности импульса  $\tau_p \sim 1$  ps его пространственный размер в направлении распространения составляет  $l_s \sim a\tau_p \sim 5 \cdot 10^{-7}$  см, что сравнимо с величиной постоянной кристаллической решетки (здесь  $a \sim 5 \cdot 10^5$  см/с — скорость звука в веществе).

Объектом воздействия акустических импульсов часто являются парамагнитные кристаллы при температурах жидкого гелия, помещенные во внешнее магнитное по-

ле [4–12]. В этом случае в кристалле могут проявиться дополнительные нелинейные и дисперсионные эффекты, вызванные спин-фононным взаимодействием. В результате становится возможным существование новых типов солитоноподобных импульсов [7].

Обычно рассматриваются процессы распространения акустических импульсов вдоль каких-либо выделенных направлений кристалла, связанных с его симметрией. Так, в [4–6] исследованы солитонные режимы при распространении импульсов параллельно внешнему магнитному полю  $\mathbf{B}_0$  (геометрия Фарадея), которое в свою очередь направлено вдоль оси симметрии четвертого порядка кубического кристалла. В работах [7,10,11] изучена динамика пикосекундных импульсов в геометрии Фохта, т.е. при их распространении перпендикулярно  $\mathbf{B}_0$ .

В то же время в [12] рассмотрено солитонное распространение коротких акустических импульсов под произвольным по отношению к  $\mathbf{B}_0$  углом. Отметим, что в данной работе в качестве парамагнитных примесей рассмотрены ионы с эффективным спином  $S = 1/2$ . Хорошо известно, однако, что наиболее сильное взаимодействие с колебаниями кристаллической решетки испытывают парамагнитные примеси, обладающие эффективным спином  $S = 1$  [9]. В этом случае оно на два-три порядка интенсивнее спин-фононного взаимодействия для спинов  $S = 1/2$ . В качестве распространенного примера эффективных спинов можно привести парамагнитные примеси типа  $\text{Fe}^{2+}$  в кристалле  $\text{MgO}$  [9].

В настоящей работе исследуется распространение нерезонансных пикосекундных солитоноподобных акустических импульсов под произвольным углом к направлению внешнего магнитного поля, в которое помещен кристалл, содержащий парамагнитные примеси с эффективным спином  $S = 1$ . В этом случае необходимо

установить каковы будут дополнительные нелинейные и дисперсионные эффекты и какие солитоноподобные режимы распространения возможны. Кроме того, представляет интерес определение условий устойчивости данных уединенных волн по отношению к поперечным возмущениям, что также выполнено далее.

## 2. Уравнения движения

Пусть оси декартовой системы  $(x', y', z')$  направлены вдоль осей симметрии четвертого порядка кубического кристалла. Внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  направлено вдоль оси  $z'$ , а вдоль оси  $z$ , образующей с  $z'$  угол  $\alpha$  в плоскости  $(x', z')$ , распространяется продольный акустический импульс. Оси  $x$  и  $z$  повернуты относительно  $x'$  и  $z'$  на угол  $\alpha$ , а оси  $y'$  и  $y$  совпадают.

Сделаем важное замечание. В кристаллах в общем случае не существует чисто продольных или чисто поперечных упругих волн. Для простоты будем считать, что кристалл обладает свойством упругой изотропии [13]. В случае кубических кристаллов фактор анизотропии определяется следующим образом:  $A = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$ , где  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$  — упругие константы второго порядка. Для кристалла MgO эта величина составляет  $A = 1.48$  (по данным [13]). Поэтому в данном кристалле с неплохой точностью можно рассматривать отдельно только продольную или только поперечную волну, причем их скорости практически не зависят от направления распространения.

Далее мы учитываем влияние поперечных возмущений на распространение чисто продольного упругого импульса. Очевидно, что при сильном искривлении волнового фронта могут возникнуть поперечные компоненты деформации. Поэтому поперечные возмущения учитываем в параксиальном приближении, согласно которому  $\partial u/\partial z \gg |\nabla_{\perp} u|$ , где  $\nabla_{\perp}$  — поперечный градиент,  $u$  — поле локальных смещений кристалла вдоль оси  $z$ .

Для исследования взаимодействия акустического импульса с парамагнитными примесями используем полуклассический подход, согласно которому система парамагнитных ионов описывается квантово-механически, а акустическое поле — классическим образом.

Гамильтониан примесного парамагнитного иона с эффективным спином  $S = 1$  имеет вид [4,9]

$$\hat{H}_i = \hbar\omega_0 \hat{S}_{z'} + G_{11} \hat{S}_{z'}^2 \left( \varepsilon + \frac{\hbar^2}{6} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$

Здесь  $\hbar$  — постоянная Планка,  $\omega_0 = g_{\parallel} \mu_B B_0 / \hbar$  — частота расщеплений внутри зеемановского триплета эффективного спина  $S = 1$ ,  $g_{\parallel}$  — продольная компонента тензора Ланде,  $\mu_B$  — электронный магнетон Бора,  $G_{11}$  — компонента тензора спин-фононного взаимодействия, связывающая парамагнитные ионы с продольными упругими волнами,  $\varepsilon \equiv \varepsilon_{zz} = \partial u / \partial z$  — продольная компонента тензора деформации,  $h$  — среднее расстояние между ближайшими узлами в кристалле.

Первое слагаемое в правой части (1) описывает зеемановскую энергию спина в магнитном поле, второе отвечает спин-фононному взаимодействию. Вторым слагаемым в круглых скобках в (1) учитывается пространственная нелокальность спин-фононного взаимодействия [4,5], существенная для пикосекундных акустических импульсов и исчезающая в пределе сплошной среды.

Базисные спиновые матрицы  $\hat{S}_j$  ( $j = x', y', z'$ ) в представлении собственных функций  $\hat{S}_{z'}$  имеют вид [9]

$$\hat{S}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_{y'} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{z'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Преобразования поворота в плоскости  $(x, z)$  для перехода от „штрихованных“ матриц к „нештрихованным“ записываются следующим образом [14]:

$$\hat{S}_x = \hat{S}_{x'} \cos \alpha - \hat{S}_{z'} \sin \alpha,$$

$$\hat{S}_z = \hat{S}_{z'} \cos \alpha + \hat{S}_{x'} \sin \alpha. \quad (3)$$

Выполняя преобразования (3), получим окончательное выражение для гамильтониана парамагнитного иона

$$\hat{H}_i = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+\cos^2 \alpha}{2} \frac{\Omega}{\omega_0} & \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}} \frac{\Omega}{\omega_0} & \frac{\sin^2 \alpha}{2} \frac{\Omega}{\omega_0} \\ \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}} \frac{\Omega}{\omega_0} & \sin^2 \alpha \frac{\Omega}{\omega_0} & -\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}} \frac{\Omega}{\omega_0} \\ \frac{\sin^2 \alpha}{2} \frac{\Omega}{\omega_0} & -\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}} \frac{\Omega}{\omega_0} & -1 + \frac{1+\cos^2 \alpha}{2} \frac{\Omega}{\omega_0} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\Omega = \frac{G_{11}}{\hbar} \left( \varepsilon + \frac{\hbar^2}{6} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right).$$

Из (4) видно, что в общем случае (при произвольных значениях  $\alpha$ ) поле акустического импульса при взаимодействии с эффективными спинами выполняет двойную функцию: вызывает квантовые переходы внутри зеемановского триплета (недиагональные элементы в (4)) и динамическим образом смещает частоты данных переходов (диагональные элементы).

Гамильтониан акустического поля представим в виде

$$H_a = \int \mathcal{H}_a d^3 \mathbf{r},$$

где плотность гамильтониана определяется выражением [7]

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a = & \frac{p^2}{2\rho_m} + \frac{c_{11}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{c_{44}}{2} (\nabla_{\perp} u)^2 \\ & - \frac{c_{11} h^2}{24} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{1}{6} (3c_{11} + c_{111}) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 \\ & + \frac{1}{24} (c_{1111} + 6c_{111} + 3c_{11}) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^4. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $p$  — плотность импульса локальных смещений кристалла,  $\rho_m$  — средняя плотность среды,  $c_{111}$ ,  $c_{1111}$  — нелинейные модули упругости третьего и четвертого порядков. Помимо первых трех линейных слагаемых в (5) учтены пространственная акустическая дисперсия (четвертое слагаемое) и ангармонизм третьего и четвертого порядков (пятое и шестое слагаемые соответственно).

Согласно полуклассическому подходу, запишем для поля импульса уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta u}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad (6)$$

где  $H = H_a + \langle \hat{H}_i \rangle$ ,  $\langle \hat{H}_i \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{H}_i)$  — квантовое среднее,  $\hat{\rho}$  — оператор плотности эффективного спина, который для рассматриваемых здесь трехуровневых квантовых объектов можно записать в энергетическом представлении

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{32} & \rho_{31} \\ \rho_{23} & \rho_{22} & \rho_{21} \\ \rho_{13} & \rho_{12} & \rho_{11} \end{pmatrix}.$$

Тогда акустическое поле описывается следующим волновым уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - a_{\parallel}^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = & -b_2^a \frac{\partial^2 \varepsilon^2}{\partial z^2} + b_3^a \frac{\partial^2 \varepsilon^3}{\partial z^2} + b^a \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial z^4} \\ & + \frac{n_s G_{11}}{\rho_m} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) \tilde{U} + a_{\perp}^2 \Delta_{\perp} \varepsilon, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U} = & \left( \frac{3}{2} \sin^2 \alpha - 1 \right) \rho_{22} + \frac{\sin^2 \alpha}{2} (\rho_{31} + \rho_{13}) \\ & + \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}} (\rho_{32} + \rho_{23} - \rho_{21} - \rho_{12}), \end{aligned}$$

$a_{\parallel} = \sqrt{c_{11}/\rho_m}$  и  $a_{\perp} = \sqrt{c_{44}/\rho_m}$  — линейные скорости продольного и поперечного звука; слагаемое с  $\tilde{U}$  в правой части (7) учитывает спин-фононное взаимодействие,  $n_s$  — концентрация примесных парамагнитных ионов; вклады квадратичной и кубической акустических нелинейностей, обусловленных ангармонизмом колебаний узлов кристаллической решетки, учитываются параметрами  $b_2^a = 4a_{\parallel}^2 \Gamma$ ,  $b_3^a = (c_{1111}/6c_{11} - \Gamma - 1)a_{\parallel}^2$ ,

где  $\Gamma = -3/2(1 + c_{111}/3c_{11})$  — постоянная Грюнаизена; слагаемое с коэффициентом  $b^a = a_{\parallel}^2 h^2/12$  учитывает пространственную дисперсию, вызванную дискретной структурой кристалла.

Дополним волновое уравнение (7) материальными уравнениями для матрицы плотности

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_i, \hat{\rho}]. \quad (8)$$

Уравнения (7), (8) представляют собой самосогласованную нелинейную систему уравнений, описывающую динамику импульса и квантовых состояний парамагнитных ионов.

Зададимся целью исключить из системы (7), (8) материальные переменные, выразив их через поле импульсной деформации. Для этого положим, что спектр импульса не содержит частот, резонансных имеющимся квантовым переходам. Это можно выразить условием  $(\omega_0 \tau_p)^2 \gg 1$  [15]. Если длительность импульса  $\tau_p \sim 10$  ps, то при частоте зеемановского расщепления  $\omega_0 \sim 10^{12} \text{ s}^{-1}$  данное условие удовлетворяется. Вследствие нерезонансности взаимодействия нелинейные и дисперсионные эффекты являются относительно малыми и могут быть учтены аддитивно [5].

Для определенности считаем, что до импульсного воздействия (при  $t = -\infty$ ) квантовая система находилась в основном состоянии. Тогда  $\rho_{33}(t = -\infty) = \rho_{22}(t = -\infty) = 0$ ,  $\rho_{11}(t = -\infty) = 1$ . Для того чтобы существовала заметная разность населенностей уровней внутри зеемановского триплета, абсолютная температура  $T$  должна удовлетворять условию  $T \ll \hbar\omega_0/k_B$  [4,5], где  $k_B$  — постоянная Больцмана. При частоте расщепления  $\omega_0 \sim 10^{12} \text{ s}^{-1}$  температура должна быть порядка нескольких кельвинов, что хорошо выполняется для условий жидкого гелия.

Величина  $\Omega$ , присутствующая в правой части (8), имеет смысл акустической части Раби и обратно пропорциональна характерному времени взаимодействия  $\tau_p$ . Следовательно, уравнения для элементов матрицы плотности можно решать методом последовательных приближений по малому параметру  $(\omega_0 \tau_p)^2 \ll 1$  [5]. Выражения для матричных элементов  $\rho_{ij}$  ищем в виде разложений по степеням и производным малого параметра  $\Omega/\omega_0$ . При этом ограничимся третьей степенью параметра  $\Omega/\omega_0$  и его производными до второго порядка включительно. Выполнив необходимые вычисления (подобно тому как это проделано в [5,7]), найдем разложение для спинового отклика  $\tilde{U}$ , аддитивно учитывающее нелинейность и временную дисперсию:

$$\tilde{U} = f_1(\alpha) \frac{\Omega}{\omega_0} + f_2(\alpha) \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + f_3(\alpha) \frac{\Omega^3}{\omega_0^3} + \frac{f_4(\alpha)}{\omega_0^3} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Выражения для коэффициентов  $f_i(\alpha)$ , учитывающих зависимость от угла между направлением распространения и направлением магнитного поля и определяющих соответственно линейный безынерционный отклик

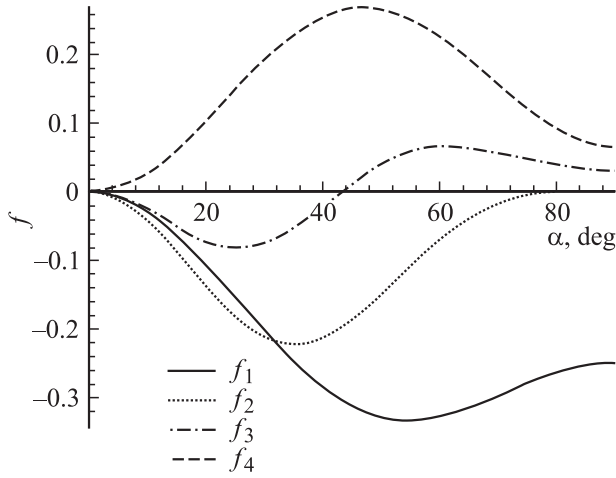


Рис. 1. Функции  $f(\alpha)$ , определяющие угловые зависимости нелинейно-дисперсионных параметров, возникающих при спин-фононном взаимодействии.

среды, ее квадратичную и кубическую нелинейность, а также дисперсию, имеют вид (см. также рис. 1)

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= -\frac{1}{4} \sin^2 \alpha (1 + 3 \cos^2 \alpha), \\ f_2(\alpha) &= -\frac{3}{2} \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha, \\ f_3(\alpha) &= \frac{1}{32} \sin^2 \alpha (1 + 9 \cos^2 \alpha + 3 \cos^4 \alpha - 45 \cos^6 \alpha), \\ f_4(\alpha) &= \frac{1}{16} \sin^2 \alpha (1 + 15 \cos^2 \alpha). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставим разложение (9) в (7). После перенормировки скорости звука за счет спин-фононного взаимодействия в правой части уравнения (7) останутся малые члены разложения по нелинейности, дисперсии и поперечным возмущениям. В данном случае можно пренебречь отраженной волной и редуцировать волновое уравнение относительно производных, воспользовавшись приближением квазиоднонаправленного распространения [16]. В результате получим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \beta_2 \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \beta_3 \varepsilon^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \xi^3} = -\frac{a_{\perp}^2}{2a} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\xi} \varepsilon d\xi, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= z - at, \quad a = a_{\parallel} (1 + n_s G_{11}^2 f_1(\alpha) / c_{11} \hbar \omega_0)^{1/2}, \\ \beta_2 &= b_2/a, \quad \beta_3 = 3b_3/2a, \quad \beta = b/2a, \\ b_2 &= b_2^a (1 - g_2 f_2(\alpha)), \quad b_3 = b_3^a (1 + g_3 f_3(\alpha)), \\ b &= b^a (1 + g f_4(\alpha) - \tilde{g} f_1(\alpha)), \\ g_2 &= \frac{n_s G_{11}^3}{4c_{11} \Gamma(\hbar \omega_0)^2}, \quad g_3 = \frac{a_{\parallel}^2 n_s G_{11}^4}{c_{11} (\hbar \omega_0)^3 b_3^a}, \\ g &= \frac{12a_{\parallel}^2 n_s G_{11}^2}{\hbar \omega_0^3 c_{11} h^2}, \quad \tilde{g} = \frac{2n_s G_{11}^2}{c_{11} \hbar \omega_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Как показывают выражения для коэффициентов в уравнении (11), за счет спин-фононного взаимодействия в общем случае возникают дополнительные нелинейности второго и третьего порядков. Также из-за спин-фононного взаимодействия возникают добавки к дисперсионному слагаемому в виде временной дисперсии, учитываемой коэффициентом  $g$  в выражении для  $b$ , и вклада пространственной нелокальности данного взаимодействия (слагаемое с  $\tilde{g}$ ). При этом все коэффициенты, учитывающие указанные выше эффекты, зависят от величины магнитного поля и угла  $\alpha$ .

Заметим, что при  $\alpha = 90^\circ$  выражения для коэффициентов уравнения (11) переходят в соответствующие выражения, найденные в [7].

Необходимые для оценок значения параметров кристалла MgO приведены в таблице. Величину  $b_3^a$ , в которую входит упругий модуль четвертого порядка, оцениваем с помощью аппроксимации Морзе потенциала атом-атомного взаимодействия. Таким образом, получим  $b_3^a = 7b_2^2/18a^2$  [7] и  $g_3 = 9n_s G_{11}^4/56c_{11} \Gamma^2(\hbar \omega_0)^3$ .

Параметры кристалла MgO (первые пять величин рассчитаны по данным [3], последняя приведена по данным [17])

$\rho_m, \text{g/cm}^3$	$a_{\parallel}, 10^5 \text{cm/s}$	$\Gamma$	$h, 10^{-8} \text{cm}$	$\varepsilon_c, 10^{-5}$	$G_{11}, 10^{-13} \text{erg}$
3.585	9.05	6.8	2.1	3.8	1.5

Примечание.  $\rho_m$  — плотность кристалла,  $a_{\parallel}$  — скорость продольного звука,  $\Gamma$  — постоянная Грюнайзена,  $h$  — среднее расстояние между узлами в решетке,  $\varepsilon_c$  — величина критической деформации,  $G_{11}$  — постоянная спин-фононной связи (примесные ионы  $\text{Fe}^{2+}$ ).

Взяв  $\omega_0 \sim 10^{12} \text{s}^{-1}$ , найдем  $g/\tilde{g} \sim 10^4$ . Таким образом, временная дисперсия, вызванная спин-фононным взаимодействием при наличии внешнего магнитного поля, значительно превосходит пространственную дисперсию, обусловленную структурой кристалла.

### 3. Солитоноподобные режимы распространения и их устойчивость к поперечным возмущениям

При анализе решений (11) сначала рассмотрим одномерный случай ( $\Delta_{\perp} = 0$ ), а затем проведем исследование влияния поперечных возмущений.

Из соотношения для коэффициентов дисперсии  $b$  и квадратичной нелинейности  $b_2$  видно, что они не меняют знака при любых значениях угла между направлениями распространения и магнитного поля. Следовательно, дисперсия всегда является нормальной. Величина же  $b_3$  коэффициента кубической нелинейности может менять знак при  $g_3 > 12.3$ . Это важное обстоятельство, как видно из дальнейшего рассмотрения, качественно влияет на характер поперечных возмущений. Привести области углов  $\alpha$ , соответствующих положительным или отрицательным значениям  $b_3$ , в аналитическом виде

затруднительно. Поэтому в конкретных примерах мы приводим углы, найденные численно.

Уравнение (11) в общем случае допускает два типа одномерных солитонных решений

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{\pm 3b/b_2 l^2}{\sqrt{1 + \gamma/l^2} \cosh((\xi - ct)/l) \mp 1}. \quad (13)$$

где  $l$  имеет смысл протяженности импульса,  $c = \beta/l^2$ ,  $\gamma = 9bb_3/2b_2^2$ .

Здесь знак плюс соответствует деформации растяжения, минус — деформации сжатия.

Когда внешнее магнитное поле отсутствует,  $b_3 > 0$  и  $g = g_2 = g_3 = 0$ , т.е. нелинейность и дисперсия имеют чисто акустическую (не спин-фононную) природу. В этом случае для ПКИ длительностью  $\tau_p = 10$  ps относительные деформации (максимальные значения) составляют в случае импульсов сжатия  $|\varepsilon_-| = 1.3 \cdot 10^{-8}$ . В случае же импульсов растяжения  $|\varepsilon_+| = 1.6 \cdot 10^{-2}$ , что превосходит порог перехода упругой деформации в пластическую (см. таблицу). Следовательно, в отсутствие внешнего магнитного поля возможно существование только упругих импульсов сжатия. Очевидно, что влияние кубической нелинейности здесь незначительно, поскольку  $\gamma/l^2 = 7h^2/48l^2 \ll 1$ . Таким образом, в этом случае уравнение (11) с очень хорошей точностью может быть заменено уравнением Кортевега—де Вриза. Такие импульсы акустической природы экспериментально наблюдались в [3].

Пусть теперь магнитное поле отлично от нуля. Положим  $n_s = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\omega_0 = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ ,  $\tau_p = 300$  ps. В этом случае  $g_3 = 6 \cdot 10^3$ . Коэффициент  $b_3$  отрицателен при  $1 < \alpha < 43^\circ$  и положителен при  $0 < \alpha < 1^\circ$  и  $43 < \alpha \leq 90^\circ$ .

Рассмотрим сначала ситуацию, когда  $b_3 > 0$ . Пусть  $\alpha = 60^\circ$ . Тогда относительные деформации в случае волн сжатия  $|\varepsilon_-| = 5.1 \cdot 10^{-6}$ , а в случае волн растяжения  $|\varepsilon_+| = 1.7 \cdot 10^{-4}$ . Добиться существования последних можно, понизив величину магнитного поля так, что  $\omega_0 = 0.5 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ . Тогда, взяв  $\tau_p = 600$  ps, получим для относительной деформации волн растяжения  $|\varepsilon_+| = 2.8 \cdot 10^{-5}$ .

В случае  $b_3 > 0$  возможны лишь волны сжатия вида

$$\varepsilon = \frac{-3b/b_2 l^2}{\sqrt{1 - |\gamma|/l^2} \cosh((\xi - ct)/l) + 1}, \quad (14)$$

причем на длительность импульса накладывается ограничение  $\tau_p > \sqrt{|\gamma|}/a$ .

Пусть  $n_s = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\omega_0 = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ ,  $\tau_p = 300$  ps и  $\alpha = 30^\circ$ . Ограничение на длительность импульса, связанное со структурой решения (14), выполняется, а относительная деформация составляет  $|\varepsilon| = 4.6 \cdot 10^{-6}$ .

Таким образом, при произвольном угле между магнитным полем и направлением распространения на структуру решений преимущественное влияние оказывает коэффициент кубической нелинейности  $b_3$ . Им можно пре-

небречь при чисто акустических механизмах нелинейности, однако в случае значительной роли спин-фононного взаимодействия учет кубической нелинейности приводит к возможности существования как импульсов сжатия, так и импульсов растяжения.

Рассмотрим теперь, как влияют поперечные возмущения на указанные выше типы импульсов. Случай  $b_3 > 0$ , что соответствует дефокусирующему характеру кубической нелинейности, был достаточно подробно исследован нами в [7] при  $\alpha = 90^\circ$ . Импульсы сжатия испытывают дефокусировку, а импульсы растяжения способны распространяться в режиме самоканализирования. В случае произвольных углов ситуация качественно не изменяется, происходит лишь перенормировка параметров  $b$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  вследствие их зависимости от угла  $\alpha$ . Случай же фокусирующей кубической нелинейности  $b_3 < 0$  требует специального исследования.

Учет влияния поперечных возмущений на волны сжатия (14) проведем с помощью вариационного метода „усредненного лагранжиана“ типа Ритца—Уизема [18–20]. Лагранжиан, соответствующий (11), с переходом к полю смещений  $u$  имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\beta_2}{6} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^3 + \frac{\beta_3}{12} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^4 - \frac{\beta}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{a_{\perp}^2}{4a} (\nabla_{\perp} u)^2. \quad (15)$$

Пробное решение выберем исходя из (14):

$$u = -\frac{6b}{b_2} \ln \left[ \frac{\theta - (1 + \sqrt{1 - \theta^2}) \tanh(\eta/2)}{\theta + (1 + \sqrt{1 - \theta^2}) \tanh(\eta/2)} \right], \quad (16)$$

где  $\eta = \theta(\xi - \Phi)/\sqrt{|\gamma|}$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Малость нелинейных, дисперсионных и поперечных эффектов в (11) позволяет ввести функции  $\theta = \theta(t, \mathbf{r}_{\perp})$  и  $\Phi = \Phi(t, \mathbf{r}_{\perp})$ , первая из которых пропорциональна обратному продольному размеру импульса, а вторая имеет смысл акустического солитонного эйконала.

Подставляя (16) в (15) и интегрируя полученное выражение по „быстрой“ переменной  $\xi$ , получим „усредненный лагранжиан“ вида

$$\Lambda = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \frac{(\nabla_{\perp} \varphi)^2}{2} - \frac{b}{2|\gamma|} \left( \frac{\theta^3}{3} - \rho \right) + \frac{a_{\perp}^2 |\gamma|}{2} \frac{(\nabla_{\perp} \varphi)^2}{\theta} d(\theta). \quad (17)$$

где

$$\varphi = -a\Phi, \quad \rho = \ln \frac{\theta + 1 - \sqrt{1 - \theta^2}}{\theta - 1 + \sqrt{1 - \theta^2}} - \theta,$$

$$d(\theta) = \rho^3/3\theta^4 - (1/\theta^2 + 1/(1 - \theta^2)^2 - \pi^2/3\theta^4)\rho - (\theta^2 + 1)/\theta(1 - \theta^2)^2 - 2/3\theta.$$

Записывая с использованием  $\Delta$  уравнения Эйлера–Лагранжа для переменных  $\theta$  и  $\Phi$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\perp}(\rho \mathbf{V}_{\perp}) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{V}_{\perp}^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} &= F_{\perp}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\mathbf{V}_{\perp} = \nabla_{\perp} \varphi, \quad \int \frac{dP}{\rho} = \frac{b}{2|\gamma|} \theta^2,$$

$$F_{\perp} = a_{\perp}^2 |\gamma| (1/\theta^2 - 1) [d(\theta) \Delta_{\perp} \theta + 0.5 d'(\theta) (\nabla_{\perp} \theta)^2].$$

В одномерном случае ( $\nabla_{\perp} = 0$ ) система (18) легко интегрируется. При этом  $\theta = \sqrt{|\gamma|/l} = \text{const}$ ,  $\Phi = -b\theta^2 t / 2\gamma a = \beta t / l^2$ . Как и следовало ожидать, пробное решение совпадает с точным одномерным решением.

Функция  $F_{\perp}$  в правой части второго выражения (18) описывает волновые свойства и соответствует учету эффектов дифракции [7,20].

В „эikonальном“ приближении (в приближении „геометрической акустики“)  $F_{\perp} = 0$ . В этом приближении условие устойчивости по отношению к самофокусировке можно сформулировать, используя аналогию с гидродинамикой идеальной жидкости. Гидродинамическое течение устойчиво, когда  $dP/d\rho > 0$ , что в нашем случае эквивалентно неравенству  $b\rho(1 - \theta^2)/|\gamma|\theta > 0$ , которое здесь выполняется. Следовательно, на эйкональной стадии рассматриваемые импульсы устойчивы по отношению к поперечным возмущениям.

Учтем теперь влияние дифракции. Пусть поле деформации аксиально-симметрично. Далее мы следуем формализму, изложенному в [7,20], используя приосевое приближение. В этом случае представим  $\theta$  и  $\varphi$  в виде разложений

$$\theta = \theta_m(t) (1 - r^2/R_T^2(t)) + \dots, \quad (19)$$

$$\varphi = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) r^2/2 + \dots, \quad (20)$$

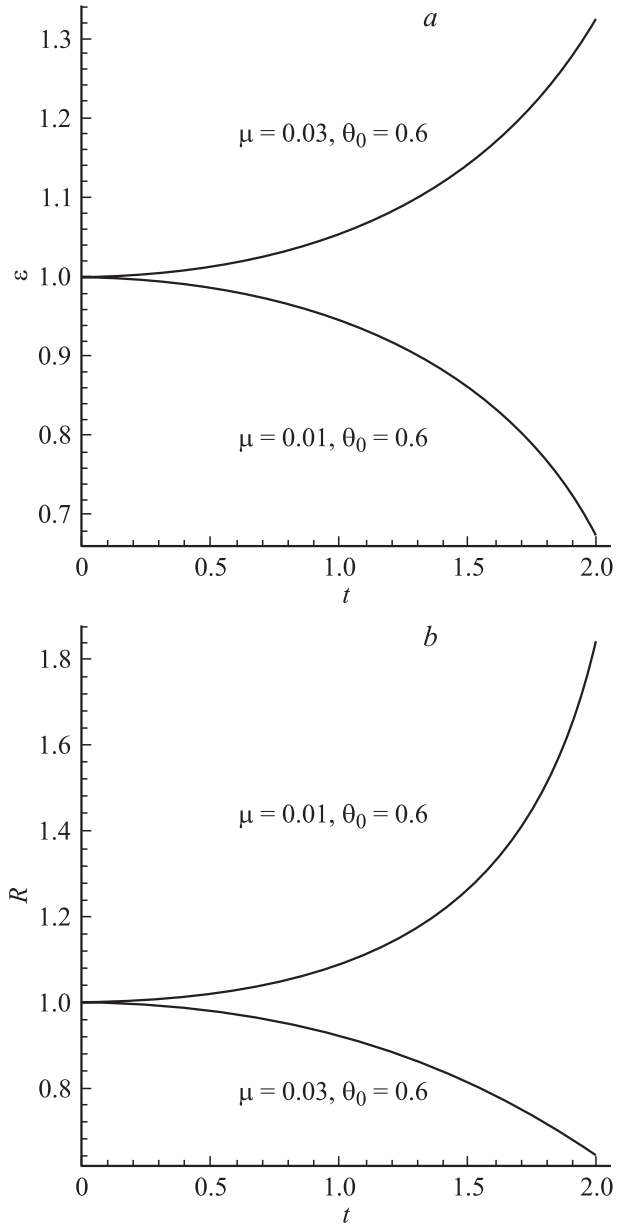
где  $R_T$  — характерный поперечный размер, пропорциональный радиусу импульса  $R$ . Поскольку волна локализована во всех направлениях и поле деформаций отлично от нуля в сравнительно небольшой области, прилегающей к центральной части поперечного сечения импульса, данное приближение является вполне оправданным.

Подставляя (19), (20) в первое уравнение (18) и пренебрегая в разложениях слагаемыми выше второго порядка по  $r/R_T$ , получим соотношения

$$\varphi_2 = -\partial(\ln \rho(\theta_m))/\partial t, \quad (21)$$

$$R_T^2 = C_0 \theta_m^3 / \rho^3(\theta_m) (1 + \theta_m^2), \quad (22)$$

где константа  $C_0$  определяется начальным радиусом  $R(0) = R_0$  и поперечным размером импульса. Перейдем от  $R_T$  к радиусу импульса  $R$ . Определим последний через интенсивность  $I_m = I_{\text{max}}(t) (1 - r^2/R(t)^2)$ , где



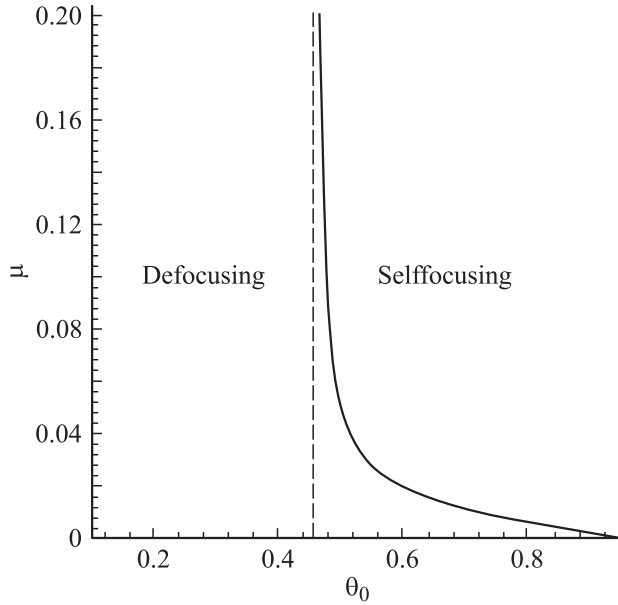
**Рис. 2.** Эволюция относительной деформации (а) и радиуса импульса (б) при различных начальных параметрах. Величины нормированы на их начальные значения, а время — на  $t_c = \sqrt{|\gamma|/|b|} R_0$ .

$I_m(\theta) = I_0 \theta^4 / (\sqrt{1 - \theta^2} + 1)^2$ . Подставляя сюда (22) с учетом начальных условий  $R(0) = R_0$ ,  $\theta_m(0) = \theta_0$ , получим

$$R = R_0 \sqrt{\psi(\theta_m)/\psi(\theta_0)}, \quad (23)$$

где  $\psi(\theta) = \theta^3 (1 + \sqrt{1 - \theta^2}) / \rho^3(2 - \theta^2 + 2\sqrt{1 - \theta^2}) \times \sqrt{1 - \theta^2}$ .

Подставляя (19), (20) с учетом (21)–(23) во второе уравнение системы (18) и приравнявая слагаемые при



**Рис. 3.** Область значений параметров  $\theta_0$  и  $\mu$ , определяющая режимы самофокусировки и дефокусировки.

нулевой степени в разложении по  $r/R_T$ , найдем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\frac{b}{2|\gamma|} \left( \theta_m^2 + \mu \frac{\psi(\theta_0) d(\theta_m) \rho(\theta_m)^3 (1 - \theta_m^2)}{\theta_m^2} \right). \quad (24)$$

Группируя слагаемые при второй степени в данном разложении, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка для функции  $\theta_m(t)$

$$\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial \tau^2} + k_1(\theta_m) \left( \frac{\partial \theta_m}{\partial \tau} \right)^2 + k_2(\theta_m, \theta_0, \mu) = 0, \quad (25)$$

где

$$\tau = 1/t_c, \quad t_c = \sqrt{|\gamma|/b} R_0, \quad \mu = a_{\perp}^2 \gamma^2 / b R_0^2,$$

$$k_1 = 2(1 + \theta_m^5 / \rho(\theta_m)^3) [\theta_m (1 - \theta_m^2)]^{-1},$$

$$k_2 = 2\rho(\theta_m)^4 (1 - \theta_m^2)^2 \theta_m^{-3} \psi(\theta_0)$$

$$\times \left\{ 1 - 2\mu \rho(\theta_m)^3 (1 - \theta_m^2) \theta_m^{-6} \psi(\theta_0) \right.$$

$$\left. \times [3\theta_m (1 - \theta_m^2) d'(\theta_m) - 2d(\theta_m)] \right\}.$$

Начальные условия при исходно плоском фронте импульса (что соответствует  $\varphi_2(0) = 0$ ) примут вид  $\theta_m(0) = \theta_0 \equiv \sqrt{|\gamma|/l}$ ,  $(\partial \theta_m / \partial \tau)_{\tau=0} = 0$ .

Как видно из (25), эволюция величины  $\theta_m(t)$  определяется двумя параметрами:  $\theta_0$  и  $\mu$ . Первый обратно пропорционален продольному размеру или длительности импульса, а второй — квадрату его поперечного размера. Из анализа уравнения (25) следует, что возможны два режима: дефокусировка и самофокусировка. Характерные зависимости поперечного радиуса и деформации, полученные численным решением (25), показаны на

рис. 2. Оценим пробег импульса до значительного уменьшения его амплитуды в режиме дефокусировки. Пусть  $n_s = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\omega_0 = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ ,  $\tau_p = 300 \text{ ps}$  и  $\alpha = 30^\circ$ . Относительное влияние поперечных возмущений можно выразить малым параметром  $l^2/R_0^2 \ll 1$ . Положим также  $R_0 = 10l = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ , тогда  $\theta_0 = 0.12$ ,  $\mu = 0.98$ . Решив (25) численно, найдем, что характерный пробег импульса составляет  $L \sim 0.14 a t_c \sim 4R_0 \sim 0.1 \text{ mm}$ . Если  $R_0 = 100l$ , то  $\mu = 0.0098$ , а пробег увеличивается в 10 раз, т.е.  $L \sim 1 \text{ mm}$ .

Область значений параметров  $\theta_0$  и  $\mu$ , соответствующих данным режимам, приведена на рис. 3. Видно, что при  $\theta_0 > 0.46$  импульс неустойчив по отношению к самофокусировке при любом достаточно малом радиусе, поскольку  $\mu \sim 1/R_0^2$ . Легко видеть, что данное условие эквивалентно ограничению на амплитуду или интенсивность импульса.

#### 4. Заключение

В настоящей работе рассмотрены солитоноподобные режимы распространения предельно коротких акустических импульсов в парамагнитном кристалле. Кристалл помещен в магнитное поле, направленное под произвольным углом к направлению импульсного распространения. В случае отсутствия магнитного поля возможно существование только импульсов сжатия, формирующихся за счет чисто акустических нелинейности и дисперсии. При наличии спин-фононного взаимодействия возникают дополнительные дисперсионные и нелинейные эффекты. Коэффициенты при нелинейности и дисперсии в волновом уравнении начинают зависеть от величины внешнего магнитного поля и угла между ними и направлением распространения.

Вследствие данной зависимости может меняться знак коэффициента при кубической нелинейности, что соответствует изменению ее характера с дефокусирующего на фокусирующий. В первом случае возможно формирование как волн сжатия, так и волн растяжения. При фокусирующей же нелинейности существуют лишь волны сжатия, немного отличающиеся по структуре от ранее упомянутых. Данное отличие приводит к ограничению на длительность импульса, а также к качественному различию влияния поперечных возмущений. Так, при дефокусирующей нелинейности импульсы растяжения распространяются в режиме самоканализирования, а импульсы сжатия испытывают дефокусировку. В противоположном случае возможны как самофокусировка, так и дефокусировка. Здесь же найдены условия устойчивости по отношению к самофокусировке (коллапсу), определяемые начальными длительностью и поперечным размером импульса.

В настоящей работе рассмотрена простейшая модель упругоизотропной среды, что позволило относительно просто учесть влияние поперечных возмущений. В общем случае у упругих импульсов конечных поперечных

размеров нельзя выделить чисто продольные или поперечные составляющие. Соответствующие исследования представляются значительно более сложными, чем приведенные здесь.

Данное замечание в совокупности с отказом от принятого здесь параксиального приближения может дать толчок к дальнейшим исследованиям в этом направлении.

## Список литературы

- [1] С.А. Ахманов, В.А. Выслоух, А.С. Чиркин. Оптика фемто-секундных лазерных импульсов. Наука, М. (1988).
- [2] В.Э. Гусев, А.А. Карабутов. Лазерная оптоакустика. Наука, М. (1991).
- [3] H.-Y. Nao, H.J. Maris. Phys. Rev. B **64**, 064 302 (2001).
- [4] S.V. Sazonov. J. Phys.: Cond. Matter **6**, 6295 (1994).
- [5] С.В. Сазонов. ЖЭТФ **118**, 20 (2000).
- [6] С.В. Воронков, С.В. Сазонов. ЖЭТФ **120**, 269 (2001).
- [7] А.Н. Бугай, С.В. Сазонов. ФГТ **47**, 1839 (2005).
- [8] В.А. Голенищев-Кутузов, В.В. Самарцев, Н.К. Соловаров, Б.М. Хабибулин. Магнитная квантовая акустика. Наука, М. (1977).
- [9] Дж. Такер, В. Рэмington. Гиперзвук в физике твердого тела. Мир, М. (1975).
- [10] S.V. Sazonov, L.S. Yakupova. J. Phys.: Cond. Matter **4**, 6479 (1992).
- [11] S.V. Sazonov. J. Phys.: Cond. Matter **4**, 6485 (1992).
- [12] А.А. Заболотский. ЖЭТФ **123**, 560 (2003).
- [13] Ч. Киттель. Введение в физику твердого тела. Физматгиз, М. (1963).
- [14] N.S. Shiren. Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
- [15] Э.М. Беленов, А.В. Назаркин, В.А. Ущаповский. ЖЭТФ **100**, 762 (1991).
- [16] М.Б. Виноградов, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. Наука, М. (1990).
- [17] G.D. Watkins, E.R. Feher. Bull. Am. Phys. Soc. (Ser. 2) **7**, 29 (1962).
- [18] D. Anderson. Phys. Rev. A **27**, 3135 (1983).
- [19] С.К. Жданов, Б.А. Трубников. Квазигазовые неустойчивые среды. Наука, М. (1991).
- [20] С.В. Сазонов. ЖЭТФ **125**, 1419 (2004).